Базовые методы решения олимпиадных задач по математике

Basic methods for solving Olympiad problems in mathematics

Сопуев У.А.
Канд. физ.-мат. наук, доцент, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош
e-mail: usopuev@oshsu.kg

Sopuev U.A.
Ph.D., Associate Professor, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh
e-mail: usopuev@oshsu.kg

Келдибеков Э.Н.
Магистр, преподаватель, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош
e-mail: keldibekov@oshsu.kg

Keldibekov E.N.
Master’s Degree, teacher, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh
e-mail: keldibekov@oshsu.kg

Үсөн кызы Мээрим
Магистрант, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош

Uson kyzy Meerim
Master's Degree Student, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh

Вахабова З.Ф.
магистрант, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош
e-mail: vzilolbibi@gmail.com

Vakhabova Z.F.
Master's Degree Student, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh
e-mail: vzilolbibi@gmail.com

Абдрахманова А.А.
Магистрант, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош
e-mail: fmomabdrakhmanova@gmail.com

Abdrakhmanova A.A.
Master's Degree Student, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh
e-mail: fmomabdrakhmanova@gmail.com

Ташполотова Э.
Магистрант, Ошский государственный университет, Кыргызстан, г. Ош
e-mail: tashpolotovaelnura1@gmail.com
Tashpolotova E.
Master's Degree Student, Osh State University, Kyrgyzstan, Osh
e-mail: tashpolotovaelnura1@gmail.com

Аннотация
В статье изучается понятие олимпиадной задачи по математике, ее объективная и субъективные характеристики. Анализируются отдельные базовые методы решения олимпиадных задач по математике, такие как: индукция, принципы Дирихле и крайнего, инварианты и полуинварианты, раскраска, доказательство от противного, методы решения задач с параметром. Сделаны выводы о том, что своевременная консультация учителя при обучении решению олимпиадной задачи заключается в том, чтобы подвести их к применению ассоциативного опыта учеников. В методах решения олимпиадных задач выделяются типичные идеи, составляющие суть задач, степень трудности субъективна.
Ключевые слова: олимпиада, задача, характеристики, методы решения, математика.

Abstract
The article studies the concept of an olympiad problem in mathematics, its objective and subjective characteristics. Separate basic methods for solving Olympiad problems in mathematics are analyzed, such as: induction, Dirichlet and extreme principles, invariants and semi-invariants, coloring, proof by contradiction, methods for solving problems with a parameter. It is concluded that timely consultation with teachers when teaching how to solve an Olympiad problem is to lead them to the use of students' associative experience. In the methods of solving Olympiad problems, typical ideas that form the essence of the problems are highlighted; the degree of difficulty is subjective.
Keywords: Olympiad, problem, characteristics, solution methods, mathematics.

Введение. Решение математической задачи требует мыслительного поиска, раскрытия свойств и отношений между математическими понятиями. Олимпиадные задачи в математике — особый вид математических задач, средствами её решения выступают интуиция и догадка, эрудиция и владение методами математики. Понятие *«Олимпиадные задачи»* применяется для обозначения круга нестандартных задач, в решении которых применяется оригинальный подход. *Сложность олимпиадной задачи* – это объективная характеристика задачи, определяемая ее структурой [22; 23]. Сложность задачи зависит от: объема информации (числа понятий, суждений и т.п.), необходимого для ее решения; числа данных в задаче;° числа связей между ними; ° количества возможных выводов из условия задачи; длины рассуждений при решении задачи; общего числа шагов решения, привлеченных аргументов и т.д.

Трудность олимпиадной задачи – субъективная характеристика задачи [22; 23], определяется в зависимости от: сложности задачи;° времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте задачи (задачи на материал, изученный 1-2 года назад, используемые забытые факты); ° практики в решении подобного рода задач; уровня математического и интеллектуального развития ученика; ° возраста учащегося.

Изучение методов решения олимпиадных задач способствует развитию компетентной личности, обладающей математической компетентностью и такими характеристиками, как настойчивость, инициатива, самостоятельность. Учебные пособия Ю.М. Колягина, В.А. Оганесяна [20], И.Б. Бекбоева [2] могут быть использованы учителями при обучении школьников умениям решать олимпиадные задачи. Принципы разработки олимпиадных задач исследовались в [5; 12; 26]. В исследованиях [4; 12; 14; 15; 18; 19; 23] изучались аспекты формирования видов мышления, в [6] описываются методы решения олимпиадных задач по геометрии, в [13; 17; 27; 30] авторы исследуют применение метода математической индукции, тригонометрии, абсолютной величины числа, задач с параметрами в олимпиадных задачах по математике. В ходе изучения учебной литературы мы выявили классификацию олимпиадных задач по методам решения: индукция; принцип Дирихле;

принцип крайнего; инварианты и полуинварианты; вспомогательная раскраска; доказательство от противного; методы решения задач с параметром и др. Умение подбирать вспомогательные задачи свидетельствует о том, что учащийся уже владеет определенным запасом различных приемов решения задач. Если этот запас не очень большой, то учитель, видя затруднения учащегося, может предложить вспомогательные задачи, которые помогут понять идею решения.

Авторы отмечают, что для приобретения навыков решения сложных задач следует приучать школьников больше внимания уделять изучению полученного решения. Для этого полезно предлагать учащимся видоизменять условие задачи, придумывать задачи, аналогичные решенным, более или менее трудные, с использованием найденного при решении основной задачи способа решения [24; 29]. Умение учащихся составлять нестандартные задачи, решаемые нестандартными способами, свидетельствует о культуре их мышления, хорошо развитых математических способностях. Все авторы, исследовавшие вопросы воспитания творческой активности учащихся в процессе изучения ими математики, единодушно признают олимпиадные задачи важным средством повышения интеллектуального уровня учащихся, способствующим повышению интереса учащихся и мотивации участия в олимпиадах.

Рассмотрим отдельные, наиболее часто применяемые, методы решения олимпиадных задач.

1. Доказательство от обратного (противного) - один из часто используемых методов в доказательстве. Его принцип состоит в том, что доказательство суждения (тезиса) осуществляется через опровержение противоречащего ему суждения (антитезиса). Опровержение антитезиса достигается установлением факта того, что он не совместим с каким-то уже заведомо истинным суждением.

2. Метод математической индукции - один из основных методов доказательства как в алгебраических, так и геометрических задачах. Смысл его состоит в следующем: пусть дана последовательность утверждений A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., где $n \in N$ [21]. Утверждения будут истинными при условии доказательства:

1) базы индукции, т.е. доказывается истинность утверждения A_1;

2) перехода, т.е. если для любого $n \in N$ будет доказано, что если утверждение A_n - верно, то верно и утверждение A_{n+1}.

3. Принцип Дирихле, как одна из форм метода от противного, эффективный и универсальный метод решения задач, состоит в следующем: если A элементов разбиты на a групп, причем $A > a$, то хотя в одной группе будет находиться более одного элемента ($A, a \in N$).

Принцип сформулирован немецким математиком Дирихле следующим образом: «Если в n клетках сидит m зайцев и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят более одного зайца». Главная цель и самый трудный этап в решении подобных задач - определение "зайцев" и "клеток". Ценность рассматриваемого метода в неконструктивности доказательства (невозможно точно указать, в какой именно клетке находятся более одного зайца) в отличие от конструктивного, когда нужно идти путем полного построения или явно указывать искомый объект, что приводит к трудности в решении и затратам времени.

4. Метод раскраски эффективно применяется при решении игровых и шахматных задач: раскрасив некоторые, фигурирующие в задаче ключевые элементы в несколько цветов, выясняется, что будет происходить, если выполнить условие задачи. Раскраска помогает значительно упростить понимание процесса, который описывается в условии, приводя к правильному решению.

5. Метод инвариантов основан на идее четности и нечетности.

При решении некоторых математических задач применяется совокупность преобразований искомого объекта и требуется, основываясь на данных преобразованиях, получить из одного состояния объекта другое. С помощью перебора вариантов возможно убедиться в правомерности ответа “нельзя”, однако доказательство правильности полученного результата останется сложным. Дадим определение и свойства инварианта.

Инвариантом называем некий объект (число, набор чисел, четность какого-либо числа), который не меняется в преобразованиях. Свойства инварианта основаны на определении абстрактного понятия четности числа, чисел «разной четности» и свойстве: при прибавлении единицы четность чисел изменяется.

1°. Если значение инварианта в двух состояниях объекта различно, то одно из них нельзя получить из другого: например, четность (нечетность) чисел и остаток от деления.

При использовании принципа четности и нечетности полезны утверждения:

1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

2. Знак произведения нескольких чисел, отличных от 0, определяется четностью количества отрицательных множителей [3].

Решения задач-головоломок с использованием четности и нечетности чисел требуют логической безупречности и обоснованности выводов, основанных на простейших свойствах арифметических операций сложения и вычитания. Приведем основные правила четности:

° Сумма четных слагаемых - четна.

° Если число нечетных слагаемых четно, то и сумма четна.

° Если сумма двух чисел - четна, то их разность тоже четное число.

° Если сумма двух чисел - нечетна, то их разность тоже нечетна.

° Если число нечетных слагаемых нечетно, то и сумма нечетна.

Если один из множителей - четное число, то и произведение четно.

Если все множители нечетны, то и произведение нечетно.

6. Методы решения задач с параметром.

По определению «Параметр (гр. Parametron - отмеривающий) – математическая величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи [30]. Постоянные величины $a, b, c, \ldots k$ называются параметрами, а сами задания называются «заданиями, содержащими параметры», например уравнение (неравенство) с параметрами.

Решить задачу с параметром – значит указать, при каких значениях параметров существуют решения и найти их.

Основные типы задач с параметрами представляют собой уравнения и неравенства, которые надо:

- решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

- необходимо определить количество решений в зависимости от значения параметра.

- требуется найти все значения параметра, при которых указанные уравнения (неравенства) имеют заданное число решений (или не имеют решений, или имеют бесконечно много решений).

- при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения. Выделяются *основные методы решения задач с параметром:*

I. Аналитический способ является наиболее трудным. При решении уравнений (неравенств) с параметрами применяются алгебраические преобразования и рассуждения.

II. Графический способ - наиболее понятный, наглядный способ решения. Суть его заключается в том, что в зависимости от задачи (с переменной x и параметром а) рассматриваются графики, построенные в координатных плоскостях $(x;\ y)$ либо $(x;\ a)$. Применение метода требует знания элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических), их свойств и графиков. Использование графического способа позволяет найти решение задачи схематически.

В учебных планах вузов эта тема в курсе дисциплины «Математика» изучается одной из первых [1]. Поэтому можно предложить студентам при решении задач графическим способом, провести наблюдение и прийти к наглядному выводу, что если в правой и левой части уравнения (неравенства) находятся функции разных типов [25], то можно утверждать, что решение аналитическим способом такой задачи бессмысленно, лучше сразу создать графическую иллюстрацию задания.

III. Решение относительно параметра. При применении способа переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После упрощающих преобразований возвращаются к исходному смыслу переменных x и a, получают решение.

С методами решения задач городского, областного этапов Республиканской олимпиады по математике, проводимых для школьников Кыргызской Республики, можно ознакомиться в работах [7; 8; 9; 10; 11], с критериями оценки их решения в [9; 10; 11; 16; 28].

Выводы

Решения олимпиадных задач отличаются уникальностью, тем не менее можно выделить типичные идеи, раскрывающие суть задач. Сложная задача объективно является более трудной для учащихся, а вот степень ее трудности субъективна.

Универсального метода, позволяющего решить олимпиадную задачу, нет, тем не менее в учебной и научно-методической литературе выявлены базовые методы их решения: индукция; принцип Дирихле; принцип крайнего; инварианты и полуинварианты; вспомогательная раскраска; доказательство от противного; методы решения задач с параметром и др.

Опыт работы многих передовых учителей, добивающихся хороших результатов в математическом развитии учащихся как в Кыргызстане, так и за рубежом, позволяет утверждать, что обучение учащихся самостоятельному решению олимпиадных задач основывается на применении имеющегося опыта решения задач. Следовательно, чем больше разных олимпиадных задач будут решены, тем успешнее будет результат.

Литература

1. Байсалов Д.У., Келдибекова А.О. Обучение бакалавров, будущих учителей математики, подготовке школьников к математическим олимпиадам на занятиях дисциплины по выбору// Современные проблемы науки и образования. 2017. № 5. С. 275.
2. Бекбоев И.Б. Задачи с практическим содержанием как средство раскрытия содержательно–прикладного значения математики
3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров: "АСА", 1994.
4. Келдибекова А.О. Решение нестандартных задач по математике как средство формирования творческого мышления учащихся школ // Известия Кыргызской академии образования. 2015. № 4 (36). С. 113-118.
5. Келдибекова А.О. О предметном содержании математических олимпиад школьников // Перспективы науки и образования. 2020. № 4 (46). С. 269-282.
6. Келдибекова А.О., Селиванова Н.С. Олимпиадные задания по геометрии, методические приемы их решения // Профильная школа. 2019. Т. 7. № 4. С. 34-37.
7. Келдибекова А.О. Задачи республиканской олимпиады школьников по математике // Профильная школа. 2019. Т. 7. № 2. С. 43-47.

8. Келдибекова А.О. Задачи городской олимпиады школьников по математике // Журнал естественнонаучных исследований. 2019. Т. 4. № 1. С. 16-20.
9. Келдибекова А.О. Задачи заключительного этапа республиканской олимпиады 2019 г. По математике, методы и критерии оценки их решения // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. 2019. Т. 8. № 4. С. 54-59.
10. Келдибекова А.О. Методы и критерии оценки решения задач областной олимпиады школьников по математике // Международный научно-исследовательский журнал. 2020. № 5-3 (95). С. 117-122.
11. Келдибекова А.О., Комили А.Ш., Фадеева К.Н. Методы и критерии оценки решения задач областной олимпиады школьников по математике 2021 года // в сборнике: психодидактика высшего и среднего образования. Материалы двенадцатой всероссийской научно-практической конференции. Барнаул, 2023. С. 122-131.
12. Келдибекова А.О. Общие принципы разработки заданий математических олимпиад // Международный научно-исследовательский журнал. 2020. № 11-3 (101). С. 124-128.
13. Келдибекова А.О., Байсалов Д.У. Метод математической индукции в олимпиадных задачах по математике // Вестник Ошского государственного университета. 2020. № 1-4. С. 120- 125.
14. Келдибекова А.О., Омаралиев А.Ч. Использование математических задач для развития у младших школьников навыков исследовательской деятельности // Начальное образование. 2019. Т. 7. № 3. С. 48-50.
15. Келдибекова А.О., Омаралиев А.Ч. Использование математических задач для развития у младших школьников навыков исследовательской деятельности // Начальное образование. 2019. Т. 7. № 4. С. 43-47.
16. Келдибекова А.О. Критерии оценивания олимпиадных заданий по математике // Журнал педагогических исследований. 2019. Т. 4. № 4. С. 50-54.
17. Келдибекова А.О. Базовые принципы решения олимпиадных заданий по тригонометрии// Международный журнал экспериментального образования. 2018. № 9. С. 16-23.
18. Келдибекова А.О. Формирование логической культуры школьников посредством олимпиадной математики // Вестник Нарынского государственного университета им. С. Нааматова. 2016. № 3. С. 11-15.
19. Келдибекова А.О. Развитие творческой самостоятельности учащихся 5-6 классов посредством задач на поиск закономерностей // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2014. № 1 (28). С. 74-79.
20. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. Учись решать задачи. М.: Просвещение, 1980. 96 с.
21. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов. М.: Просвещение, 1991. 239 с.
22. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Москва: Просвещение, 1982. 96 с.
23. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наук, 1970.
24. Пойа Д. Как решать задачу. М., 1961.
25. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ. 1987.
26. Сергеев П.В. Методические аспекты построения классификатора математических задач как инструмента для подготовки и проведения внеклассной работы по математике в средней школе. М., 2005. 200 с.
27. Сопуев У.А., Келдибекова А.О. Абсолютная величина числа в задачах математических олимпиад // Профильная школа. 2020. Т. 8. № 1. С. 44-50.

28. Sopuev U.A., Keldibekova A.O. Criteria for evaluation solutions of mathematical olympiad problems // Izvestiy Oshskogo technologicheskogo university. 2020. № 2. C. 244-251.
29. Фридман Л. М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1984. С. 48.
30. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Задачи с параметрами. Ростов на Дону: Легион, 2020. 384 с.