Введение

В школе изучают функции только одной переменной, заданные на числовой прямой $\mathbb{R}$, поэтому применительно к этому под оптимизационными (или экстремальными) задачами понимают те, в которых задана некоторая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, которую называют *целевой функцией*, «ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача» [1, стр. 6], и некоторое подмножество $X\subseteq\mathbb{R}$ (называемое *множеством допустимых решений*), «среди элементов которого осуществляется поиск». Требуется найти точку $x_0\in X$, в которой достигается наибольшее или наименьшее значения, или установить, что таких точек нет.

Если при этом $X=\mathbb{R}$, то ищется *безусловный экстремум*, а если $X\subset\mathbb{R}$ и задается с помощью равенств и (или) неравенств, то ищется *условный экстремум.*

Сокращенно это записывается так:

$$f(x)\to\min \text{ по } x \text{ из } X$$

или

$$f(x)\to\max \text{ по } x \text{ из } X$$

В школьном курсе X может быть прямой, лучом, отрезком, полуоткрытым отрезком или открытым отрезком.

Оптимизационные задачи в школьных учебниках алгебры и анализа 10-11 классов

Учебник под редакцией А. Н. Колмогорова

Данный учебник [3] написан не только под руководством великого математика, но и человека, который увлеченно преподавал долгое время в школе. Оптимизационные задачи разбираются в разделе, специально для этого написанного: «Наибольшее и наименьшее значение функции».

После необходимых определений дается очень полезная для общего развития теорема Вейерштрасса, с помощью которой обосновывается следующее правило поиска экстремальных значений:

> Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Этот алгоритм шаг за шагом реализуется на примере решения двух задач.

Цель, с которой в учебнике рассматривается эта тема, сформулирована так [3, стр.156]:

> Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

Для решения оптимизационных задач в учебнике приводится очень полезная схема (алгоритм):

> Изложенный выше метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач. При этом действуют по следующей схеме:
>
> 1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$;
>
> 2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
>
> 3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Затем идет серия хорошо подобранных задач из алгебры, геометрии, физики.

Вопросы оптимизации со всех сторон обсуждаются в хорошем историческом обзоре.

Даже после такого подробного изучения оптимизационных задач о них речь идет и при изучении последующих тем. Например, в теме «Интеграл» рассматриваются задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значений определенных интегралов.

Учебник Мордковича А. Г.

Тема оптимизации начинается в учебнике [4] в специально написанном разделе «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин» на стр. 192. Теорема Вейерштрасса, как и в учебнике [3], тоже формулируется, но почему-то без указания фамилии Вейерштрасса. В отличие от учебника [3], при формулировке алгоритма нахождения экстремальных значений различают понятия стационарной и критической точек, которые в [3] относятся к критическим.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. **Найти производную $f'(x)$.**
2. **Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.**
3. **Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).**

Далее на нескольких примерах показывается, как решать задачи, применяя этот алгоритм по шагам.

Специально рассматривается тема оптимизации на незамкнутых отрезках для случая единственной стационарной или критической точки с разбором задач.

Так же, как и в книге [3], рассматривается цель, с которой изучаются задачи оптимизации: а именно, моделирование практических задач, но более подробно, с формулировкой алгоритма составления и изучения модели с пошаговым разбором нескольких примеров.

При изучении последующих тем время от времени решаются и задачи на оптимизацию.

Очень полезна тема функционально-графического метода решения уравнений с применением методов оптимизации (стр. 358):

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: ***если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений***

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

В целом учебник [4] производит впечатление очень подробного и многословного пересказа учебника [3], что, возможно, полезно тем учителям, которым кратко и изящно написанный текст [3] требуется дополнительно разъяснить.

Учебник Алимова Ш. А. и др.

В книге [5] производная рассматривается только после предварительного введения и изучения элементарных функций, тема оптимизации рассматривается в главе IX, §52 «Наибольшее и наименьшее значения функции».

Теорема Вейерштрасса вообще не формулируется, а сразу дается «рецепт» нахождения наибольшего и наименьшего значений функции без всякого обоснования:

> Для нахождения наибольшего и на
> чений функции на отрезке $[a; b]$
> 1) найти значения функции на к
> т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;
> 2) найти ее значения в тех крити

Затем пошагово разбираются 4 задачи для двух функций, из теории чисел и из геометрии. Мотивировок, формулировки цели нет. Далее в теме «Интеграл» оптимизационные задачи не появляются вовсе. В этом смысле книга существенно уступает книгам [3] и [4].

Более сложные задачи оптимизации имеются в конце учебника для внеклассного решения.

Оптимизационные задачи в школьных учебниках геометрии 9, 10 и 11 классов

Учебник под редакцией Атанасяна Л. С.

В книге [6] оптимизационные задачи как таковые не вводятся.

В главе 4 среди задач на построение приведена классическая задача, которую должен знать любой школьник:

> **355** Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM + MB$ имела наименьшее значение, т. е. была бы меньше суммы $AX + XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

Эта задача еще раз дублируется под номером 1175.

Среди дополнительных задач к теме «Окружность» приведена задача

> **899** Внутри окружности дана точка. П
> ходящую через эту точку, так, ч

К этой задаче имеется

> **899.** Указание. Сначала доказать, что наименьшей будет хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через данную точку.

1262 В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма ее расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение: а) $A\,(2;\ 3)$, $B\,(4;\ -5)$; б) $A\,(-2;\ 4)$, $B\,(3;\ 1)$.

1176 Даны острый угол ABC и точка D внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

В конце учебника среди задач повышенной сложности имеется такая:

1306 Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удаленных от него вершин куба. Как должен двигаться паук?

Задача относится к темам: «развертка куба» и «кратчайшая линия на плоскости».

На наибольшее значение никаких стоящих задач вообще нет, если не считать «псевдозадачу» 1091…

Таким образом, в курсе 9-го класса в указанном учебнике вообще не обсуждаются оптимизационные задачи, вышеуказанные задачи приведены без всякой мотивации.

В учебнике геометрии [7] для 10-11 классов тема оптимизации вообще никак не отражена.

Учебник Киселева А.П.

Как мы видели, в учебнике геометрии под ред. Атанасяна задача оптимизации как таковая вообще не ставится, то же самое можно утверждать и о старых учебниках геометрии, популярных в прошлом. Есть просто некоторый набор задач на эту тему. В учебнике А.П.Киселева [10] практически все оптимизационные задачи появляются как задачи на построение.

стр. 53

75. Даны две точки A и B, расположенные по прямой XY. Расположить на этой прямой отрезок

стр. 73

З а д а ч а. *На прямой AB* (рис. 112) *найти*

ее расстояний от данных точек M и N было

3. Дан угол и внутри него точка. Построить т
периметра, такой, чтобы одна его вершина лежа

стр. 78

75. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой XY. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AM + MN + NB$ была наименьшей длины.

Указание. Приблизим точку B к точке A, двигая ее по прямой, параллельной XY, на расстояние, равное MN.

стр. 98

23. На данной прямой найти точку, наимен

стр. 240

20. Дана плоскость M и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на плоскости M такую точку C, чтобы сумма $AC + BC$ была наименьшей.

Задачи на нахождение наибольших и наименьших величин

1. [9, задача 5.11(3)] Сумма n положительных чисел равна a. Докажите, что произведение этих чисел максимально, если каждое из них равно a/n.

Доказательство.

Известно неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для неотрицательных чисел:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$ причем равенство достигается при $a_1 = \ldots = a_n$.

По условию $a_1 + \ldots + a_n = a$, а при достижении равенства правая часть, то есть произведение чисел, достигает максимума.

Из $a_1 = \ldots = a_n$ следует $a_1 = \ldots = a_n = \dfrac{a}{n}$.

2. [9, задача 5.11(18)] Дождевая капля, начальная масса которой равна m граммов, а начальная скорость равна нулю, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что масса уменьшается пропорционально времени (коэффициент пропорциональности равен k г/с). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергии капли будет наибольшей?

Решение

В момент времени t масса капли равна m – kt, скорость равна vt, тогда кинетическая энергия равна

$$K(t) = (m - kt) \cdot \frac{g^2 t^2}{4} = \frac{g^2}{4}\left(mt^2 - kt^3\right).$$

Ставим задачу

$$K(t) \to \max, \quad x \in (0; +\infty)$$

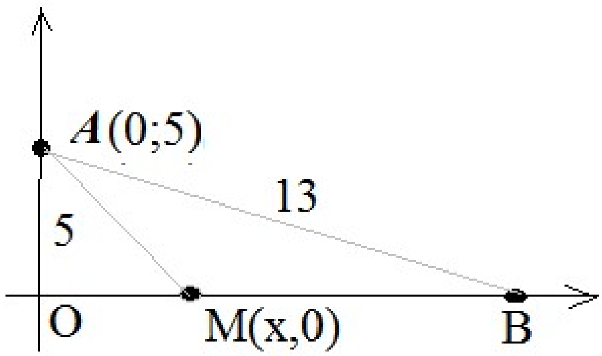
Приравняв производную от K нулю, получаем

$$2mt - 3kt^2 = 0 \Rightarrow 2m = 3kt \Rightarrow t = \frac{2m}{3k}.$$

Производная меняет знак при переходе через эту точку с + на -, здесь точка максимума. Так как на луче (0; +∞) она единственная, то в этой точке достигается не только максимум, но и наибольшее значение, которая равна $\frac{m^3 g^2}{k^2}$ дина.

3. [9, задача 5.11(19).] Из пункта А, находящегося в лесу в 5 км от прямолинейной дороги, пешеходу нужно попасть в пункт В, расположенный на этой дороге в 13 км от пункта А. По дороге пешеход может двигаться с максимальной скоростью 5 км/ч, а по лесу – с максимальной скоростью 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет добраться из пункта А в пункт В?

Решение.



По теореме Пифагора OB = 12.

Надо решить задачу на условную оптимизацию

$$\frac{AM}{3} + \frac{MB}{5} \to \min, \; x \in (0;12).$$

В координатах она имеет вид

$$y=\frac{\sqrt{25+x^2}}{3}+\frac{12-x}{5}\to \min$$

Приравняем производную нулю:

$$y'=\frac{x}{3\sqrt{25+x^2}}-\frac{1}{5}=0\Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{25+x^2}}=\frac{1}{5}\Rightarrow$$
$$\frac{25x^2}{25+x^2}=9\Rightarrow 16x^2=9\cdot 25\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3.75\textit{км}.$$

Производная меняет знак при переходе через эту точку с – на +, здесь точка минимума. Так как на интервале (0; 12) она единственная, то в этой точке достигается не только минимум, но и наименьшее значение. Подсчитаем затраченное время:

$$y=\frac{\sqrt{25+3.75^2}}{3}+\frac{12-3.75}{5}\approx 3 \text{ часа } 44 \text{ мин.}$$

4. [ЕГЭ 2006] Пусть цена товара равна p рублей, а количество n проданного товара зависит от цены и выражается равенством n = 100 – p. При какой цене будет максимальный выручка?

Решение.

Выручка будет равна y = (100 – p)p, то есть $y=-p^2+100p.$ Зависимость квадратичная, при старшей степени коэффициент отрицательный, поэтому максимум достигается в вершине параболы. Ее абсцисса равна

$$p_0=-\frac{100}{2\cdot(-1)}=50.$$

При такой цене товара будет продано n = 100 – 50 = 50 единиц, а выручка составит y = 50·50 = 2500 рублей.

5. [4,стр. 359].

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 -$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x$
жит парабола, ветви которой направлены ввер
параболы функция достигает своего наименьше
вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. I

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

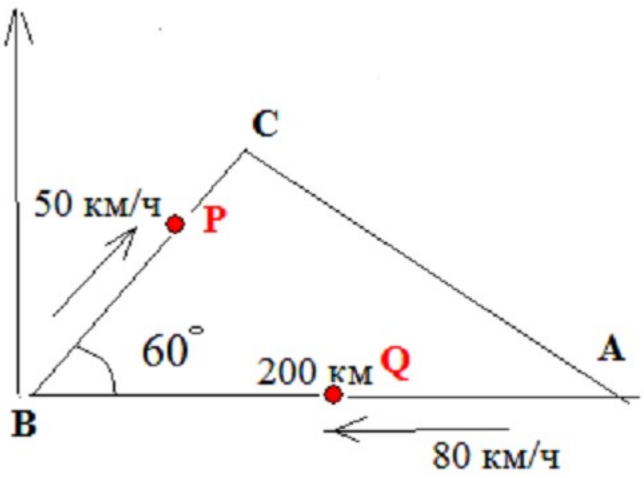
Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили:
функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{наиб} = 1$.
к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \end{cases}$$

6. [3, стр. 339] № 229

229. Три пункта A, B, C не лежат на од
$\angle ABC = 60°$. Одновременно из точки A
а из точки B — поезд. Автомобиль движ
к B со скоростью 80 км/ч, поезд —
50 км/ч. В какой момент времени (от н

Решение



В момент времени t автомобиль будет в точке Q(200 – 80t, 0), а поезд – в точке $P\left(50t \cdot \frac{1}{2}, 50t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Квадрат расстояния равен

$$(25t-200+80t)^2+\left(25t\cdot\sqrt{3}\right)^2=12900t^2-42000t+40000$$

Получилась квадратичная зависимость, достигающая наименьшего значения в вершине с абсциссой $t=-\frac{-42000}{2\cdot 12900}=\frac{70}{43}=1\frac{27}{43}$ часа. Подставляя в квадрат расстояния и извлекая корень, получаем примерно 76.25 км.

7. [11]

159. Найти наименьшее и наибольшее значения функции
$[-10, 10]$.

◀ Находим производную

$$f' : x \mapsto (2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-3x+2), \quad x \neq$$

отсюда получаем точки, подозрительные на экстремум:
$x_1 = \frac{3}{2}$ $\left(f'\left(\frac{3}{2}\right)=0\right)$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ (производная не сущест

8. [11]

163. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

◀ Рассмотрим функцию $f : x \mapsto x^p + (1-x)^p$. Ее производн

9. [11]

193. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со ст
эллипса, площадь которого наибольшая.

◀ Пусть x и y — длины полусторон прямоугольника. Т
кординаты точки, лежащей на эллипсе. Для упрощения след
уравнения эллипса:

10. [11]

197. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса
можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

◀ Если под α понимать центральный угол оставшегося се

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

Исследование этой функции от α на экстремум показывае