

Обобщение и систематизация знаний в рамках подготовки к решению наиболее сложных задач ЕГЭ по математике профильного уровня

Generalization and Systematization of Knowledge in Preparation for Solving the Most Complex Problems of the USE in Mathematics at the Profile Level

Получено 11.11.2023 Одобрено 15.11.2023 Опубликовано 25.02.2024

УДК 372.851

DOI: 10.12737/1998-1740-2024-12-1-18-23

М.С. МАСКИНА,
канд. пед. наук, доцент, заместитель
начальника кафедры математики и
информационных технологий управления,
Академия ФСИН России,
г. Рязань

e-mail: mariya_maskina@mail.ru

М.И. КУПЦОВ,
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный
радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина»,
г. Рязань

e-mail: kuptsov_michail@mail.ru

M.S. MASKINA,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Deputy Head of the Department of Mathematics
and Information Technology Management,
The Academy of Law Management of the Federal
Penitentiary Service of Russia, Moscow

e-mail: mariya_maskina@mail.ru

M.I. KUPTSOV,
Ryazan State Radio Engineering University named after
V.F. Utkin, Ryazan

e-mail: kuptsov_michail@mail.ru

Аннотация. В статье обосновываются актуальность и значимость изучения элективного курса «Решение задач с параметрами» для обобщения и систематизации теоретического материала по ключевым темам школьного курса математики, а также для развития творческого мышления и приобретения опыта решения нестандартных задач повышенной сложности, содержащихся в текстах заданий профильного уровня ЕГЭ по математике. Формирование содержания курса и его апробация проводились в течение трех лет на занятиях с математически одаренными одиннадцатиклассниками и один семестр с обучающимися первого курса экономического факультета в рамках работы научного кружка. В результате проведенной работы удалось выделить основные методы решения задач с параметрами и проанализировать наиболее типичные ошибки, совершаемые обучающимися.

Ключевые слова: математическая подготовка выпускников средней школы, систематизация и обобщение, элективный курс, решение задач с параметрами.

Abstract

This article substantiates the relevance and significance of studying the elective course "Problem Solving with Parameters" for generalizing and systematizing theoretical material on key topics of the school mathematics course, as well as for developing creative thinking and gaining experience in solving non-standard problems of increased complexity contained in the texts of the profile level of the USE mathematics. The formation of the course content and its testing were carried out for three years in the classroom with mathematically gifted eleventh-graders and one semester with first-year students of the Faculty of Economics as part of the scientific circle. As a result of the work carried out, the authors managed to identify the main methods for solving problems with parameters and analyze the most common mistakes made by students.

Keywords: mathematical preparation of secondary school graduates, systematization and generalization, elective course, problem solving with parameters.

В настоящее время одной из актуальных проблем и среднего, и высшего образования является фрагментарность и дискретность материала, когда «содержание обучения «разсыпано» по множеству практически не связанных между собой учебных дисциплин» [3] или разрознено по разным темам одного учебного предмета [8]. Тотальное введение дистанционных образовательных технологий, вызванное обострением санитарно-эпидемиологической обстановки, по мнению не только авторов [5], но и таких веду-

щих педагогов, как Е.А. Ямбург [17] и А.В. Хуторской [15], только усугубило этот разрыв.

Однако для большинства обучающихся для успешного прохождения итоговой государственной аттестации за курс среднего общего образования необходимо провести повторение и обобщение ранее изученного материала по ключевым темам школьных дисциплин [10]. По мнению многих современных педагогов [4; 11; 13], показателем качества образования абитуриентов являются результаты единого государственного

Таблица 1

**Тематический план элективного курса
«Решение задач с параметрами»**

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
	Введение: Основные элементарные функции, их свойства, графики, преобразования графиков	2
	I. Повторение	10
1	Основные методы решения рациональных уравнений и неравенств. Теорема Безу и ее следствия	2
2	Основные методы решения уравнений и неравенств с модулем	2
3	Решение простейших задач с параметрами, входящих в ОГЭ 9 класса	2
4	Решение задач с параметрами с применением свойств квадратного трехчлена и его графика	4
	II. Графический метод решения задач с параметрами	14
5	Прямые	2
6	Параболы	2
7	Гиперболы	2
8	Окружности	2
9	Плоскость xOa	4
10	Метод двух функций	2
	III. Аналитический метод решения задач с параметрами	10
11	Перебор частных случаев	2
12	Сведение к квадратному уравнению	2
13	Применение свойств монотонности функций	3
	Заключение	2
14	Различные задачи	2

экзамена (ЕГЭ). Преподаватели различных вузов, например, Е.А. Бутузова [2] и Е.Г. Филиппова [14], отмечают у первокурсников 2022 г. набора отсутствие системности и существенные пробелы в математической подготовке, одной из причин возникновения которых является то, что в 2020 г. не проводилась итоговая аттестация за 9-й класс в форме основного государственного экзамена.

Для устранения указанного недостатка повторение, закрепление и обобщение ранее изученного материала лучше проводить на примере решения нестандартных заданий на факультативных, элективных курсах или в рамках кружковой работы [9]. Именно с этой целью нами был создан элективный курс «Решение задач с параметрами», содержательный материал которого в основном состоял из различных вариантов заданий, появлявшихся последние 8 лет в тестах ЕГЭ по математике профильного уровня. Данный курс прошел апробацию не только с математически одаренными одиннадцатиклассниками Рязани, стремящимися сдать профильную математику на максимальный балл, но и с курсантами первого курса экономического факультета Академии ФСИН России.

Выбор данной тематики для первокурсников обусловлен в первую очередь необходимостью повторения и систематизации их школьных знаний по таким ключевым темам, как «Функция», «Производная функции и ее приложения», «Решение уравнений и их систем», «Решение неравенств и их систем». Кроме того, в рамках курса математики средней школы не предусмотрено изучение темы «Задачи с параметрами». Этот материал появляется иногда в конце некоторых параграфов школьных учебников по алгебре в виде «задач со звездочкой», является весьма фрагментарным, несистематизированным и разбросан по разным публикациям, поэтому для его аккумулирования и классификации был разработан элективный курс «Решение задач с параметрами».

В рамках данного элективного курса были выделены основные методы, способы и приемы решения заданий с параметрами средствами, доступными для старшеклассников и первокурсников. Каждый из рассматриваемых методов решения снабжен подробной иллюстрацией особенностей его применения на примерах и подборкой задач для самостоятельного решения. Тематический план этого элективного курса, рассчитанного на две дидактические единицы (36 аудиторных часов и столько же часов самостоятельной работы), приведен в таблице 1.

В каждой теме второго и третьего разделов элективного курса рассматривается один из способов решения задач с параметрами, а особенности его применения иллюстрируются на нескольких примерах, возрастание сложности которых происходит постепенно и зависит от уровня подготовки обучающихся. В завершении каждого занятия дается подборка задач для самостоятельного решения, без которых, как мы уже говорили ранее [6], невозможны продуктивное усвоение, закрепление изученного способа действия и выработка навыка его применения. Большинство занятий проходит в виде эвристической беседы с постепенным увеличением уровня сложности рассматриваемых примеров, которые могут быть сформулированы с помощью различной терминологии, но их решение базируется на одном и том же приеме.

Например, при изучении темы «Решение задач с параметрами с применением свойств квадратного трехчлена и его графика» мы обычно придерживаемся определенной последовательности заданий.

Пример 1. Определите знаки параметров квадратного трехчлена, график которого изображен на рисунке 1.

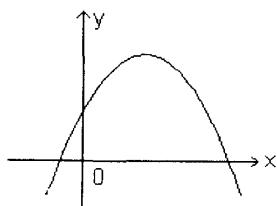


Рис. 1. График функций $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ: $a < 0, b > 0, c > 0, D > 0$.

Пример 2. При каких значениях параметра a парабола $y = x^2 - 2(a - 1)x + 4$ касается оси абсцисс [7]?

Ответ: -1 и 3 .

Пример 3. При каких значениях параметра m квадратный трехчлен

$$(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7$$

можно представить в виде квадрата двучлена [7]?

Ответ: 2 и $-22/3$.

Пример 4. При каких значениях параметра неравенство

$$(k - 12)x^2 + 2(k - 12)x + 2 > 0$$

выполняется при любых значениях переменной x [7]?

Ответ: $(-2; 20)$.

Пример 5. При каких значениях параметра a вершина параболы

$$y = (x - a^2 + 9a - 14)^2 + a - 5$$

лежит строго внутри в третьей координатной четверти [7]?

Ответ: $(2; 5)$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - 9)x^2 - (2a^2 + 5a - 9)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня разных знаков [16].

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 3)$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - a)x^2 - (a - 2)x - a - 6 = 0$$

имеет два различных корня, один из которых больше 1, а другой – меньше 1 [16].

Ответ: $(-1; 0) \cup (1; 4)$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a - 3)x^2 - 2(a + 3)x - 2a - 3 = 0$$

имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(-2; 1)$ [16].

Ответ: $(-4; -1) \cup (0; 0,5)$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(a + 4)x^2 + 4(a + 1)x + 2a + 2 = 0$$

имеет хотя бы один корень, больший -2 [16].

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение [16].

Ответ: $[2; +\infty)$.

Приведем ход решения еще одной задачи, рассматриваемой при изучении темы «Метод двух функций».

Пример 11. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$ меньше, чем -2 [1, id: 7234].

Решение. Независимо от того, как раскрывается модуль, график функции $y = f(x)$ будет представлять часть параболы, а, следовательно, при любом значении параметра a функция будет определена и непрерывна на всей числовой прямой, причем при $x \rightarrow \pm\infty$ значение функции будет стремиться к $+\infty$. Из чего можно сделать вывод, что функция будет достигать своего наименьшего значения, а, значит, условие задачи можно переформулировать следующим образом: «Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2| < 2$$

имеет хотя бы одно решение».

Приведем последнее неравенство к виду

$$|x^2 - x - 2| < -ax + 2a - 1 \quad (1)$$

и рассмотрим графики функций $u(x) = |x^2 - x - 2|$ и $g(x) = -ax + 2a - 1$.

Функция

$$u(x) = |x^2 - x - 2| = |(x - 0,5)^2 - 2,25|$$

представляет собой параболу, отрицательные значения которой отражены в верхнюю полуплоскость относительно оси абсцисс (рис. 2).

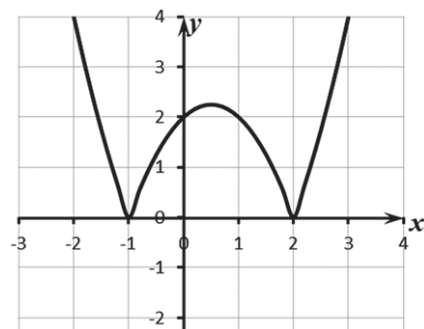


Рис. 2. График функций

Функция

$$g(x) = a(2 - x) - 1|x^2 - x - 2| < \\ < -ax + 2a - 1 = -a(x - 2) - 1$$

задает на координатной плоскости пучок прямых, проходящих через точку $A(2; -1)$. Неравенство (1) будет иметь решения только тогда, когда хотя бы часть прямой этого пучка будет находиться выше графика функции $y = u(x)$. Данному условию будут удовлетворять все прямые пучка, расположенные между прямыми a_1 и a_2 , то есть убывающие быстрее, чем прямая a_1 , или возрастающие быстрее, чем a_2 (рис. 3).

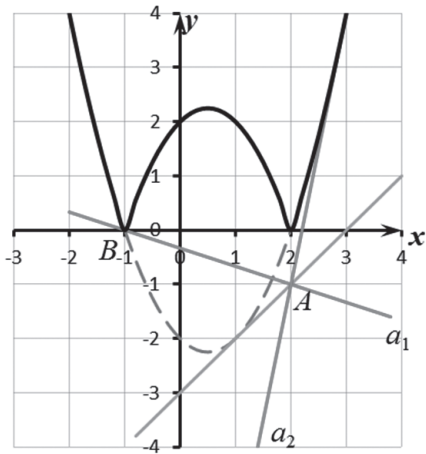


Рис. 3. Решение неравенства $|x^2 - x - 2| < -ax + 2a - 1$

Последнему условию будут соответствовать прямые $y = kx + b$, угловые коэффициенты которых удовлетворяют следующей совокупности:

$$\begin{cases} k < -a_1, \\ k > -a_2. \end{cases} \quad (2)$$

Прямая a_1 проходит через точку $B(-1; 0)$. Подставив эти координаты в уравнение прямой, получим: $a_1(2 + 1) - 1 = 0$ или $a_1 = 1/3$.

Прямая a_2 является касательной к графику функции $y = u(x)$, причем точка касания располагается в той части графика, которая не отражалась от оси абсцисс. Тогда найдем искомый параметр a_2 из геометрического смысла производной и условия наличия единственной общей точки касательной и графика функции:

$$\begin{cases} u'(x) = g'(x), \\ u(x) = g(x). \end{cases}$$

В нашем случае получим:

$$\begin{cases} (x^2 - x - 2)' = (-ax + 2a - 1)', \\ x^2 - x - 2 = -ax + 2a - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = -a, \\ x^2 - x - 2 = (2x - 1)x - 2(2x - 1) - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2x + 1, \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, подставив которые в первое уравнение, получим $a = -1$ или $a = -5$.

Если $a = -1$, то прямая $g(x) = x - 3$ не касается графика функции $y = u(x)$. Если $a = -5$, то прямая $g(x) = 5x - 11$ касается графика функции $y = u(x)$ и совпадает с прямой a_2 (см. рис. 2). Таким образом, условие (2) означает:

$$\begin{cases} k < -a_1, \\ k > -a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} -a < -a_1, \\ -a > -a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a > a_1, \\ a < a_2 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -5) \cup (1/3; +\infty)$.

Заметим, что при решении данного примера использовались не только знания свойств основных элементарных функций и умения строить и преобразовывать их графики, грамотно оперировать такими понятиями, как непрерывность функции, ее предел, производная и ее геометрический смысл, но и способность взглянуть на проблему под новым углом. Только благодаря наличию этой способности удалось переформулировать задачу, перейдя от термина «наименьшее значение функции» (предполагающего исследование функции, содержащей модуль, на экстремум с помощью ее производной при различных значениях параметра) к нахождению решений неравенства (1). Именно это умение взглянуть на ситуацию с другой стороны присуще креативным людям [12].

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что решение задач с параметрами не только позволяет обобщить и систематизировать полученные в школе знания по темам «Функция», «Решение уравнений», «Производная и ее приложения», но и способствует развитию образного, синтетического и творческого мышления.

Список литературы

1. Банк заданий ЕГЭ и ОГЭ по всем основным предметам [Электронный ресурс] // BANK-EGE.RU URL: <https://bank-ege.ru/student/trainer/19/task/17/topic/1379> дата обращения: 07.08.2023).
2. *Бутузова Е.А.* О пограничном состоянии математических знаний курсантов-первокурсников вуза гражданской авиации // Общество: социология, психология, педагогика. — 2023. — № 1(105). — С. 116–120.
3. *Вербицкий А.А.* Интерес студента в условиях контекстного образования // Безопасная образовательная среда будущего: вызовы и технологии решения : Сборник Материалов V Всероссийской научно-практической конференции. — М.: Афанасьев В.С., 2020. — С. 1–6.
4. *Власов В.Г.* Проект «Входной контроль» в вузе: цель, технология, результат // Высшее образование сегодня. — 2022. — № 7. — С. 37–42.
5. *Давыдоchkina С.В., Маскина М.С.* Опыт организации занятий с обучающимися Академии ФСИН России с применением технологии полного усвоения // Ведомости уголовно-исполнительной системы. — 2020. — № 6. — С. 18–23.
6. *Давыдоchkina С.В., Маскина М.С.* Применение технологии полного усвоения при организации занятий по дисциплинам математического цикла // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. — 2019. — Т. 8. — № 2. — С. 60–65.
7. *Королева Т.М., Маркарян Е.Г., Нейман Ю.М.* Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования. — М.: Центр тестирования МО РФ, 2003. — 189 с.
8. *Маскина М. С.* Введение пропедевтического курса наглядной геометрии для обеспечения требований ФГОС // Профильная школа. — 2017. — Т. 5. — № 1. — С. 44–49.
9. *Маскина М.С.* Применение алгоритмического метода обучения на занятиях по дисциплинам математического цикла // Стандарты и мониторинг в образовании. — 2020. — Т. 8. — № 5. — С. 43–48.
10. *Маскина М. С., Видов С. В.* Выявление и учет акцентуаций в педагогическом общении // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. — 2018. — Т. 7. — № 1. — С. 49–53.
11. *Маскина М.С., Купцов М.И., Теняев В.В.* Интегральный критерий оценки качества математического образования выпускника школы // Профильная школа. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 46–52.
12. *Маскина М.С.* О роли математики в формировании компетенций, связанных с познанием и креативностью // Стандарты и мониторинг в образовании. — 2017. — Т. 5. — № 4. — С. 47–49.
13. *Новикова Е.В., Павлова Е.В., Родионова А.Г., Родионова Н.В.* О соответствии между успеваемостью студентов первого курса и результатами ЕГЭ по математике // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики. Сборник научных и научно-практических статей VII Всероссийской научно-практической конференции. — 2022. — С. 144–151.

References

1. Bank of tasks for the Unified State Examination and the OGE in all major subjects. Available at: <https://bank-ege.ru/student/trainer/19/task/17/topic/1379> (accessed 7 August 2023).
2. Butuzova E.A. On the borderline state of mathematical knowledge of first-year cadets of a civil aviation university. Society: sociology, psychology, pedagogy, 2023, no. 1(105). p. 116–120.
3. Verbitskij A.A. Student's interest in the conditions of contextual education. Safe educational environment of the future: challenges and solution technologies: Collection of Materials of the V All-Russian Scientific and Practical Conference. Moscow, 2020, p. 1–6. (In Russian).
4. Vlasov V.G. The project “Entrance control” at the university: purpose, technology, result. Higher education today, 2022, no. 7. p. 37–42.
5. Davydochkina S.V., Maskina M.S. Experience in organizing classes with students of the Academy of the Federal penitentiary service of Russia using the technology of complete assimilation. Journal of the penitentiary system, 2020, no. 6, p. 18–23.
6. Davydochkina S.V., Maskina M.S. Use of full assimilation technology when organizing classes in the mathematical disciplines. Research and development. Social and humanitarian research and technology, 2019, V. 8, I. 2, p. 60–65.
7. Koroleva T.M., Markaryan E.G., Neiman Yu.M. Mathematics manual to help participants of centralized testing. Moscow: Testing Center of the Ministry of Defense of the Russian Federation, 2003. 189 p.
8. Maskina M.S. Introduction propaedeutic course visual geometry to ensure the requirements of the FSES. Profession-Oriented School, 2017, V. 5, I. 1, p. 44–49.
9. Maskina M.S. Use of algorithmic method of teaching when organizing classes in the mathematical disciplines. Standards and Monitoring in Education, 2020, V. 8, I. 5, p. 43–48.
10. Maskina M.S., Vidov S.V. The identification and taking into account of accentuation in pedagogical communication. Research and development. Social and humanitarian research and technology, 2018, V. 7, I. 1, p. 49–53.
11. Maskina M.S., Kuptsov M.I., Tenyaev V.V. An integral criterion for assessing the quality of mathematical education of highschool graduate. Profession-Oriented School, 2016, no.3, pp. 46–52.
12. Maskina M.S. About the role of mathematics in competence formation related to cognition and creativity. Standards and Monitoring in Education. 2017, V. 5, I. 4, p. 47–49.
13. Novikova E.V., Pavlova E.V., Rodionova A.G., Rodionova N.V. On the correspondence between the progress of first-year students and the results of the USE in mathematics. Teaching mathematics and informatics in schools and universities: problems of content, technology and methodology. Collection of scientific and scientific-practical articles of the VII All-Russian scientific-practical conference, 2022, p. 144–151.

14. Филиппова Е.Г. Анализ результатов диагностического тестирования первокурсников УрГУПС по математике // Инновационные технологии обучения математическому и имитационному моделированию студентов транспортного вуза: Сборник научных трудов. Выпуск 4 (248). — Екатеринбург: Уральский государственный университет путей сообщения. — 2022. — С. 79–85.
15. Хуторской А.В. Соотношение онлайн и офлайн-занятий в обучении // Эйдос. — 2022. — № 3.
16. Шестаков С.А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2022. — 288 с.
17. Ямбург Е.А. Трагический дистант (неизвестная педагогика) // Перспективы развития педагогического образования в условиях цифровой социальной реальности: антропологический подход. Материалы XVI Международной научно-практической конференции. — Ставрополь, 2021. — С. 5–12.
14. Filippova E.G. Analysis of the results of diagnostic testing of USUPS first-year students in mathematics. Innovative technologies for teaching mathematical and simulation modeling of students of a transport university: Collection of scientific papers. Yekaterinburg, 2022, p. 79–85.
15. Khutorskoy A.V. The ratio of online and offline classes in education. Eidos, 2022, no. 3.
16. Shestakov S.A. USE 2022. Mathematics. Tasks with a parameter. Task 17 (profile level). Under. Ed. I.V. Yashchenko. M.: MTSNMO, 2022. 288 p.
17. Yamburg E.A. Tragic Distance (Unknown Pedagogics). Prospects for the Development of Pedagogical Education in the Conditions of Digital Social Reality: An Anthropological Approach. Materials of the XVI International Scientific and Practical Conference. Stavropol, 2021, p. 5–12.