УДК 514.142
DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-3-12-18

В.В. Рустамян
Преподаватель,
МИРЭА – Российский технологический университет,
Россия, 119454, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78

Е.В. Баянов
Канд. ф-м. наук, доцент, зав. кафедрой,
Новосибирский государственный технический университет,
Россия, 630073, г. Новосибирск, пр-т Карла Маркса, д. 20

Р.Б. Славин
Канд. техн. наук, доцент,
Астраханский государственный технический университет,
Россия, 414056, Астрахань, ул. Татищева, 16

Синтетическое представление преобразования «косая симметрия» на примере преобразования эллипса

Аннотация. Геометрические преобразования играют ключевую роль в компьютерной графике, определяя положение и форму объектов. В машинном обучении они применяются для обработки и анализа данных, например, в изображениях. В геометрическом моделировании поверхностей они используются для создания и трансформации трехмерных форм. В физике геометрические преобразования помогают описывать движение объектов в пространстве и времени.

Цель данной работы заключается в анализе и исследовании геометрического преобразования, известного как «косая симметрия». Главным образом, статья стремится раскрыть ряд важных свойств данного преобразования, расширяя область знания перспективно-аффинного соответствия.

На протяжении исследования выявляются главные направления косой симметрии и устанавливается их взаимосвязь с осью и направлением преобразования. Важно подчеркнуть, что в результате анализа становится очевидным, что ось и направление симметрии равнозначны и взаимозаменяемы. Дополнительно в статье решается задача преобразования произвольного эллипса, заданного его полуосями, в равновеликий по площади круг. В этом контексте предлагается метод определения оси и направления косой симметрии для заданного эллипса.

Основываясь на полученных результатах и анализе, авторами предлагается геометрический алгоритм, который предоставляет возможность решения позиционных задач в области начертательной геометрии. Этот алгоритм также представляет собой новый метод для построения эллипсов с заданными полуосями, что имеет практическое значение в различных инженерных и геометрических задачах.

В завершение статьи приводится конкретный пример применения разработанного метода, что наглядно демонстрирует его практическую ценность и реальные возможности в решении позиционных задач в области начертательной геометрии. Также предполагаются направления дальнейшего исследования в области формообразования, применяя преобразование «косая симметрия» в пространствах R^2 и R^3.

Ключевые слова: аффинное соответствие, преобразование «косая симметрия», позиционные задачи, геометрические преобразования, коники, начертательная геометрия.

V.V. Rustamyan
Teacher,
MIRAE – Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

E.V. Bayanov
Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Head of Chair,
Novosibirsk State Technical University,
20, Karl Marx Ave., Novosibirsk, 630073, Russia

R.B. Slavin
Ph.D. of Engineering, Associate Professor,
Astrakhan State Technical University,
16, Tatishcheva st., Astrakhan, 414056, Russia

Synthetic Representation of the "Oblique Symmetry" Transformation Using the Example of an Ellipse

Abstract. Geometric transformations play a pivotal role in computer graphics, determining the position and shape of objects. In machine learning, they are applied for processing and analyzing data, such as in images. In geometric surface modeling, they are utilized for the creation and transformation of three-dimensional forms. In physics, geometric transformations assist in describing the motion of objects in space and time.

The aim of this work is to analyse and study the geometric transformation known as "oblique symmetry." Primarily, the article seeks to elucidate a number of important properties of this transformation, expanding the field of knowledge in perspective-affine correspondence.

Throughout the study, the principal directions of oblique symmetry are identified, and their relationship with the axis and direction of the transformation is established. It is crucial to emphasise that the analysis makes it evident that the axis and the direction of symmetry are equivalent and interchangeable. Additionally, the article addresses the challenge of transforming an arbitrary ellipse, defined by its semi-axes, into a circle of equal area. In this context, a method is proposed to determine the axis and direction of oblique symmetry for a given ellipse.

Based on the results obtained and the analysis conducted, the authors propose a geometric algorithm that provides the capacity to resolve positional problems in the field of descriptive geometry. This algorithm also offers a novel method for constructing ellipses with given semi-axes, which holds practical significance in various engineering and geometric issues.

In the conclusion of the article, a specific example of applying the developed method is provided, clearly demonstrating its practical value and real capabilities in solving positional problems in the field of descriptive geometry. Moreover, directions for future research in the field of shape formation are suggested, utilising the "oblique symmetry" transformation in the spaces R^2 and R^3.

Keywords: affine correspondence, oblique symmetry transformation, positional problems, geometric transformations, conics, descriptive geometry.

Введение

Изучение геометрических преобразований представляет собой фундаментальную задачу в области формообразования поверхностей [3; 16; 22], взаимодействия человека и ЭВМ [25] и распознания окружающего мира средствами машинного обучения [26]. Новые геометрические формы имеют широкий спектр приложений в различных сферах инженерии и архитектуре [9; 14; 24], что делает их изучение актуальной и практически значимой задачей.

Целью настоящего исследования является анализ и углубленное понимание свойств преобразования, известного как «косая симметрия». В частности, в работе рассматривается синтетическое (согласно Ф.К. Клейну [12]) представление задачи, связанной с преобразованием произвольного эллипса в равновеликий по площади круг. Данный анализ направлен на обогащение теоретических знаний о данном геометрическом преобразовании и предоставление эффективных методов для решения позиционных задач в начертательной геометрии [2; 17].

Также в статье приведен конкретный пример решения одной из позиционных задач, чтобы продемонстрировать практическую применимость предложенного метода.

Рисунки для статьи выполнялись в САПР КОМПАС-3*D*.

Постановка задачи исследования

Целями данного исследования являются:

a) разработка геометрического алгоритма для обратной задачи преобразования «косая симметрия»;
b) демонстрация потенциала разработанного алгоритма при решении позиционных задач начертательной геометрии.

Теоретические выкладки

Одними из определяющих инвариантных свойств аффинного преобразования являются сохранение параллельности прямых и простое отношение трех точек [11]. Следует отметить, что окружность и эллипс в аффинной геометрии являются эквивалентными объектами. Но в нашем исследовании мы будем пользоваться понятиями «окружность» и «эллипс» из евклидова пространства.

1. Приведем некоторые инвариантные свойства перспективно-аффинного соответствия, которые потребуются в исследовании.

1.1. Отношение площадей соответственных треугольников.

На рис. 1 представлено перспективно-аффинное соответствие между плоскостями ω и ω′. Ось соответствия x расположена таким образом, что вершины A и C треугольника ABC являются двойными точками соответствия [23]. Прямая BB' задает направление соответствия. Если для соответственных треугольников ABC и $A'B'C'$ провести высоты BH и $B'H'$, то из совпадения стороны AC следует равенство:

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = k.$$

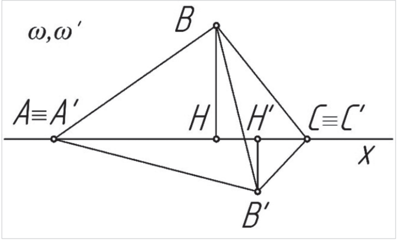

Рис. 1. Отношение площадей соответственных треугольников

1.2. Главные направления двух аффинно-соответственных плоскостей/

Рассмотрим известный способ построения главных направлений для двух аффинно-соответственных плоскостей [23]. На рис. 2 представлено перспективно-аффинное соответствие плоскостей ω и ω′, которое задается осью x и двумя соответствующими точками M и M'.

Задача: построить через точку M две прямые линии f и g, перпендикулярные друг к другу, и найти соответственные им прямые f' и g', угол между которыми также 90°.

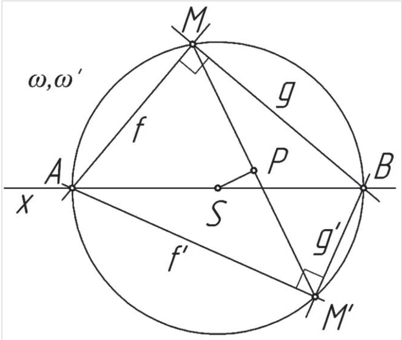

Рис. 2. Главные направления перспективно-аффинного соответствия

Решение:

Проведем отрезок MM' и срединный перпендикуляр к нему SP. Точка S лежит на оси x. Строим окружность радиусом SM. Точки пересечения окружности с осью x назовем A и B. Получим, что треугольники ΔAMB и $\Delta AM'B$ опираются на отрезок AB – диаметр окружности. Следовательно, углы при вершинах M и M' прямые, как вписанные в окружность и опирающиеся на её диаметр. Прямые f, g и соответствующие им f', g' являются главными направлениями перспективно-аффинного соответствия плоскостей ω, ω′. Заметим, что $AMBM'$ — четырехугольник с двумя прямыми углами в точках M и M'.

В случае прямой симметрии прямая SP совпадает с осью x, что порождает бесчисленное множество главных направлений.

2. Рассмотрим преобразование «косая симметрия» и некоторые его свойства.

2.1. Косая симметрия задаётся осью соответствия x (осью симметрии) и парой соответственных точек 0 и $0''$ так, что ось симметрии делит отрезок $00''$ пополам (рис. 3).

2.2. Прямая, проходящая через соответствующие точки преобразования 0 и $0''$ есть направление симметрии j (рис. 3). Будем называть преобразование J по наименованию направления преобразования j.

2.3. Косая симметрия, как и прямая, обладает нечетной коммутативностью.

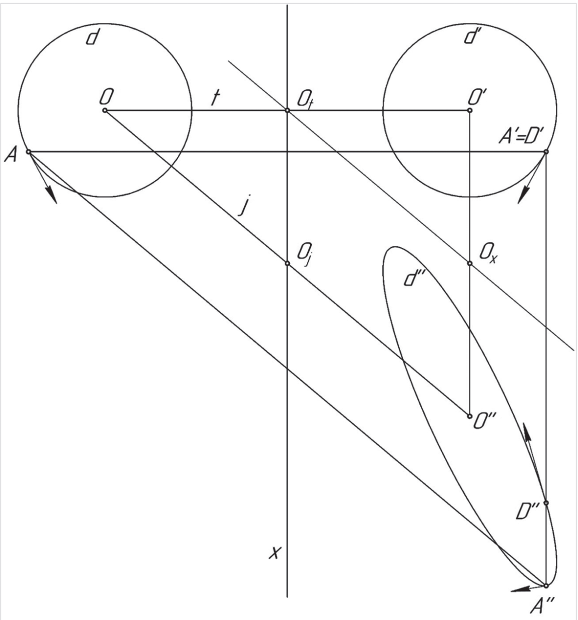

Рис. 3. Оси и направления косой симметрии

На рис. 3 представлены прямая и косая симметрии окружности d. Покажем, что направление симметрии и ось симметрии равнозначны.

Преобразование T, выполненное по направлению t относительно оси x, есть прямая симметрия. Окружность d отобразится в окружность d'. Соответственно, точка A, принадлежащая окружности d, отобразится в A'. В преобразовании J окружности d и принадлежащей ей точке A соответствует эллипс d'' и точка A''. Проведем через точку 0_x, середину отрезка $0'0''$, прямую, параллельную j. Такая прямая является средней линией треугольника $00'0''$ и пройдет через точку 0_t. Теперь мы получили преобразование X, где осью симметрии является прямая 0_t0_x, а направлением — прямая x.

Если присвоить окружности d' точку D', совпавшую с A', то при преобразовании X точки D'' и A'' не совпадут. И заданное в точке A направление движения по кривой в точках D'' и A'' становятся разнонаправленными. Следовательно, $T \cdot X \neq J$, но образы преобразования J и композиции $T \cdot X$ совпадут в эллипс d''. При этом, если добавить в композицию преобразований еще одно преобразование, например M (на рисунке не показано), то $T \cdot X \cdot M = J$. Можно сделать вывод, что преобразование «косая симметрия» обладает нечетной коммутативностью.

2.4. Направление симметрии и ось симметрии равнозначны.

Из рис. 3 видно, что для эллипса d'' преобразования X и J дают идентичный результат в виде окружности. Направлением в преобразовании X является x, а осью симметрии — j. В случае с J — наоборот. Можно утверждать, что направление и ось симметрии равнозначны.

2.5. Главные направления косой симметрии являются биссектрисами между осью и направлением симметрии.

Построим главные направления для косой симметрии J (рис. 4). Построение осуществляется аналогично п. 1.2. В случае косой симметрии отрезок SP выродится в точку 0_j. Так как все углы четырехугольника $AMBM'$ опираются на диаметры одной окружности, то главные направления образуют прямоугольник $AMBM'$.

Известно, что сопряженные диаметры эллипса являются ортогональными друг другу, только если они являются осями эллипса. Главные направления аффинно-перспективного соответствия являются инвариантом (т.е. единственные направления, в которых углы в соответствующих точках прямые п. 1.2). Следовательно, главные направления косой симметрии – оси эллипса d''.

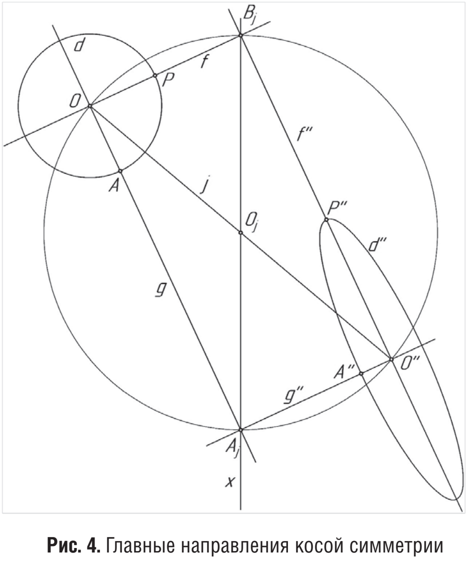

Рис. 4. Главные направления косой симметрии

Если стороны f и g прямоугольника $0B_j0''A_j$ переместить параллельным переносом в точку 0_j, то из свойств прямоугольника станет очевидным, что f и g являются биссектрисами диагоналей прямоугольника j и x.

Заметим, что точки A и P соответствуют точкам A'' и P'' из-за принадлежности соответствующим главным направлениям преобразования.

2.6. Отношение площадей двух соответственных фигур равно единице.

Из п. 1.1 и рассуждений в п. 2.5 можно сделать вывод, что площади треугольников $0B_jA_j$ и $0''B_jA_j$ равны. Соответственно, для любой произвольной фигуры площади прообраза и образа будут равны.

3. Графическое представление арифметических действий умножения и извлечения квадратного корня.

Системой отсчета для графического выполнения математических действий являются две ортогональные пересекающиеся прямые y и y', пересекающиеся в точке 0 и масштабная единица $0P$ [4].

3.1. *Умножение*

Зададим два отрезка $0A$ и $0Q$, произведение длин которых требуется получить (рис. 5). Проведем отрезок PQ. Через точку A проведем прямую, параллельную PQ. Получим на прямой y' точку B. Результат произведения $0A \cdot 0Q = 0B$.

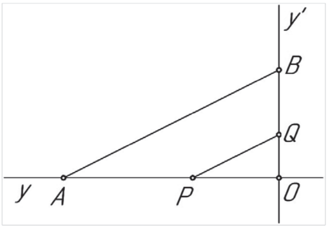

Рис. 5. Умножение

3.2. *Извлечение квадратного корня*

Зададим отрезок $0A$ (значение, из которого извлекается корень) в обратную сторону от масштабной единицы $0P$ (рис. 6). Находим точку M – середину отрезка PA и проводим окружность с центром в точке M радиусом MA. Отрезок $0B = \sqrt{0A}$ есть результат операции.

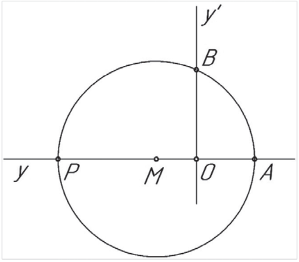

Рис. 6. Вычисление корня квадратного

Результат

Задача: произвольный эллипс задается полуосями $0P$ и $0A$. Найти направление и ось «косой симметрии», при которых образом эллипса окажется равновеликий по площади круг.

1. *Определение радиуса круга*

На рис. 7 рассмотрим эллипс с полуосями $0P$ и $0A$ (сейчас и в последующих случаях эллиптическая кривая изображена для наглядности и в построении не участвует). Воспользуемся инвариантом площадей симметричных фигур (п. 2.6). Обратимся к известным формулам определения площади круга и эллипса: $S_{\text{кр}} = \pi r^2$ и $S_{\text{э}} = \pi ab$. Приравняем правые части этих выражений и выразим радиус круга: $r = \sqrt{ab} = \sqrt{0P \cdot 0A}$. Получим, что радиус круга задается квадратным корнем из произведения полуосей эллипса. Поэтапно выполним операции умножения и извлечение корня.

Применим действия из пункта 3.1. Для удобства примем за масштабную единицу отрезок $0P$. Отрезок $0A = 0P \cdot 0A$ является произведением отрезков.

Применим действия из пункта 3.2 для извлечения квадратного корня из отрезка $0A$ с той же масштабной единицей $0P$. Результатом будет $0B$ – радиус круга, равновеликого заданному эллипсу.

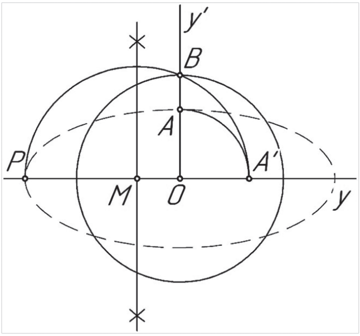

Рис. 7. Определение радиуса круга

2. *Определение направления и оси симметрии*

На рис. 8 прямая, проходящая через соответствующие точки P и B (п. 2.5), задает ось (или направление) симметрии (п. 2.4). Проведем прямую x параллельно PB через точку 0 и определим ее осью симметрии. Тогда направление симметрии j получим зеркальным отражением x относительно любой оси эллипса (п. 2.5). Точки D_j и C_j являются двойными точками преобразования.

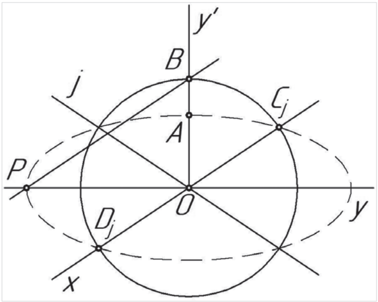

Рис. 8. Ось и направление симметрии

Обсуждение результатов

Применим результаты исследования для решения позиционных задач [20].

Задача: построить точки K и M пересечения эллипса, заданного полуосями $0P$ и $0A$, и прямой m.

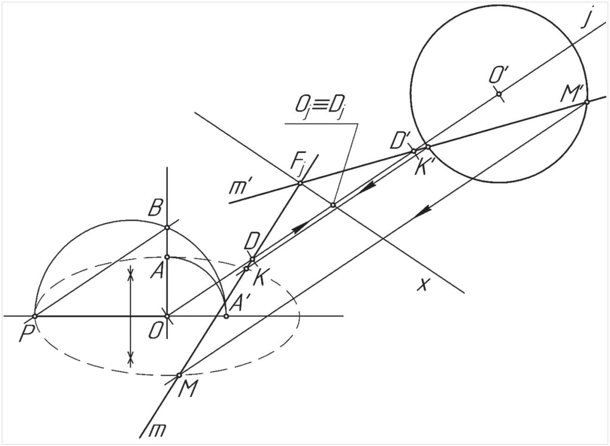

Рис. 9. Решение задачи пересечения прямой и эллипса с помощью косой симметрии

На рис. 9 задан эллипс с полуосями $0P$ и $0A$ и прямая m. Применяя результат исследования, найдем радиус окружности $0B$ и направление преобразования PB, назовем j. Осью преобразования x будет прямая PB, отраженная относительно любой оси эллипса и параллельно перемещенная в удобное для построения положение.

Строим окружность с центром $0'$. Через точку 0 проводим направление j и через точку пересечения оси и направления симметрии 0_j строим окружность радиусом $0j0$, которая задаст на прямой j точку $0'$. Проводим окружность радиусом $0B$.

Построим симметрию прямой m. F_j — точка пересечения прямой m и оси x есть двойная точка преобразования. Возьмём еще одну точку на прямой m. Для удобства построений возьмём точку D на прямой $00'$. Через отражённую D' и F_j строим прямую m' и находим ее пересечение с окружностью в точках K' и M'. Найденные точки преобразуются в точки K и M и являются искомыми точками пересечения прямой m и эллипса.

Выводы

Разработанный геометрический алгоритм позволяет решить определенный круг позиционных задач начертательной геометрии и является еще одним методом построения эллипса, заданного полуосями [18; 21]. Использование данного алгоритма расширяет набор инструментов и возможностей студентов в подготовке к олимпиадам по начертательной геометрии [6; 7; 19; 20].

Преобразование «косая симметрия» как частный случай аффинного соответствия, представляет собой ценный инструмент в проектировании технических поверхностей [10; 13; 15]. Мы предполагаем возможность кососимметричного преобразования объектов в пространстве R^3 относительно плоскости симметрии для получения поверхностей с новыми свойствами. Также возможно применение данного преобразования к поверхностям, образованным кониками, в каждом плоском сечении с заданием закона [1; 5; 8] (например, положение оси и направления симметрии относительно центров окружностей циклической поверхности).

Литература

1. *Антонова И.В.* Математическое описание частного случая квазивращения фокуса эллипса вокруг эллиптической оси [Текст] / И.В. Антонова, Е.В. Соломонова, Н.С. Кадыкова // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 39–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-39-45
2. *Баянов Е.В.* Двумерное пространство, как основа геометрических построений [Текст] / Е.В. Баянов // Актуальные научные исследования в современном мире. — 2020. — № 8-1. — С. 122–124.
3. *Беглов И.А.* Формообразование поверхностей квазивращения n-ого порядка [Текст] / И.А. Беглов // Проблемы машиноведения: материалы IV Международной научно-технической конференции / научный редактор П.Д. Балакин. — Омск: Изд-во Омского государственный технического университета, 2020. — С. 419–426.
4. *Бермант А.Ф.* Геометрический справочник по математике (Атлас кривых). Ч. 1. [Текст] / А.Ф. Бермант. — М.-Л.: ОНГИЗ НКТП, 1937. — 209 с.
5. *Бойков А.А.* Создание компьютерных моделей динамических каналовых поверхностей с помощью языка геометрических построений / А.А. Бойков // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2022. — Т. 19. — № 10. — С. 15–29. — DOI: 10.14489/vkit.2022.10.pp.015-029
6. *Боровиков И.Ф., Иванов Г.С.* Геометрические преобразования в инженерной геометрии [Электронный ресурс] // Наука и образование. — 2015. — № 5. — С. 334–347. — DOI 10.7463/0515.0770568 — URL: http://www.elibrary.ru/download/elibrary_23850017_95813882.pdf (дата обращения: 13.09.2023).
7. *Вышнепольский В.И.* Методические системы подготовки и проведения олимпиад и развития интеллектуальных способностей студентов в РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, Н.С. Кадыкова, А.В. Ефремов,

К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2023. — Т. 11. — № 1. — С. 44–60. — DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-44-60

8. *Грязнов Я.А.* Математическая модель отсека каналовой поверхности, заданной дискретным каркасом образующих [Текст] / Я.А. Грязнов // Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. — 2013. — № 3. — С. 193–195.
9. *Грязнов Я.А.* Отсек каналовой поверхности как образ цилиндра в расслояемом образовании [Текст] / Я.А. Грязнов // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 1. — С. 17–19. — DOI: 10.12737/463
10. *Иванов Г.С.* Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований) [Текст] / Г.С. Иванов. — М.: Машиностроение, 1987. — 192 с.
11. *Иванов Г.С.* Теоретические основы начертательной геометрии [Текст] / Г.С. Иванов. — М.: Машиностроение, 1988. — 158 с.
12. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей [Текст] / Ф. Клейн: В 2 т. Т. 2. Геометрия. — М.: Наука, 1987. — 416 с.
13. *Кокарева Я.А.* Конструирование каналовых поверхностей с переменной образующей и плоскостью параллелизма на основе эквиаффинных преобразований плоскости [Текст] / Я.А. Кокарева // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 1. — С. 12–20. – DOI: 10.12737/25119
14. *Короткий В.А.* Кривые второго порядка в задачах формообразования архитектурных оболочек [Текст] / В.А. Короткий, Е.А. Усманова // Известия вузов. Серия «Строительство». — 2014. — № 9-10. — С. 101–107.
15. *Лепаров М.Н.* О геометрии, еще один раз [Текст] / М.Н. Лепаров // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 3–13. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13
16. *Панчук К.Л.* Циклические поверхности, сопровождающие нелинейчатые квадрики вращения [Текст] / К.Л. Панчук, Т.М. Мясоедова, Е.В. Любчинов // Омский научный вестник. — 2023. — № 3. — С. 23–29. — DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29
17. *Сальков Н.А.* Геометрическое моделирование и начертательная геометрия [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 31–40. — DOI: 10.12737/22841
18. *Сальков Н.А.* Об одном способе формирования коник [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12
19. *Сальков Н.А.* Олимпиады по начертательной геометрии как катализатор эвристического мышления [Текст] / Н.А. Сальков, В.И. Вышнепольский, В.М. Аристов, В.П. Куликов // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 2. — С. 93–101. — DOI: 10.12737/article_5953f3767b1e80.12067677
20. *Сальков Н.А.* Системный подход к изучению начертательной геометрии [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 14–23. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-14-23
21. *Сальков Н.А.* Эллипс: касательная и нормаль [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 1. — С. 35–37. — DOI: 10.12737/470
22. *Страшнов С.В.* Велароидальные оболочки и оболочки велароидального типа [Текст] / С. В. Страшнов // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 11–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19
23. *Четверухин Н.Ф.* Высшая геометрия [Текст] / Н.Ф. Четверухин. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Наркомпроса РСФСР, 1939. — 296 с.
24. *Beglov I.A.* Application of quasi-rotation surface segments in architectural prototyping [Text] / I.A. Beglov, V.V. Rustamyan, R.A. Verbitskiy // Journal of Physics: Conference Series: 15, Virtual, Online, 09–11 ноября 2021. Virtual, Online, 2022, p. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/2182/1/012002
25. *Shizawa Masahiko*. Discrete invertible affine transformations / Shizawa Masahiko // 1990, v. 2, pp. 134–139, 10.1109/ICPR.1990.119343
26. *Zheng Weiwei.* Two-Step Affine Transformation Prediction for Visual Object Tracking / Zheng Weiwei, Yu Huimin, Lu Zhaohui // IEEE Access, 2021, pp. 1-1, 10.1109/ACCESS.2021.3056469

References

1. Antonova I.V. Solomonova E.V., Kadykova N.S. Matematicheskoye opisaniye chastnogo sluchaya kvazivrashcheniya fokusa ellipsa vokrug ellipticheskoy osi [Mathematical description of the special case of quasi-rotation of the focus of an ellipse around the elliptic axis]. *Geometriya i grafika* [Geometriya i grafika]. 2021, v. 9, i. 1, pp. 39–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-39-45 (in Russian)
2. Bayanov E.V. Dvumernoe prostranstvo, kak osnova geometricheskih postroenij [Two-dimensional space as the basis of geometric constructions]. *Aktual'ny'e nauchny'e issledovaniya v sovremennom mire* [Current scientific research in the modern world], 2020, i. 8-1, pp. 122–124. (in Russian)
3. Beglov I.A. Formoobrazovanie poverhnostej kvazivrashheniya n-ogo poryadka [Formation of surfaces of quasi-rotation of the nth order]. *Problemy mashinovedeniya: materialy IV Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii* [Problems of mechanical engineering: materials of the IV International Scientific and Technical Conference]. Omsk, Omskij gosudarstvenny`j tehnicheskij universitet, 2020, pp. 419–426. (in Russian)
4. Bermant A.F. *Geometricheskiy spravochnik po matematike (Atlas krivykh). CH. 1.* [Geometric reference to mathematics (Atlas of curves). Part 1]. Moskov-Leningrad, ONGIZ NKTP Publ., 1937, 209 p. (in Russian)
5. Bojkov A.A. Sozdanie komp`yuterny`h modelej dinamicheskih kanalovy`h poverhnostej s pomoshh`yu yazy`ka ge-

ometricheskih postroenij [Creation of computer models of dynamic channel surfaces using a language of geometric constructions]. *Vestnik komp`yuterny`h i informacionny`h tehnologij* [Bulletin of Computer and Information Technologies]. 2022, v. 19, i. 10, pp. 15–29. DOI 10.14489/vkit.2022.10.pp.015-029 (in Russian)

6. Borovikov I.F., Ivanov G.S. Geometricheskie preobrazovaniya v inzhenernoj geometrii [Geometric transformations in engineering geometry]. *Nauka i obrazovanie* [Science and education], 2015, i. 5, pp. 334–347. DOI: 10.7463/0515.0770568 URL: http://www.elibrary.ru/download/elibrary_23850017_95813882.pdf (accessed 13 September 2023). (in Russian)
7. Vy`shnepol`skij V.I., Kadykova N.S., Efremov A.V., Egiazaryan K.T. Metodicheskie sistemy` podgotovki i provedeniya olimpiad i razvitiya intellektual`ny`h sposobnostej studentov v RTU MIRE`A [Methodological systems for preparing and conducting Olympiads and developing the intellectual abilities of students at RTU MIREA]. *Geometriya i grafika* [Geometriya i grafika]. 2023, v. 11, i. 1, pp. 44–60. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-44-60 (in Russian)
8. Gryaznov Ya.A. Matematicheskaya model` otseka kanalovoj poverhnosti, zadannoj diskretny`m karkasom obrazuyushhih [Mathematical model of a channel surface compartment defined by a discrete frame of generatrices]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa — Lesnoj vestnik* [Bulletin of the Moscow State Forestry University — Forest Bulletin], 2013, i. 3, pp. 193–195.
9. Gryaznov Ya.A. Otsek kanalovoj poverhnosti kak obraz cilindra v rassloyaemom obrazovanii [Channel surface compartment as an image of a cylinder in a layered formation]. *Geometriya i grafika* [Geometriya i grafika], 2013, v. 1, i. 1, pp. 17–19. DOI: 10.12737/463 (in Russian)
10. Ivanov G.S. *Konstruirovanie tehnicheskih poverhnostej (matematicheskoe modelirovanie na osnove nelinejny`h preobrazovanij)* [Design of technical surfaces (mathematical modeling based on nonlinear transformations)]. Moscow, Mechanical engineering Publ., 1987, 192 p. (in Russian)
11. Ivanov G.S. *Teoreticheskie osnovyi nachertatelnoy geometrii* [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. Moscow, Mechanical engineering Publ., 1988. 157 p. (in Russian)
12. Klejn F. *Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshej* [Elementary Mathematics from the Point of View of Higher]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 416 p. (in Russian)
13. Kokareva YA.A. Konstruirovaniye kanalovykh poverkhnostey s peremennoy obrazuyushchey i ploskost'yu parallelizma na osnove ekviaffinnykh preobrazovaniy ploskosti [Constructing channel surfaces with a variable generatrix and a plane of parallelism based on equiaffine transformations of the plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2017, v. 5, i. 1, pp. 12–20. DOI: 10.12737/25119 (in Russian)
14. Korotkij V.A., Usmanova E.A. Krivy`e vtorogo poryadka v zadachah formoobrazovaniya arhitekturny`h obolochek [Second-order curves in problems of shaping architectural shells]. *Izvestiya VUZov. Seriya "Stroitel`stvo"* [News of universities. Series "Construction"], 2014, i. 9–10, pp. 101–107.
15. Leparov M.N. O geometrii, eshhe odin raz [About geometry, one more time]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2022, v. 10, i. 1, pp. 3–13. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13 (in Russian)
16. Panchuk K.L., Myasoedova T.M., Lyubchinov E.V. Tsiklicheskiye poverkhnosti, soprovozhdayushchiye nelineychatyye kvadriki vrashcheniya [Cyclic surfaces accompanying nonlinear quadrics of revolution]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin], 2023, i. 3, pp. 23–29. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29 (in Russian)
17. Sal`kov N.A. Geometricheskoe modelirovanie i nachertatel`naya geometriya [Geometric modeling and descriptive geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2016, v. 4, i. 4, pp. 31–40. DOI: 10.12737/22841 (in Russian)
18. Sal'kov N.A. Ob odnom sposobe formirovaniya konik [About one way of forming conics]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2022, v. 10, i. 4, pp. 3–12. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12 (in Russian)
19. Sal`kov N.A., Vyshnepol`skij V.I., Aristov V.M., Kulikov V.P. Olimpiady` po nachertatel`noj geometrii kak katalizator e`vristicheskogo my`shleniya [Olympiads in descriptive geometry as a catalyst for heuristic thinking]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2017, v. 5, i. 2, pp. 93–101. DOI: 10.12737/artcle_5953f3767b1e80.12067677 (in Russian)
20. Sal`kov N.A. Sistemnyj podxod k izucheniyu nachertatel`noj geometrii [A systematic approach to the study of descriptive geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2022, v. 10, i. 1, pp. 14–23. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-14-23 (in Russian)
21. Sal'kov N.A. Ellips: kasatel'naya i normal' [Ellipse: Tangent and Normal]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2013, v. 1, i. 1, pp. 35–37. DOI: 10.12737/470 (in Russian)
22. Strashnov S.V. Velaroidal`nye obolochki i obolochki velaroidal`nogo tipa [Velaroids and Velaroids]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2022, v. 10, i. 2, pp. 11–19. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19 (in Russian)
23. Chetveruhin N.F. *Vysshaya geometriya* [Higher geometry]. Moscow, Publ., Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe izdatel`stvo Narkomprosa RSFSR Publ., 1939. 296 p. (in Russian)
24. Beglov I.A., Rustamyan V.V., Verbitskiy R.A. Primeneniye segmentov poverkhnosti kvazivrashcheniya v arhitekturnom prototipirovanii [Application of quasi-rotation surface segments in architectural prototyping]. *Fizicheskiy zhurnal: seriya konferentsiy* [Journal of Physics: Conference Series]. 15, Virtual, Online, 09–11 ноября 2021. Virtual, Online, 2022. P. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/2182/1/012002 (in Russian)
25. Shizawa Masahiko. Discrete invertible affine transformations Shizawa Masahiko, 1990, v. 2, pp. 134–139. 10.1109/ICPR.1990.119343.
26. Zheng Weiwei. Two-Step Affine Transformation Prediction for Visual Object Tracking Zheng Weiwei, Yu Huimin, Lu Zhaohui IEEE Access, 2021, pp. 1-1, 10.1109/ACCESS.2021.3056469