Гиперболический параболоид: взаимосвязь аналитического и конструктивного моделирования

Hyperbolic paraboloid: relationship between analytical and constructive modeling

Графский О.А.
Д-р техн. наук, профессор кафедры "Вычислительная техника и компьютерная графика, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», г. Хабаровск
e-mail: grafoa2@yandex.ru

Grafsky O.A.
Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computer Engineering and Computer Graphics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Far Eastern State Transport University", Khabarovsk
e-mail: grafoa2@yandex.ru

Часовников Д.Р.
Студент, 3 курс, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», г. Хабаровск
e-mail: chdanil14052004@gmail.com

Chasovnikov D.R.
Student, 3 rd year, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Far Eastern State Transport University", Khabarovsk
e-mail: chdanil14052004@gmail.com

Аннотация
Исследования направлены как для преподавателей, так и студентов по дисциплине начертательная (конструктивная) геометрия. В частности, рассматривается вопрос моделирования гиперболического параболоида, как линейчатой поверхности с позиции начертательной геометрии, и как поверхности второго порядка, при описании в аналитической геометрии. В соответствии с учебным планом и программой дисциплины «Спецразделы аффинной, проективной и вычислительной геометрии» для подготовки магистров по профилю «Системы мультимедиа и компьютерная графика» при ДВГУПС, рассматривается тема «Моделирование поверхностей методами интерполяции и аппроксимации». Однако, известные графические интерпретации в курсе по начертательной геометрии имеют общий теоретический характер, кроме источника [3], в котором дано конструктивное и аналитическое решения. Естественно, возникает желание решения обратной задачи: по аналитическому заданию гиперболического параболоида построить методом начертательной геометрии его конструктивную линейчатую форму.
Ключевые слова: гиперболический параболоид; направляющие, образующая; общее уравнение поверхности второго порядка; плоскость касательная квадрике; визуализация в математическом пакете Maple.

Abstract
The research is aimed at both teachers and students in the discipline of descriptive (constructive) geometry. In particular, the issue of modeling a hyperbolic paraboloid as a ruled surface from the standpoint of descriptive geometry, and as a second-order surface, when described in analytical geometry, is considered. In accordance with the curriculum and program of the discipline "Special Sections of Affine, Projective and Computational Geometry" for training masters in the profile "Multimedia Systems and Computer Graphics" at FESU, the topic of "Modeling Surfaces by Interpolation and Approximation Methods" is considered. However, the known graphical interpretations in the course on descriptive geometry have a general theoretical nature, except for the source [3], which provides a constructive and analytical solution. Naturally, there is a desire to solve the inverse problem: according to the analytical task of a hyperbolic paraboloid, construct its constructive ruled form by the method of descriptive geometry.
Keywords: hyperbolic paraboloid; directrix, generator; general equation of a second-order surface; plane tangent to a quadric; visualization in the mathematical package Maple.

Исследования возникли при анализе моделирования поверхностей по источнику [7]. При рассмотрении функций сопряжения моделирования билинейной поверхности, приведём цитату из этого источника: «Из-за того, что эти функции сопряжения линейны по соответствующим параметрам, билинейная поверхность обычно оказывается плоской» [7, С. 204]. Очевидно, представлен некорректный перевод: следует сказать, что поверхность является линейчатой.

Выполненные авторами исследования в математическом пакете программирования Maple показали, что при определённых параметрах поверхность является обычной плоскостью, а при произвольном их задании (одна из точек не инцидентна плоскости трех других точек) – линейчатой поверхностью (точнее сказать лоскутом одной из такой поверхности).

Поэтому возникла задача моделирования линейчатой поверхности на примере гиперболического параболоида следующего вида (1):

$$x^2 - y^2 = z$$

Для определения двух направляющих и образующей такой поверхности необходимо через заданные две точки этой поверхности ввести к ней касательные плоскости. В таком случае в каждой из этих плоскостей имеют место по две прямые, инцидентные поверхности. В одной плоскости можно выбрать одну направляющую, в другой - ещё одну направляющую и образующую. Аналитическую зависимость касательных плоскостей можно установить из выражения [5, с. 93]. А при совместном решении поверхности (1) с заданными касательными плоскостями, определить уравнения необходимых прямых. При этом были рассмотрены несколько вариантов задания двух точек для касательных плоскостей и построения линейчатой модели поверхности. Для приводимого примера на поверхности (1) заданы точки: для первой касательной плоскости точка 1 (x=1, y=0, z=1), для второй касательной плоскости точка 2 (x=–2, y=1, z=3). Для каждой точки, соответственно, получены уравнения плоскости:

$$f1 := x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z = 0, \qquad f2 := 2x + y + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}z = 0.$$

В математическом пакете программирования Maple получены уравнения и визуализация проекций необходимых прямых для выбора направляющих и образующей поверхности (1).

Конструктивное решение задачи (рис. 1) выполнялось в ПО Microsoft Visio (ортогональные проекции в системе двух плоскостей проекций; соответственные точки, чтобы не загромождать чертёж, на проекциях прямых не обозначены, а изображены цветом).

Интересно отметить такой факт: для рассмотренной поверхности (1) горизонтальные проекции прямых взаимно перпендикулярны и имеют тангенсы углов наклона к оси абсцисс равный ± 1 и условие параллельности прямых между полученными касательными плоскостями.

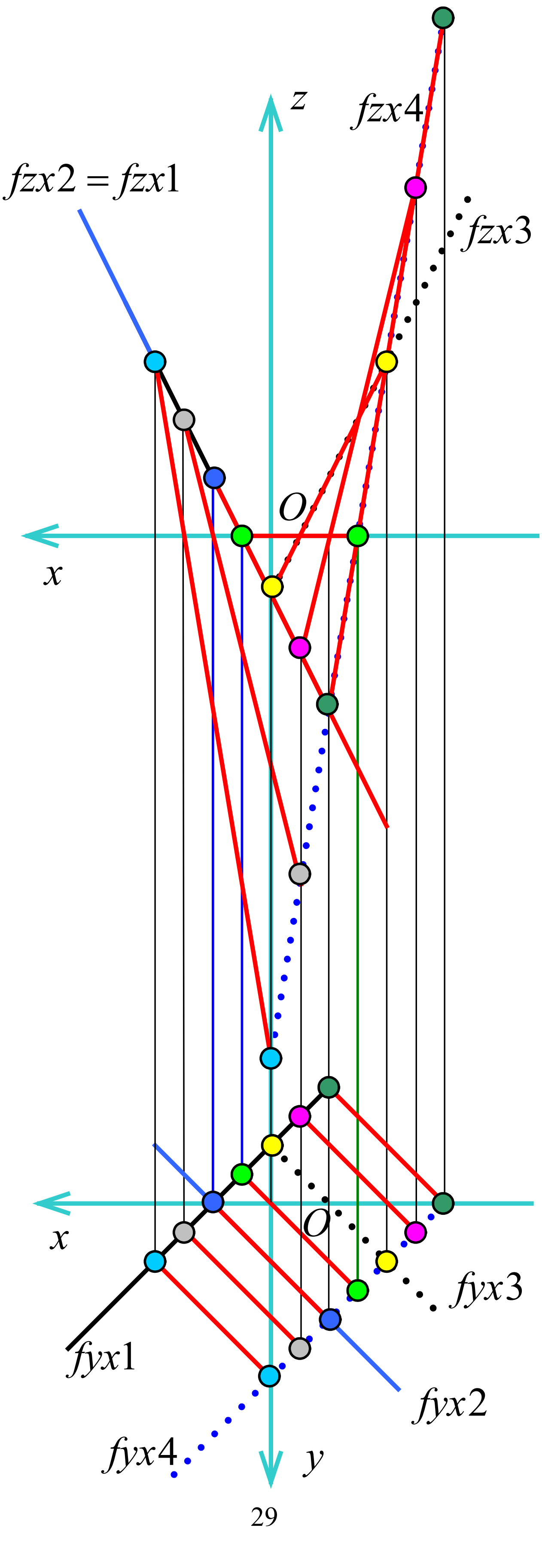

Рис. 1. Конструктивное решение задачи

Выводы

Исследования направлены на активизацию студентов [1] в плане взаимосвязи конструктивного и аналитического решения задач с применением информационных технологий, на примере математических пакетов программирования. В обоих случаях вполне можно реализовать геометрический подход, который не только проясняет обоснование получаемого результата, но и позволяет более осмысленно оперировать необходимыми аналитическими или графическими приемами, которые проанализированы, например, авторами в источниках [2, 9, 10, 11]. Кроме того, естественного полагать, что современные информационные технологии позволяют реализовывать множество решений в конструктивном исполнении и в других геометрических задачах, в которых приводятся в соответствие аналитические и графические решения [4, 6, 8, 12]. Исследования полезны для продолжения предлагаемой методики в рамках научно-исследовательской работы студентов под руководством преподавателя.

Литература

1. Астахова Т.А. Участие в научно-исследовательской работе студентов вуза как средство активизации самостоятельной работы // Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы: сборник трудов Междунар. науч.-практич. конф. НГАСУ, БГТУ. 2019. С. 27–30.
2. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н., Романова В.А. Основы разработки и визуализации объектов аналитических поверхностей и перспективы их использования в архитектуре и строительстве // Геометрия и графика. 2017. Т. 1. № 4. С. 3–14. DOI: 10.12737 / article_5a17f590be3f51.37534061
3. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии: учебное пособие. М.: Машиностроение, 1998. 157 с.
4. Кононов В.П., Кононова И.Е., Мороз О.Н. Принципы построения геометрических моделей нанокластеров по тетра эдрической линии // Геометрия и графика. 2022. Т. 10. № 3. С. 12– 22. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-12-22.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
6. Короткий В.А. Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами // Геометрия и графика. 2022. Т. 10. № 3. С. 23–34. DOI: 10.12737/ 2308-4898-2021-9-1-3-18.
7. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). СПб.: Питер, 2004. 560 с.
8. Рустамян В.В., Баянов Е.В., Славин Р.Б. Синтетическое представление преобразования «косая симметрия» на примере преобразования эллипса // Геометрия и графика. 2023. Т. 11. № 3. С. 12– 18. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-2-18-26.
9. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 1 // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 4. С. 20–31. DOI: 10.12737 / artticle_5c21f4a06dbb74.56415078.
10. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 1. С. 14–27. DOI: 10.12737 / artticle_5c9201eb1c5f06.47425839.
11. Сальков Н.А. Расширение вариантов формирования линейчатых поверхностей // Геометрия и графика. 2024. Т. 12. № 1. С. 3–11. DOI: 10.12737 /2308-4898-2024-12-1-3-11.
12. Щеглов Г.А. О геометрической интерпретации кватернионов конусами // Геометрия и графика. 2022. Т. 10. № 3. С 23–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-23-34.