Задача на моделирование случайного эксперимента как инструмент формирования мышления обучающихся

The task of modeling a random experiment as a tool for developing students' thinking

УДК 372
DOI: 10.12737/2500-3305-2025-10-5-53-69

Макеева О.В.
Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова», г. Ульяновск
e-mail: mov_ulspu@mail.ru

Makeeva O.V.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk
e-mail: mov_ulspu@mail.ru

Матренин Н.С.
Студент, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова», г. Ульяновск
e-mail: nikitamatrenin37@gmail.com

Matrenin N.S.
Student, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk
e-mail: nikitamatrenin37@gmail.com

Аннотация
В статье описана структура учебной математической деятельности по моделированию случайного эксперимента. Сделан акцент на необходимость включения в процесс моделирования описания того действия, которое приводит к случайному результату. Показано, что моделирование вероятностной и детерминированной прикладной задачи имеет единую структуру. Продемонстрированы возможности моделирования вероятностной задачи в контексте формирования у обучающихся полноты и структурированности рассуждений как характеристик мышления. Предложенная идея работы с задачей проиллюстрирована примером «рутинной» вероятностной задачи с шахматными фигурами. Описана возможность вариации и комплексного исследования этой задачи в контексте формирования научного и исследовательского типов мышления у обучающихся. Все приведённые в материале задачи имеют наглядные иллюстрированные решения. В качестве математических инструментов решения использованы определения безусловной и условной вероятности случайного события, формула полной вероятности и формула Байеса.
Ключевые слова: рутинная математическая задача, формирование мышления, моделирование прикладной задачи, моделирование случайного эксперимента, вероятность случайного события, формула полной вероятности, формула Байеса, шахматы.

Abstract
The article describes the structure of educational mathematical activity on modeling a random experiment. Emphasis is placed on the need to include in the modeling process a description of the action that leads to a random result. It is shown that modeling a probabilistic and deterministic applied problem has a single structure. The possibilities of modeling a probabilistic problem in the context of developing students' completeness and structured reasoning as characteristics of thinking are demonstrated. The proposed idea of working with the problem is illustrated by an example of a "routine" probabilistic problem with chess pieces. The possibility of varying and comprehensively studying this problem in the context of developing students' scientific and research types of thinking is described. All problems given in the material have visual illustrated solutions. The definitions of unconditional and conditional probability of a random event, the formula for total probability, and Bayes' formula are used as mathematical tools for solving the problem.
Keywords: routine mathematical problem, development of thinking, modeling of applied problem, modeling of random experiment, probability of random event, formula of total probability, Bayes' formula, chess.

Введение

Актуальность предложенного материала обусловлена универсальностью математического знания, его фундаментальной ролью в процессе формирования мышления. Методологическую основу работы составляют труды по психологии мышления А.Н. Леонтьева [1]; теория П.Я. Гальперина об ориентировочной основе деятельности и поэтапном формировании умственных действий и понятий [2], [3]; результаты в области психологии решения задач В.Ф. Спиридонова [4]. Проблему исследования составляет поиск и демонстрация возможностей математической задачи как инструмента формирования требуемых характеристик мышления обучающихся. При этом акцент делается не на проектные исследования или нестандартные и творческие задачи. В фокусе внимания авторов находятся задачи, которые по причине наличия в прошлом опыте субъекта готовых средств их решения иногда называют «рутинными», противопоставляя собственно проблемным ситуациям, для решения которых необходимо создавать новые специальные инструменты. Согласно принятой в психологии мышления классификации, решение рутинных задач сводится к применению сформированного ранее умственного навыка, т.е. к репродукции имеющихся знаний и умений. Мышление, необходимое для решения таких задач, называют репродуктивным, противопоставляя его творческому мышлению. Однако именно рутинные задачи составляют основу школьной программы по математике, именно их решению отведена бóльшая часть учебного времени. Значит, повышение эффективности результатов решения таких задач оказывает прямое влияние на повышение качества учебной математической деятельности. Поэтому авторы считают девизом своей работы как учителя и преподавателя утверждение: «Рутинной является не задача. Рутинным или творческим может быть способ работы с задачей». Очевидно, что «всякая математическая задача представляет собой некоторую ситуацию, специально сконструированную для достижения определенных целей обучения». При этом «опыт отечественной науки в вопросах формирования исследовательской компетенции в рамках обучения математике позволил выделить математическую задачу как основную единицу содержания обучения, обеспечивающую реализацию составляющих исследовательской компетенции» [5, с.131], той самой компетенции, которая способствует формированию творческого мышления. Целью настоящего исследования является обоснованное описание конкретного примера «*работы с задачей*», в котором реализуется потенциал задачного материала в контексте формирования заданных характеристик мышления. В качестве такого примера выбрана задача на моделирование случайного эксперимента. В качестве формируемых свойств мыслительной деятельности выделены полнота рассуждений и структурированность мышления.

Математическое моделирование учебных прикладных задач

Освоение учащимися приемов математического моделирования является одной из ведущих задач современного школьного математического образования. Это отражено в федеральных государственных образовательных стандартах и действующих рабочих программах по математике. Умение моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели и интерпретировать полученный результат формируется на протяжении всего школьного курса математики. Три основных этапа моделирования известны обучающимся уже в основной школе [6, с.137].

1) Построения модели – самый сложный для учащихся этап работы. Это самостоятельное составление модельной математической задачи. Он включает: выбор переменных; возможно, параметров; введение авторской системы обозначений. Итогом работы становится сформулированная на языке математики связь между переменными и параметрами, отражающая цель задачи.

2) Исследование модели, понимаемое как решение модельной задачи, требует отбора подходящих математических инструментов решения, их актуализации в общем виде и дальнейшего применения в конкретной ситуации.

3) Интерпретация результатов, т.е. трактовка полученного решения модельной математической задачи в терминах фабулы исходной задачной ситуации, представляет собой перевод информации с языка теории (математики) на язык практики.

Все этапы математического моделирования учебных прикладных задач направлены на формирование у обучающихся элементов научного стиля мышления и развитие его исследовательской компоненты.

Математическое моделирование случайного эксперимента

Чтобы обучающиеся получили опыт математического моделирования в ситуациях, когда связи между объектами носят случайный характер, учителю требуется разработать и использовать специальные методические приёмы. При этом структура деятельности ученика по работе с моделью в детерминированных и вероятностных задачах остаётся неизменной и это должно быть акцентировано учителем.

Можно заметить, что принятая в школьных учебниках терминология, связанная с понятием «случайный эксперимент», выглядит несколько размытой. Слова «опыт», «испытание», «эксперимент» используются как синонимы и не различаются [6, с.171], [7, с.122], [7, с.164]. Описание самого действия со случайным исходом часто отсутствует. Предполагается, что это действие является очевидным и следует из условия задачи. Однако опыт работы показывает, что развернутое описание действия, которое приводит к рассматриваемому в задаче случайному событию, вызывает значительные трудности у обучающихся. В результате отсутствия такого описания решение задачи остается неполным, содержащим пустоты, а иногда и противоречия в логических рассуждениях. Достаточно часто можно встретить решения обучающихся, в которых не согласованы экспериментальные действия, соответствующие им объекты и их количественные показатели, используемые в инструментах решения. Это свидетельствует о неспособности обучающихся анализировать эксперимент и выделять его структуру, то есть о формальном решении задачи, а точнее, об отсутствии решения. При этом достаточно часто в учебной и научно-методической литературе математическое моделирование случайного явления начинается сразу с описания множества элементарных исходов случайного эксперимента или описания одного такого исхода [8, с.26]. На наш взгляд большей полнотой, а, следовательно, большей дидактической ценностью обладает решение, которое начинается «с обсуждения случайного опыта» [9, с.23].

Структурируя понятие случайного эксперимента, можно выделить «действия» и «объекты», над которыми они совершаются. При этом каждый из компонентов имеет свои качественные и количественные характеристики. Их особенности и составляют содержание случайного эксперимента. Под случайным экспериментом будем понимать одно или несколько (возможно, последовательность) действий со случайным исходом, которые можно воспроизвести повторно. При этом необходимо различать единичное действие, входящее в состав эксперимента и сам эксперимент. Так как «различные варианты осуществления опыта могут привести к построению различных математических моделей» [9, с. 24], то, по мнению авторов, описание случайного эксперимента является неотъемлемой, обязательной частью построения его математической модели. Это описание целесообразно выполнять в терминах деятельности и отражать её случайный характер. Например, использовать неопределённую форму глагола совершенного вида: «выбрать наугад», «выстрелить», «подбросить».

1) Первый этап моделирования – составление модельной математической задачи – есть построение математического объекта, для которого требуется отыскать некоторую характеристику. В ситуации случайного эксперимента это построение множества его элементарных исходов [8, с.24] с распределением на нём вероятностей [9, с.23] – множества, для которого необходимо найти вероятностную характеристику, удовлетворяющую заданным требованиям. Описание этого множества, очевидно, должно следовать из описания самого случайного эксперимента.

2) Второй этап моделирования – решение модельной задачи. Искомая вероятность случайного события, будучи числовой характеристикой множества элементарных исходов эксперимента, может быть найдена только с учётом особенностей построения этого множества. Трактуя случайное событие как результат случайного эксперимента [6, с.160], достаточно часто его можно описать в тех же терминах, что и случайный эксперимент, используя краткую форму причастия, например, эксперимент «выбрать» приводит к событию «выбран». Иногда построение математической модели может включать переход от реальных объектов окружающего мира к «идеальным» объектам математики. Например, вместо шаров могут рассматриваться их номера. Этот переход должен быть выполнен корректно и отражен в решении задачи.

3) На последнем этапе работы с моделью происходит возвращение к терминологии исходной прикладной задачи. Здесь выполняется интерпретация найденных числовых характеристик некоторого подмножества всех исходов эксперимента как вероятностей случайных событий.

Задача на моделирование случайного эксперимента

Проиллюстрируем применение предложенного подхода организации учебной деятельности по построению математической модели случайного эксперимента на примере конкретной задачи с фигурами на шахматной доске [10]. Детали структуры учебной деятельности внутри трёх этапов моделирования продемонстрируем с помощью абзацных отступов. Курсивом выделим слова – маркеры ключевых моментов решения, обеспечивающих полноту рассуждений. Использование каждого инструмента решения в обязательном порядке продемонстрируем на трёх уровнях: наименование, предъявление в общем виде, применение в конкретной ситуации.

Задача 1. На двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены два разноцветных короля. Найдите вероятность того, что шахматные правила не нарушены, короли не нападают друг на друга (не находятся в соседних по вертикали, горизонтали или диагонали клетках).

Решение задачи 1.

1) Для проведения эксперимента понадобится стандартная шахматная доска и два короля разных цветов. Выбор двух объектов можно осуществить двумя способами: одновременно или последовательно. После проведения проб случайного выбора двух клеток шахматной доски *можно заметить*, что одновременный выбор обладает меньшей информативностью, его сложнее анализировать.

Пусть случайный эксперимент состоит в том, чтобы выбрать наугад последовательно две клетки на шахматной доске и поставить на них двух разноцветных королей. То есть эксперимент включает два шага, на каждом из которых выполняются определённые действия с соответствующими объектами.

Таблица 1

Структура случайного эксперимента задачи 1

№ шага эксперимента	Система действий	Объекты
1	• случайно выбрать первую клетку на шахматной доске; • поставить на ней короля	• 64 клетки шахматной доски; • фигура короля с присущим ему полем атаки на шахматной доске
2	• случайно выбрать вторую клетку на шахматной доске после того, как одна клетка уже занята; • поставить на ней оставшегося короля	• 63 свободные клетки шахматной доски; • –

Случайный характер действий означает, что шансы быть выбранными не зависят от положения клеток на доске и для всех клеток доски они одинаковы. *Значит*, исходы «выбрана клетка…» являются равновозможными и для определения вероятностей случайных событий, описываемых такими исходами, *можно использовать* классический подход к определению вероятности.

После построения нескольких примеров исходов эксперимента, которые удовлетворяют и не удовлетворяют требованиям задачи, *можно заметить*, что построить «неправильные» исходы проще, они более наглядны, так как второй шаг эксперимента в этом случае содержит небольшое, легко перечислимое количество возможных вариантов. *Поэтому* рассмотрим случайное событие $\overline{A}$ –противоположное тому, которое рассматривается в задаче – две клетки выбраны так, что поставленные на них два короля разных цветов бьют друг друга. Это означает, что вторая клетка выбрана в поле атаки первого короля.

Построенные *примеры* исходов эксперимента, благоприятные событию $\overline{A}$, *показывают*, что целесообразно разбить множество всех клеток шахматной доски на непересекающиеся подмножества по количеству ходов, которые может сделать поставленный на них король. Тогда множество исходов первого действия эксперимента – множество способов выбрать первую клетку – *можно представить* в виде суммы непересекающихся событий (гипотез), образующих полную группу:

гипотеза H_1 – поставленный король имеет 3 варианта хода, то есть первой выбрана одна из угловых клеток: A1, A8, H8, H1 (рис. 1.1а, 1.1б);

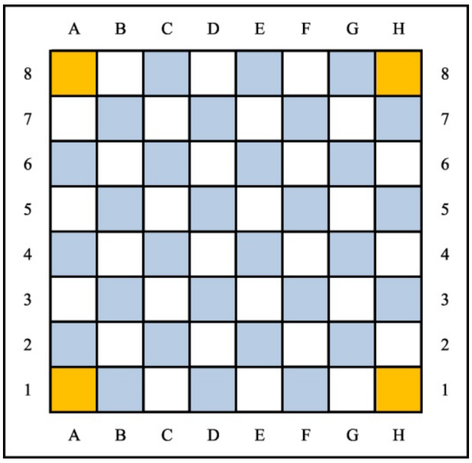

Рис. 1.1а. Положения короля, имеющего 3 варианта хода

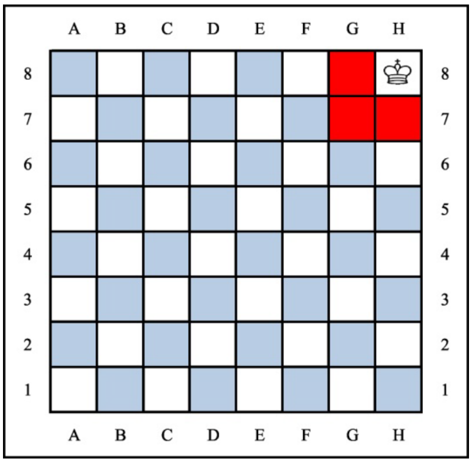

Рис. 1.1б. Поле атаки короля, имеющего 3 варианта хода

гипотеза H_2 – король имеет 5 вариантов хода, то есть первой выбрана одна из клеток на границе поля за исключением угловых клеток (рис. 1.2а, 1.2б);

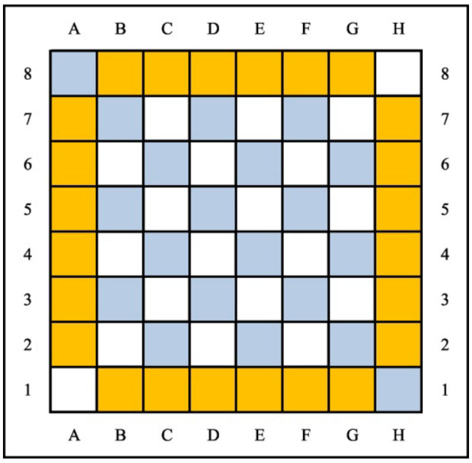

Рис. 1.2а. Положения короля, имеющего 5 вариантов хода

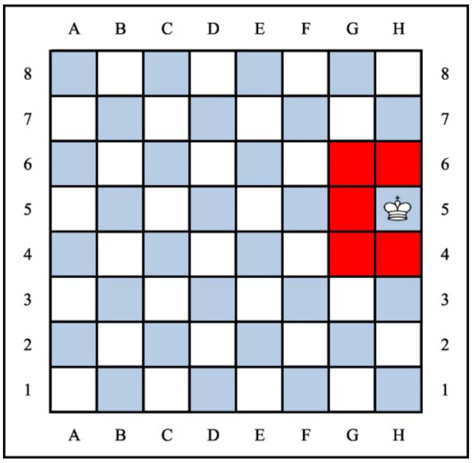

Рис. 1.2б. Поле атаки короля, имеющего 5 вариантов хода

гипотеза H_3 – король имеет 8 вариантов хода, то есть первой выбрана одна из клеток, не граничащих с краем поля (рис. 1.3а, 1.3б).

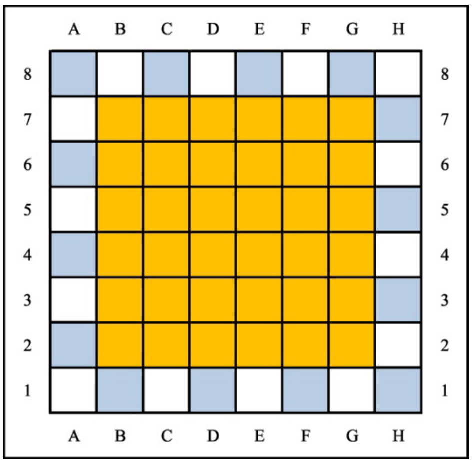

Рис. 1.3а. Положения короля, имеющего 8 вариантов хода

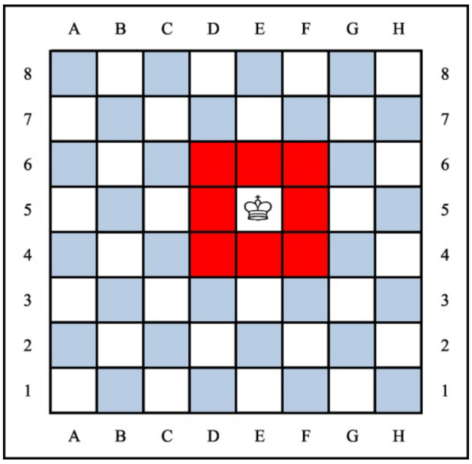

Рис. 1.3б. Поле атаки короля, имеющего 8 вариантов хода

2) Для нахождения вероятностей введенных гипотез «выбрана клетка…» *будем использовать* классический подход к определению вероятности случайного события:

$$P(H_i) = \frac{N(H_i)}{N}, \qquad (1)$$

где $N = 64$ – число способов выбрать первую клетку произвольно; $N(H_i)$ – число способов выбрать первую клетку, удовлетворяющую гипотезе H_i. Тогда получим $P(H_1) = \frac{4}{64}$, $P(H_2) = \frac{24}{64}$, $P(H_3) = \frac{36}{64}$, причём $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Можно заметить, что наступление события $\overline{A}$ происходит или не происходит на втором шаге эксперимента уже после наступления одной из гипотез как результата первого шага. *Поэтому* вероятности события $\overline{A}$ при каждой гипотезе, то есть вероятности того, что после выбора первой клетки второй будет выбрана клетка, попадающая в поле атаки первого короля и, значит, поставленные на них короли бьют друг друга, являются условными.

Для вычисления условных вероятностей «выбрана клетка…» также *будем использовать* классический подход к определению вероятности случайного события:

$$P(\overline{A}|H_i) = \frac{K_i}{N-1}, \qquad (2)$$

где $N-1 = 64-1 = 63$ – число способов выбрать вторую клетку произвольно после того как одна клетка уже занята; K_i – число клеток в поле атаки короля при наступлении гипотезы H_i. Получим: $P(\bar{A}|H_1) = \frac{3}{63}$, $P(\bar{A}|H_2) = \frac{5}{63}$, $P(\bar{A}|H_3) = \frac{8}{63}$.

Заметим, что наступление события $\bar{A}$ происходит одновременно с одной из несовместных гипотез, образующих полную группу. *Поэтому* для нахождения безусловной вероятности события $\bar{A}$ можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$P(\bar{A}) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(\bar{A}|H_i). \qquad (3)$$

Получим $P(\bar{A}) = \frac{4}{64} \cdot \frac{3}{63} + \frac{24}{64} \cdot \frac{5}{63} + \frac{36}{64} \cdot \frac{8}{63} = \frac{5}{48} \approx 0{,}104$.

Тогда искомая вероятность события A, противоположного к событию $\bar{A}$, *может быть найдена* по теореме о вероятностях противоположных событий:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \qquad (4)$$

и $P(A) = 1 - \frac{5}{48} = \frac{43}{48} \approx 0{,}896$.

3) Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8 × 8 случайным образом поставлены два разноцветных короля и шахматные правила не нарушены, короли не нападают друг на друга, равна $\frac{43}{48}$.

Пример вариации и комплексного исследования вероятностной задачи

Очевидно, что предложенный алгоритм решения можно использовать и для аналогичной задачи с другими шахматными фигурами. Сформулируем задачу в общем виде. На двух клетках шахматной доски размером 8 × 8 случайным образом поставлены две разноцветные шахматные фигуры одного наименования. Найдите вероятность того, что шахматные правила не нарушены, фигуры не нападают друг на друга.

Эксперимент – выбрать наугад последовательно две клетки на шахматной доске и поставить на них две разноцветные фигуры одинакового наименования. Случайное событие A – клетки выбраны так, что поставленные на них фигуры не бьют друг друга. Наглядно представим множества исходов, благоприятных наступлению гипотез H_i как множество результатов выбора первой клетки, различающихся по количеству ходов, которые может сделать поставленная на них фигура. Кроме того, наглядно представим поле атаки фигуры для каждого типа гипотез. Тогда, используя формулы (1-4) можно получить искомые вероятности. Приведем краткое иллюстрированное решение возможных задач.

Задача 2. Два разноцветных ферзя не нападают друг на друга.

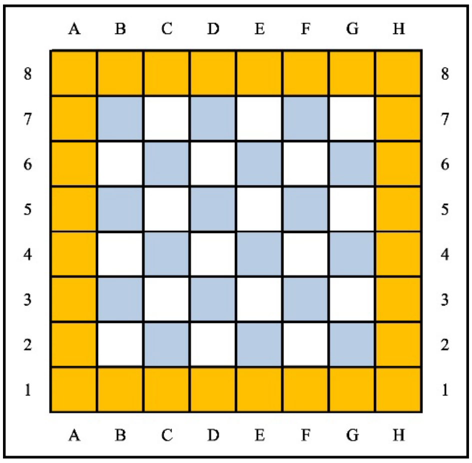

Рис. 2.1а. Положения ферзя, имеющего 21 вариант хода

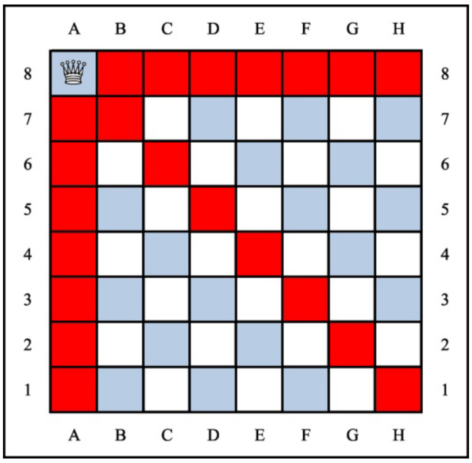

Рис. 2.1б. Поле атаки ферзя, имеющего 21 вариант хода

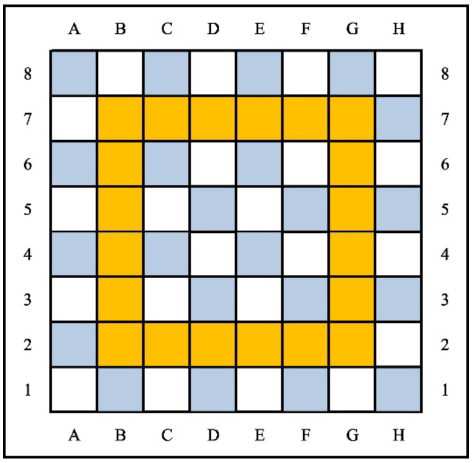

Рис. 2.2а. Положения ферзя, имеющего 23 варианта хода

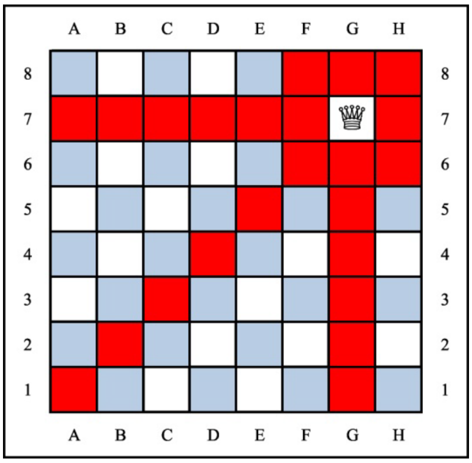

Рис. 2.2б. Поле атаки ферзя, имеющего 23 варианта хода

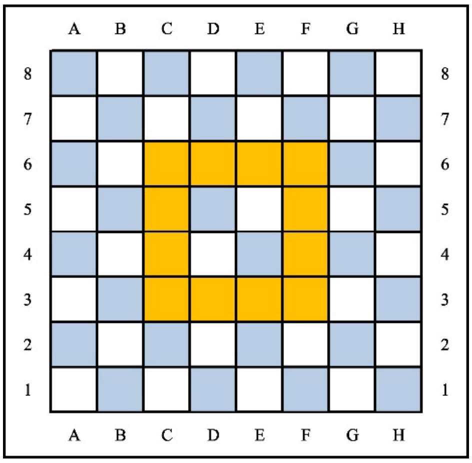

Рис. 2.3а. Положения ферзя, имеющего 25 вариантов хода

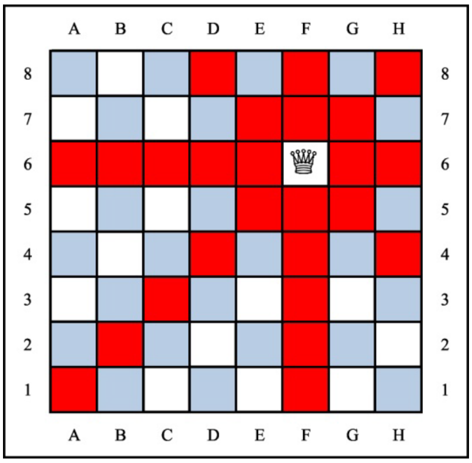

Рис. 2.3б. Поле атаки ферзя, имеющего 25 вариантов хода

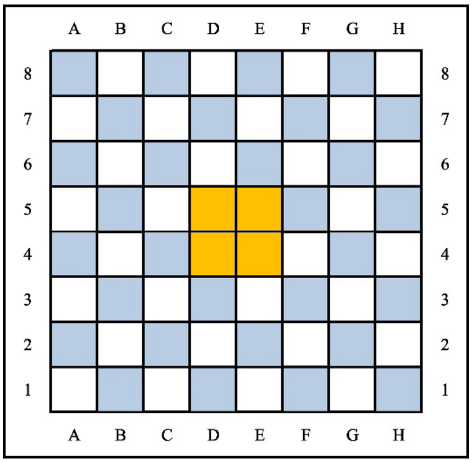

Рис. 2.4а. Положения ферзя, имеющего 27 вариантов хода

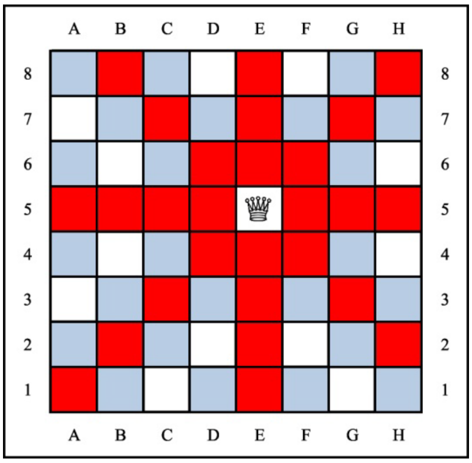

Рис. 2.4б. Поле атаки ферзя, имеющего 27 вариантов хода

$$P(A) = 1 - \left(\frac{28}{64}\cdot\frac{21}{63} + \frac{20}{64}\cdot\frac{23}{63} + \frac{12}{64}\cdot\frac{25}{63} + \frac{4}{64}\cdot\frac{27}{63}\right) = 1 - \frac{91}{252} = \frac{23}{36} \approx 0{,}639.$$

Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены два разноцветных ферзя, и они не нападают друг на друга, равна $\frac{23}{36}$.

Задача 3. Две разноцветные ладьи не нападают друг на друга.

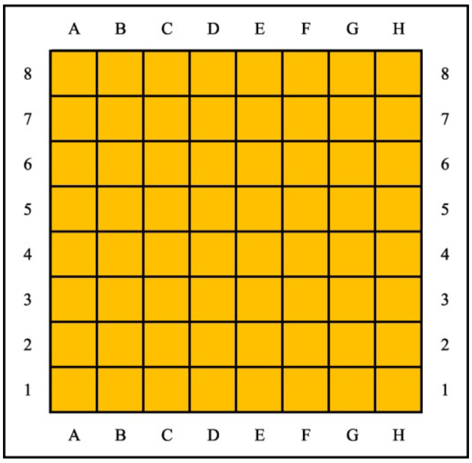

Рис. 3.1а. Положения ладьи, имеющей14 вариантов хода

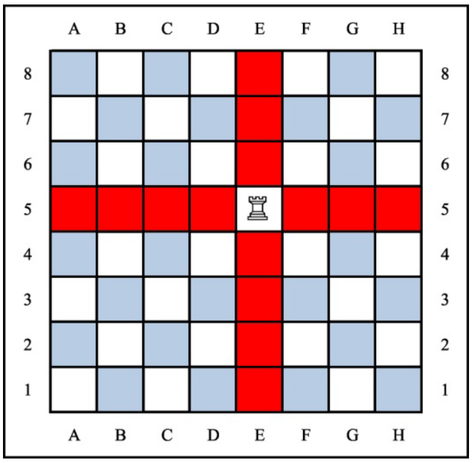

Рис. 3.1б. Поле атаки ладьи, имеющей 14 вариантов хода

$$P(A) = 1 - \frac{64}{64} \cdot \frac{14}{63} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \approx 0{,}778.$$

Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены две разноцветные ладьи, и они не нападают друг на друга, равна $\frac{7}{9}$.

Задача 4. Два разноцветных слона не нападают друг на друга.

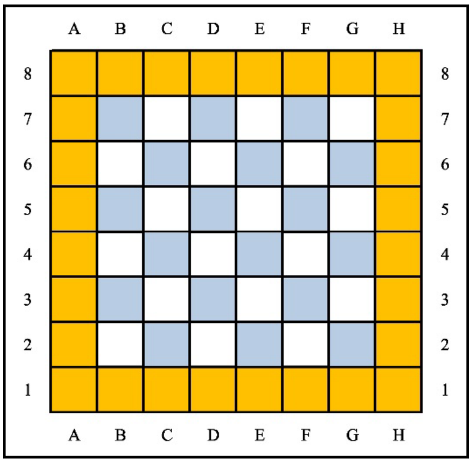

Рис. 4.1а. Положения слона, имеющего 7 вариантов хода

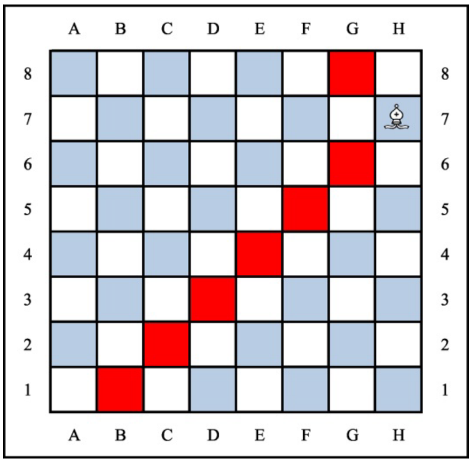

Рис. 4.1б. Поле атаки слона, имеющего 7 вариантов хода

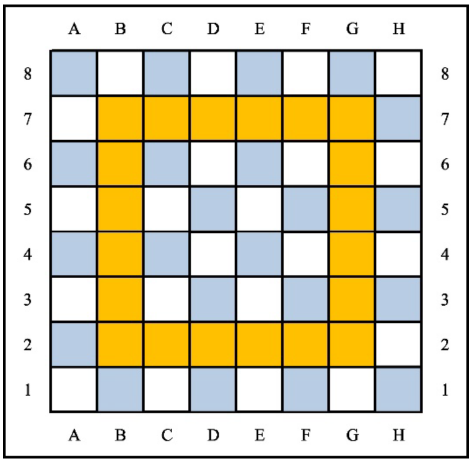

Рис. 4.2а. Положения слона, имеющего 9 вариантов хода

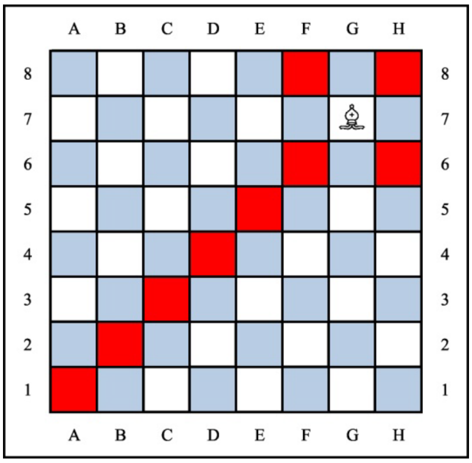

Рис. 4.1б. Поле атаки слона, имеющего 9 вариантов хода

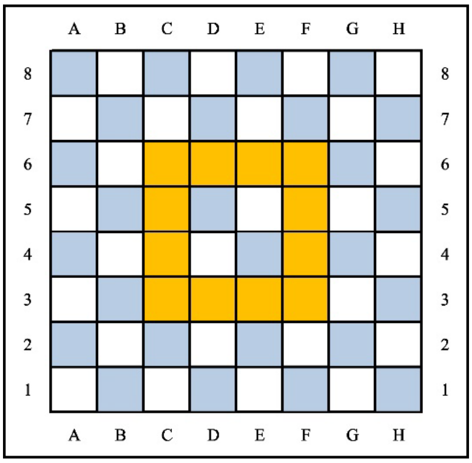

Рис. 4.3а. Положения слона, имеющего 11 вариантов хода

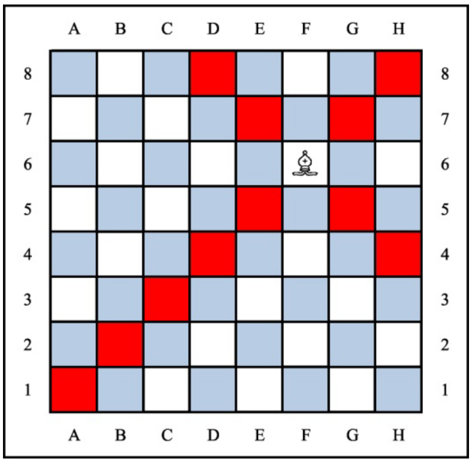

Рис. 4.3б. Поле атаки слона, имеющего 11 вариантов хода

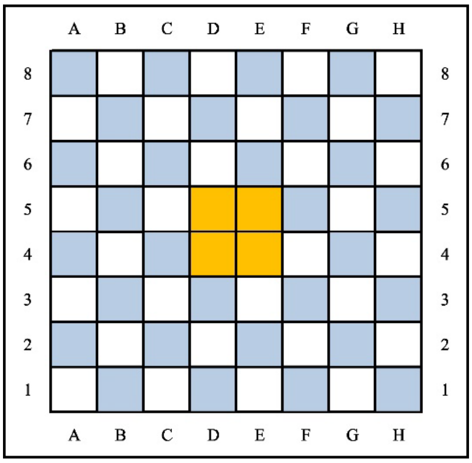

Рис. 4.4а. Положения слона, имеющего 13 вариантов хода

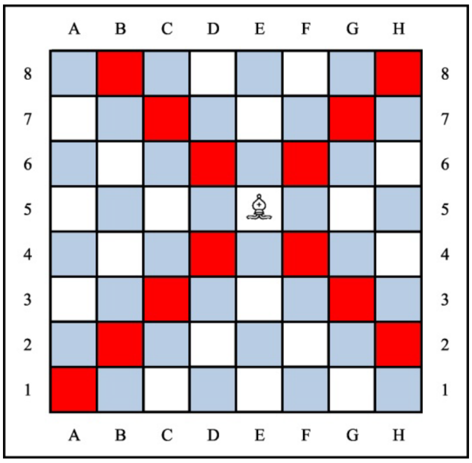

Рис. 4.4б. Поле атаки слона, имеющего 13 вариантов хода

$$P(A) = 1 - \left(\frac{28}{64}\cdot\frac{7}{63} + \frac{20}{64}\cdot\frac{9}{63} + \frac{12}{64}\cdot\frac{11}{63} + \frac{4}{64}\cdot\frac{13}{63}\right) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36} \approx 0{,}861.$$

Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены два разноцветных слона, и они не нападают друг на друга, равна $\frac{31}{36}$.

Задача 5. Два разноцветных коня не нападают друг на друга.

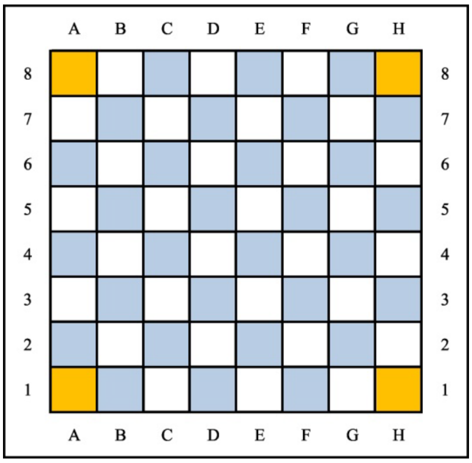

Рис. 5.1а. Положения коня, имеющего 2 варианта хода

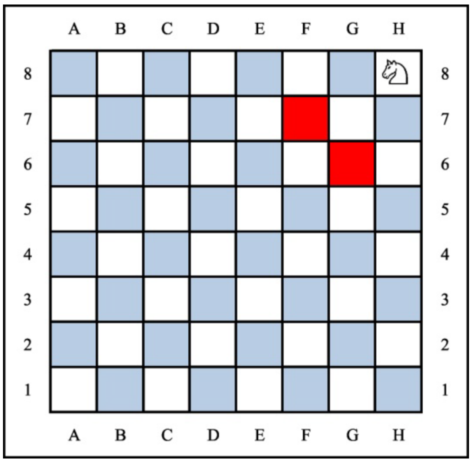

Рис. 5.1б. Поле атаки коня, имеющего 2 варианта хода

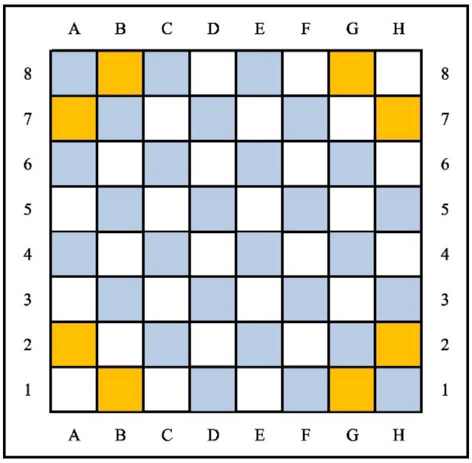

Рис. 5.2а. Положения коня, имеющего 3 варианта хода

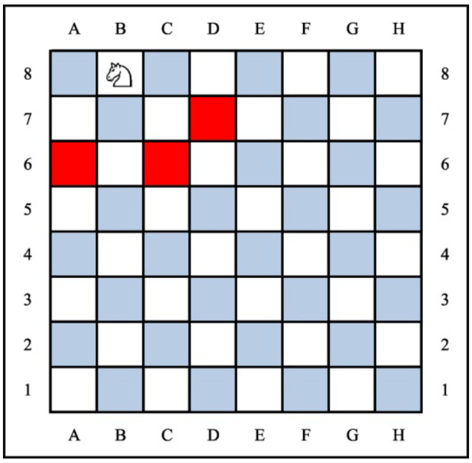

Рис. 5.2б. Поле атаки коня, имеющего 3 варианта хода

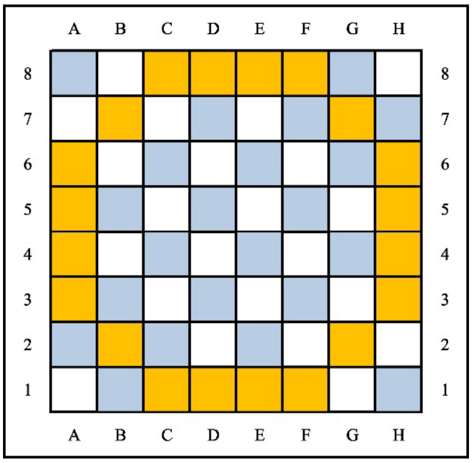

Рис. 5.3а. Положения коня, имеющего 4 варианта хода

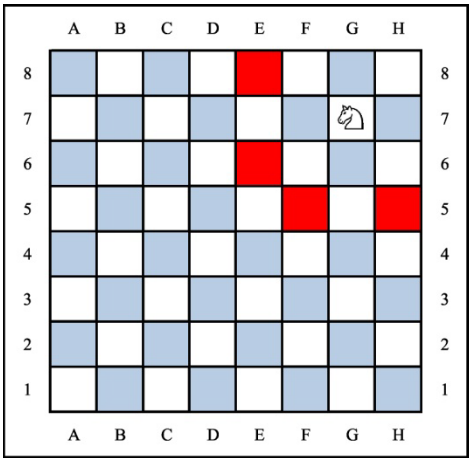

Рис. 5.3б. Поле атаки коня, имеющего 4 варианта хода

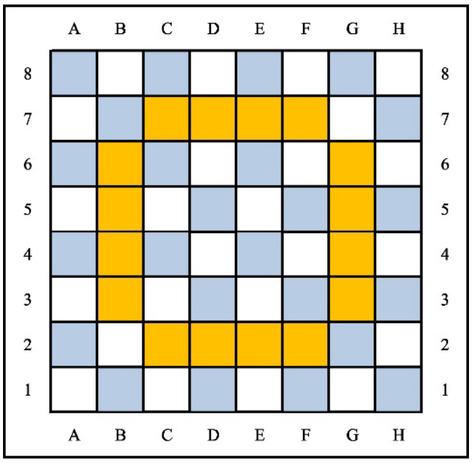

Рис. 5.4а. Положения коня, имеющего 6 вариантов хода

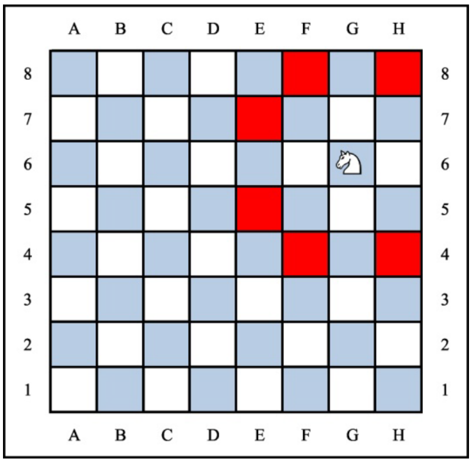

Рис. 5.4б. Поле атаки коня, имеющего 6 вариантов хода

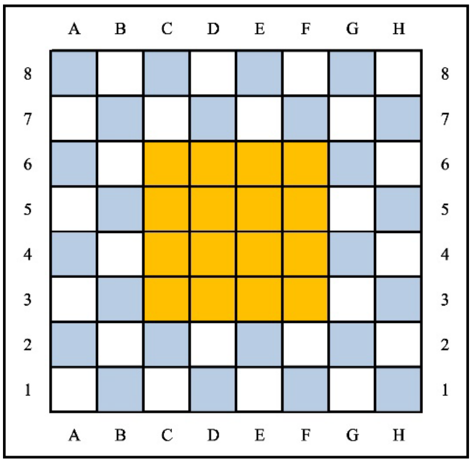

Рис. 5.5а. Положения коня, имеющего 8 вариантов хода

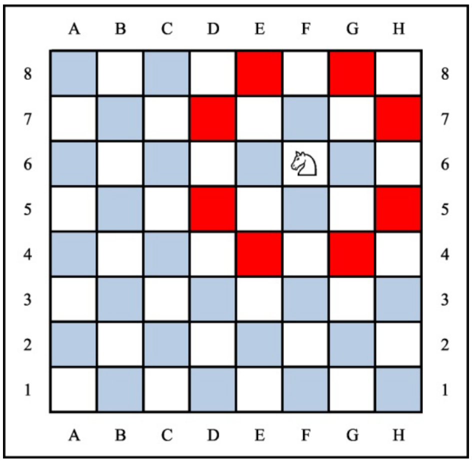

Рис. 5.5б. Поле атаки коня, имеющего 8 вариантов хода

$$P(A) = 1 - \left(\frac{4}{64}\cdot\frac{2}{63} + \frac{8}{64}\cdot\frac{3}{63} + \frac{20}{64}\cdot\frac{4}{63} + \frac{16}{64}\cdot\frac{6}{63} + \frac{16}{64}\cdot\frac{8}{63}\right) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \approx 0{,}917.$$

Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены два разноцветных коня, и они не нападают друг на друга, равна $\frac{11}{12}$.

Задача 6. Две разноцветные пешки не нападают друг на друга.

В силу свойства симметрии шахматной доски и равного количества белых и черных пешек в наборе фигур выбор цвета пешки значения не имеет. Но его нужно указать для изображения ситуации на доске, так как для белых и черных пешек на доске предусмотрены разные направления движения. Рассмотрим для определенности белую пешку, которая движется по шахматной доске снизу вверх. Будем рассматривать ситуации на шахматной доске, в которых пешка сохраняет свой статус, то есть до момента её возможного превращения в другую фигуру.

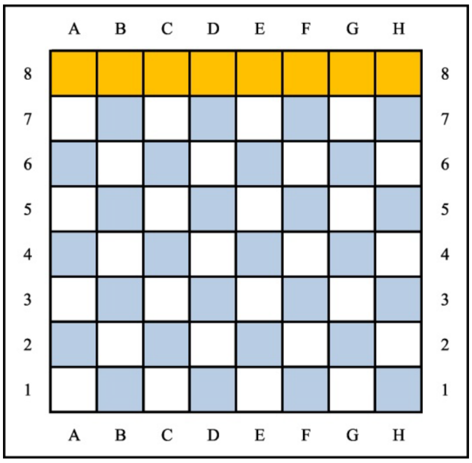

Рис. 6.1а. Положения белой пешки, не имеющей вариантов хода

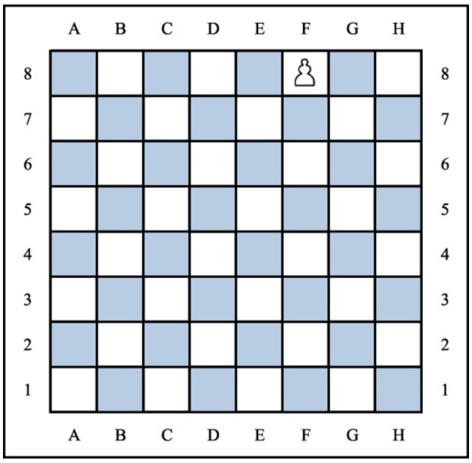

Рис. 6.1б. Поле атаки белой пешки, не имеющей вариантов хода

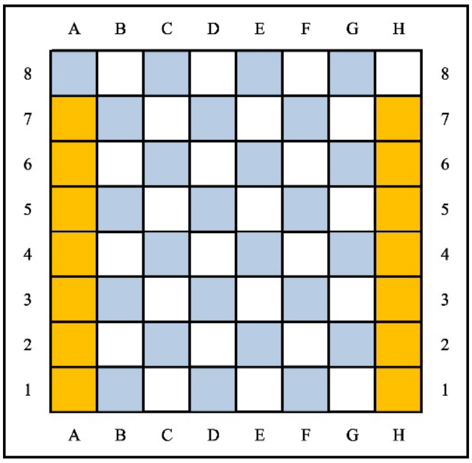

Рис. 6.2а. Положения белой пешки, имеющей 1 вариант хода

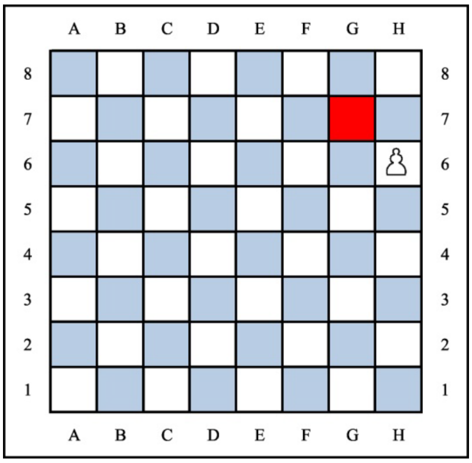

Рис. 6.2б. Поле атаки белой пешки, имеющей 1 вариант хода

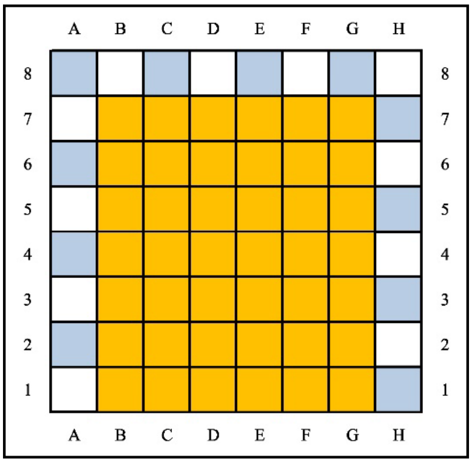

Рис. 6.3а. Положения белой пешки, имеющей 2 варианта хода

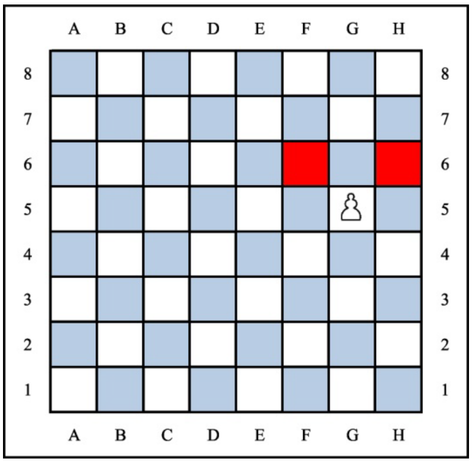

Рис. 6.3б. Поле атаки белой пешки, имеющей 2 варианта хода

$$P(A) = 1 - \left(\frac{8}{64}\cdot\frac{0}{63} + \frac{14}{64}\cdot\frac{1}{63} + \frac{42}{64}\cdot\frac{2}{63}\right) = 1 - \frac{7}{288} = \frac{281}{288} \approx 0{,}976.$$

Ответ: вероятность того, что на двух клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом поставлены две разноцветные пешки, и они не нападают друг на друга, равна $\frac{281}{288}$.

Представим в виде таблицы результаты, полученные в задачах 1-6.

Таблица 2

Результаты решения задач о двух разноцветных шахматных фигурах одинакового наименования, которые при случайной постановке на доске не нападают друг на друга

№ п/п	Наименование фигуры	Вероятность события
1	король	$\frac{43}{48} \approx 0{,}896 \approx 90\%$
2	ферзь	$\frac{23}{36} \approx 0{,}639 \approx 64\%$
3	ладья	$\frac{7}{9} \approx 0{,}778 \approx 78\%$
4	слон	$\frac{31}{36} \approx 0{,}861 \approx 86\%$
5	конь	$\frac{11}{12} \approx 0{,}917 \approx 92\%$
6	пешка	$\frac{281}{288} \approx 0{,}976 \approx 98\%$

Эта информация может быть использована для составления и решения ещё одной задачи.

Задача 7. На двух клетках шахматной доски размером 8 × 8 случайным образом поставлены две разноцветные шахматные фигуры одного наименования. Найдите вероятность того, что фигуры окажутся королями, если известно, что шахматные правила не нарушены, фигуры не нападают друг на друга.

Решение задачи 7.

Чтобы гарантированно получить на шахматной доске две разноцветные фигуры одного наименования заранее разобьём фигуры на пары, в каждой их которых будут именно такие фигуры, и получим N равновероятных по выбору пар фигур. Такое множество составляет некоторую часть – подпространство всех возможных пар шахматных фигур, на котором и будем решать задачу.

Эксперимент – отобрать случайную пару разноцветных фигур одного наименования, а затем выбрать наугад последовательно две клетки на шахматной доске и поставить на них фигуры.

Случайное событие A – клетки выбраны так, что поставленные на них фигуры отобранной пары не атакуют друг друга.

Оно наступает одновременно с одной из несовместных гипотез, образующих полную группу: гипотеза H_1 – отобрана пара королей, H_2 – пара ферзей, H_3 – пара ладей, H_4 – пара слонов, H_5 – пара коней, H_6 – пара пешек.

Вероятность каждой гипотезы можно найти по формуле (1): $P(H_i) = \frac{N(H_i)}{N}$. Здесь можно применить правила комбинаторики и $N(H_i) = R_i \cdot R_i$ – число способов выбрать пару разноцветных шахматных фигур одинакового наименования, удовлетворяющую гипотезе H_i и R_i – число фигур соответствующего наименования в наборе одного игрока. $N = \sum_{i=1}^{6} N(H_i)$ – число способов выбрать одну из возможных пар разноцветных шахматных фигур одинакового наименования. Тогда $N(H_1) = N(H_2) = 1 \cdot 1 = 1$, $N(H_3) = N(H_4) = N(H_5) = 2 \cdot 2 = 4$, $N(H_6) = 8 \cdot 8 = 64$ и $N = 78$. $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{78}$, $P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{4}{78}$, $P(H_6) = \frac{64}{78}$.

Условные вероятности события А при каждой гипотезе приведены в таблице 2 и, используя для этого события формулу полной вероятности (3), получим $P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{1}{78} \cdot \frac{43}{48} + \frac{1}{78} \cdot \frac{23}{36} + \frac{4}{78} \cdot \frac{7}{9} + \frac{4}{78} \cdot \frac{31}{36} + \frac{4}{78} \cdot \frac{11}{12} + \frac{64}{78} \cdot \frac{281}{288} = \frac{21370}{78 \cdot 288} \approx 0{,}951$.

Тогда искомая вероятность события H_1 – апостериорная вероятность гипотезы, найденная при условии, что событие уже А наступило, может быть определена по формулам Байеса: $P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{1}{78} \cdot \frac{43}{48} : \frac{21370}{78 \cdot 288} = \frac{129}{10685} \approx 0{,}012$.

Ответ: вероятность того, что поставленные на две клетки шахматной доски размером 8×8, не нападающие друг на друга разноцветные шахматные фигуры одного наименования окажутся королями, равна $\frac{129}{10685}$.

Предложенная система задач, по мнению авторов, образует кейс-задание. Решение кейса может стать содержанием учебного мини-проекта в рамках аудиторной или внеаудиторной работы. При этом если задача используется как дидактический материал для систематизации уже имеющихся знаний, с точки зрения психологии мышления она является рутинной. Однако стиль работы с задачей может перевести её в разряд инструментов формирования компонентов научного типа мышления, характеристиками которого являются: объективность, обоснованность, осознанность, системность, формализация, экспериментальный подход, моделирование. Наблюдение и сравнительный анализ найденных числовых значений вероятностей (табл. 2) создают возможности для развития характеристик мышления исследовательского типа: поисковая активность, критичность, способность оценивать информацию, генерировать идеи и др.

Заключение

Очевидно, что описание «механизма моделирования при решении вероятностных задач» допускает различные варианты [11, с.60]. Предложенная в данной работе конструкция организации учебной математической деятельности по моделированию случайного эксперимента в рамках классического подхода к определению вероятности ориентирована на развитие структурированности и полноты рассуждений процесса мышления, она предполагает выполнение обучающимся достаточно естественного набора учебных действий. Исключение составляет, пожалуй, первое действие по описанию эксперимента, которое не является традиционным для учебно-методической литературы. Приведенная в работе система задач иллюстрирует возможность согласованного описания случайного эксперимента и случайного события в терминах деятельности, что отвечает требованию полноты рассуждений. По своей сути предложенная конструкция (схема 1) задаёт ориентировочную основу учебной деятельности [3]. При этом первые четыре пункта ориентируют собственно построение математической модели, а два последних – исследование модели и её интерпретацию. Инструкционный характер схемы подчеркивает, что это не жёсткий алгоритм, а система ориентиров.

Инструкционная схема 1

Математическое моделирование случайного эксперимента

1. Описание эксперимента (с выделением единичных испытаний).
2. Описание случайного события (как результата эксперимента или некоторого из его действий).
3. Описание пространства исходов эксперимента.
4. Описание подпространства исходов эксперимента, благоприятных наступлению случайного события.
5. Выбор и применение инструмента для вычисления вероятности случайного события.
6. Формулировку ответа.

Систематическая работа с применением предложенной конструкции моделирования случайного эксперимента направлена на формирование функциональной математической грамотности обучающихся в области моделирования вероятностных задач и отвечает требования действующего ФГОС ООО и ФГОС СОО в части требований к предметным результатам освоения базового и углубленного курса математики.

Возможности математики как учебного предмета в решении актуальных проблем формирования качеств мышления были и остаются в фокусе внимания отечественных и зарубежных исследований. Поэтому идеи совершенствования методики преподавания математики, нацеленные на развитие компонентов мышления, относятся к важному направлению работы как уже практикующих педагогов, так и будущих учителей математики [12], [13].

Литература

1. Булычев В.А. Математическое моделирование при изучении элементов теории вероятностей [Текст] / В.А. Булычев, В.В. Калманович // Математика в школе. – 2009. – № 3. – С. 23-27.
2. Всероссийская (с международным участием) студенческая олимпиада «Спектр» (2024 г.). Финальные задания по математике [Электронный ресурс] // URL: https://lspu-lipetsk.ru/modules.php?name=spektr_olymp_2024 (дата обращения 25.08.2025).
3. Высоцкий И.Р. Теория вероятностей и статистика: 7-9-ые классы: учебное пособие [Текст] / И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко; под ред. И.В. Ященко. – Москва: Просвещение, 2023. – 272 с.
4. Горлова С.Н. Методический потенциал математической задачи в формировании исследовательской компетенции обучающихся [Электронный ресурс] / С.Н. Горлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – 2020. – № 2(107). – С. 130-138. – DOI 10.37972/chgpu.2020.107.2.017. – URL: www.dx.doi.org/10.37972/chgpu.2020.107.2.017 (дата обращения 25.08.2025).
5. Гальперин П.Я. Лекции по психологии. Учебное пособие [Текст] / П.Я. Гальперин. – М.: АСТ: КДУ, 2007. – 400 с.
6. Гальперин П.Я. О формировании умственных действий и понятий [Электронный ресурс] / П.Я. Гальперин // Культурно-историческая психология. – 2010. – Т. 6. – № 3. – С. 111–114. – URL: https://psyjournals.ru/kip/2010/n3/30843.shtml (дата обращения 25.08.2025).
7. Леонтьев А.Н. Лекции по общей психологии: Учеб. пособие для вузов по спец. «Психология» [Текст] / А.Н. Леонтьев; под ред. Д.А. Леонтьева, Е.Е. Соколовой. – М.: Смысл, 2000. – 509 с.
8. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений [Текст] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2014. – 304 с.
9. Макеева О.В. Моделирование случайных явлений: из опыта работы с будущими учителями математики [Текст] / О.В. Макеева // Управление качеством образования: проблемы и перспективы : Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 50-летию создания кафедры методики преподавания математики УлГПИ, Ульяновск, 08 декабря 2023 года. – Ульяновск: Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 2024. – С. 43-50.
10. Мироненко С.И. Методические аспекты формирования научного стиля мышления школьников в курсе математики [Электронный ресурс] / С.И. Мироненко // Молодежная наука: тенденции развития. – 2024. – № 4. – С. 24-37. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79331634 (дата обращения 25.08.2025).
11. Максимова О.В. О математических моделях на примере решения некоторых школьных вероятностных задач [Текст] / О.В. Максимова // Математика в школе. – 2024. – № 1. – С. 24-32.
12. Спиридонов В.Ф. Психология мышления. Решение задач и проблем: учебное пособие для вузов [Текст] / В.Ф. Спиридонов. – Москва: Издательство ЮРАЙТ, 2022. – 323 с.

13. Толочко М.В. Математическое моделирование в решении задач по теории вероятностей школьного курса математики [Электронный ресурс] / М.В. Толочко, Е.Н. Пузырева // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2024. – № 1(33). – С. 59-64. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=65639380 (дата обращения 25.08.2025).