УДК. 537.67, 550.38
DOI: 10.12737/7495

Поступила в редакцию 15.11.2014
Принята к публикации 25.01.2015

К ВЫВОДУ СООТНОШЕНИЯ ДЕССЛЕРА–ПАРКЕРА–СКОПКЕ

ON THE DERIVATION OF DESSLER–PARKER–SCKOPKE RELATION

В.А. Мазур†
Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия

И.Г. Шухман
Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия, shukhman@iszf.irk.ru

V.A. Mazur†
Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia

I.G. Shukhman
Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia
shukhman@iszf.irk.ru

Аннотация. В работе дается простой вывод известного соотношения Десслера–Паркера–Скопке (ДПС), связывающего магнитное поле кольцевого тока с кинетической энергией составляющих его частиц. Исходя из функции распределения частиц, зависящей от интегралов движения в аксиально-симметричном магнитном поле, мы вычисляем соответствующие моменты (ток и кинетическую энергию). В отличие от вывода соотношения ДПС, данного в пионерных работах, предлагаемый подход является наиболее прямым и исходит из первых принципов.

Ключевые слова: магнитосфера Земли, кольцевой ток, плазма.

Abstract. We propose a simple derivation of the known Dessler–Parker–Sckopke (DPS) relation which connects the magnetic field produced by the ring current with the kinetic energy of its particles. We start from the distribution function of particles which depends on the integrals of motion in an axially-symmetric magnetic field and calculate the corresponding moments (current and kinetic energy). Unlike the derivation of the DPS relation given in the pioneer works, the approach proposed here is more straightforward and is based on the first principles.

Keywords: magnetosphere, ring current, plasma.

1. Одним из наиболее фундаментальных и красивых результатов физики магнитосферы является соотношение Десслера–Паркера–Скопке (ДПС), связывающее между собой кинетическую энергию частиц кольцевого тока K и магнитное поле этого тока на Земле (строго говоря, в ее центре) $\Delta B_z(0)$:

$$\frac{\Delta B_z(0)}{B_\mathrm{E}} = -\frac{2}{3}\frac{K}{U_\mathrm{E}}. \tag{1}$$

Здесь B_E — значение геомагнитного поля на земном экваторе, $U_\mathrm{E} = \frac{1}{3} B_\mathrm{E}^2 R_\mathrm{E}^3$ — энергия геомагнитного поля вне земной поверхности, R_E — радиус Земли. Предполагается, что геомагнитное поле является дипольным и для частиц кольцевого тока можно пренебречь их кулоновскими соударениями. Кроме того, для них выполняется условие применимости дрейфового приближения $\rho/R_\mathrm{E} \ll 1$, где ρ — характерный ларморовский радиус частиц.

В первоначальной работе Десслера и Паркера [Dessler, Parker, 1959] было рассмотрено два предельных случая питч-углового распределения частиц кольцевого тока: изотропное распределение, при котором частицы однородно распределены вдоль силовой линии геомагнитного поля, и предельно анизотропное (все частицы на экваторе имеют питч-угол 90°), при котором частицы движутся в экваториальной плоскости. Для вывода своего соотношения Десслер и Паркер разбивали кольцевой ток на две составляющие: дрейфовый ток, обусловленный дрейфом частиц в неоднородном геомагнитном поле, и ток намагниченности, связанный с ларморовским вращением частиц. Они показали, что магнитные поля обоих токов пропорциональны кинетической энергии частиц и их сложение приводит к соотношению (1). В работе Скопке [Sckopke, 1966] результат Десслера–Паркера обобщен на произвольное питч-угловое распределение частиц кольцевого тока. В своей работе Скопке также разбивал ток на две составляющие и, кроме того, использовал гидродинамические соотношения, выражающие плотность тока через давление плазмы — поперечное и продольное по отношению к направлению магнитного поля.

По нашему мнению, подход Десслера, Паркера и Скопке вызывает ряд вопросов. Следующий пример демонстрирует, что их вывод не совсем логичен. Как известно, однородная и изотропная, скажем максвелловская, функция распределения удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению в произвольном стационарном, в том числе и дипольном, магнитном поле. Следовательно, она описывает возможное в таком поле распределение частиц. Частицы испытывают ларморовское вращение и дрейф в неоднородном магнитном поле (причем ионы и электроны — в противоположные стороны). Но из функции распределения с очевидностью следует, что их ток равен нулю и магнитного поля они не создают. Таким образом, наличие дрейфа и ларморовского вращения отнюдь не означает наличия электрического тока. Парадоксы такого рода, обусловленные различием между током частиц и током ведущих центров, были проанализированы еще на заре плазменных исследований (см., например, [Schlüter, 1952; Спитцер, 1957; Брагинский, 1958]). Из этого анализа следует, что критически важными для существования тока являются пространственная неоднородность функции распределения частиц и, следовательно, наличие градиентов плотности и давления.

Определенные сомнения связаны и с использованием в работе [Sckopke, 1966] гидродинамических соотношений, выражающих плотность тока через поперечное и продольное давление плазмы. Применение гидродинамики к бесстолкновительной (но замагниченной) плазме до сих пор является спорным вопросом. Вывод соответствующих уравнений невозможен без некоторых феноменологических допущений [Chew et al., 1956; Волков, 1964].

Сказанное можно резюмировать так: предположения и допущения, сделанные в работах [Dessler, Parker, 1959] и [Sckopke, 1966], не адекватны простому и универсальному характеру полученного соотношения.

С другой стороны, имеется работа [Olbert et al., 1968], в которой использован общий подход, основанный на теореме вириала. Впрочем, при внимательном анализе видно, что процедура вывода основана на тех же самых предположениях. Геомагнитное поле считается дипольным: это необходимо, чтобы энергию взаимодействия магнитного поля кольцевого тока с Землей можно было записать в виде $-(\mathbf{M}\cdot\Delta\mathbf{B}(0))$, где $\mathbf{M}$ — магнитный момент Земли. Кроме того, предполагается, что частицы кольцевого тока в достаточной степени «оторваны» от Земли, чтобы можно было пренебрегать их прямым механическим взаимодействием. Но это означает, что $\rho \ll R_E$. Тем не менее сам вывод носит очень общий характер и не требует практически никаких вычислений.

В этом выводе единое уравнение теоремы вириала расчленяется на две части. В одну часть группируются члены, соответствующие Земле как таковой: ее гравитационная энергия, энергия напряжения земных недр и энергия геомагнитного поля. Считается, что эта часть уравнения удовлетворяется сама по себе. После этого остаются только члены, отвечающие кольцевому току (среди них доминирующими являются энергия его взаимодействия с Землей и кинетическая энергия). Отсюда сразу следует соотношение ДПС. Однако процедура, при которой удаляются главные члены уравнения и оставляются члены, чрезвычайно малые по сравнению с ними (на семнадцать–восемнадцать порядков), вызывает большое подозрение. Ничтожная разбалансированность главных членов может совершенно изменить результат. Так, можно заметить, что сила Ампера, действующая на токи в центре Земли со стороны магнитного поля кольцевого тока, вызывает дополнительные напряжения в ней и, следовательно, меняет энергию поля напряжений. Кроме того, теперь уже слишком общий характер вывода оставляет ощущение некоего фокуса, при котором не вскрываются причины выполнения выводимого соотношения.

Тем не менее сказанное выше не означает, что соотношение ДПС неверно. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы продемонстрировать прямой и не вызывающий никаких сомнений способ его вывода. Он основан на первых принципах механики и электродинамики и не использует никаких дополнительных соображений спорного характера. Кроме того, он проясняет некоторые важные обстоятельства, остающиеся в тени в обсуждавшихся выше работах.

Заметим, что, хотя со времени пионерных работ миновало уже более полувека, в литературе отсутствует вывод соотношения Десслера–Паркера–Скопке, предлагаемый ниже. По нашему мнению, этот вывод представляет определенный интерес.

2. Векторный потенциал дипольного магнитного поля $\mathbf{A}=\mathbf{M}\times\mathbf{r}/r^3$. В сферической системе координат (r, φ, θ), где θ — геомагнитная широта, имеем $\mathbf{A}=(0, A_\varphi, 0)$, причем $A_\varphi=M\cos\theta/r^2$. Силовая линия описывается уравнением $r=a\cos^2\theta$. Напряженность магнитного поля на данной силовой линии

$$B = \frac{M}{a^3} b(\theta),\ b(\theta) = \frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\cos^6\theta}. \qquad (2)$$

Как известно, решением бесстолкновительного кинетического уравнения в стационарном поле является произвольная функция интегралов движения. Для частицы в стационарном аксиально-симметричном магнитном поле можно указать три таких интеграла — два точных и один приближенный. Точным интегралом движения в произвольном стационарном магнитном поле является модуль скорости частицы v. В аксиально-симметричном магнитном поле точным интегралом движения является также обобщенный импульс по циклической азимутальной координате:

$$P_\varphi = (m\upsilon_\varphi + eA_\varphi / c) r\cos\theta,$$

где m — масса частицы, e — заряд, а c — скорость света. Для удобства дальнейших выкладок вместо P_φ будем использовать

$$\tilde{p} = \frac{c}{e} P_\varphi = p + \frac{mc}{e}\upsilon_\varphi r\cos\theta,$$
$$p \equiv A_\varphi r\cos\theta = \frac{M\cos^2\theta}{r}.$$

Отметим, что функция $p(r, \theta)$ постоянна на силовых линиях и может быть записана в виде $p=M/a$. Отношение второго члена в выражении для $\tilde{p}$ к первому по порядку величины равно ρ/a. В условиях применимости дрейфового приближения существует еще один, приближенный интеграл движения — адиабатический инвариант $\tilde{\mu} = \tilde{\upsilon}_\perp^2 / B$, где $\tilde{\boldsymbol{\upsilon}}_\perp = \boldsymbol{\upsilon}_\perp - \boldsymbol{\upsilon}_\mathrm{d}$, а $\boldsymbol{\upsilon}_\mathrm{d}$ — скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле. В дипольном поле она направлена по азимуту, $\boldsymbol{\upsilon}_\mathrm{d} = \mathbf{e}_\varphi \upsilon_\mathrm{d}$, и по величине равна (см., например, [Dessler, Parker, 1959])

$$\upsilon_\mathrm{d} = \frac{3mc}{eM}\left(\upsilon_\parallel^2 + \frac{1}{2}\upsilon_\perp^2\right) a^2 V(\theta),$$
$$V(\theta) = \frac{\cos^5\theta(1+\sin^2\theta)}{(1+3\sin^2\theta)^2}. \qquad (3)$$

Учитывая, что в дрейфовом приближении характерное значение отношения $\upsilon_\mathrm{d}/\upsilon_\perp \sim \rho/\alpha$ мало, можно приближенно написать

$$\tilde{\mu} = \mu - 2\frac{\upsilon_d \upsilon_\varphi}{B}, \ \mu = \frac{\upsilon_\perp^2}{B}. \quad (4)$$

Таким образом, общее стационарное решение бесстолкновительного кинетического уравнения в условиях применимости дрейфового приближения является функцией от трех интегралов движения, $F = F(\upsilon, \tilde{p}, \tilde{\mu})$. Если эта функция в действительности не зависит от переменных $\tilde{\mu}$ и $\tilde{p}$, то она является изотропной в пространстве скоростей, т. е. бестоковой и одновременно не зависящей от координат. Мы видим, что наличие тока и неоднородность по пространственным координатам автоматически связаны друг с другом.

Существование земного шара неизбежно приводит к неоднородности функции распределения. Нижняя граница кольцевого тока должна лежать достаточно высоко над плотной атмосферой, т. е. должно выполняться условие $F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}) = 0$ при $r<a_0$, где a_0 — минимальный радиус нижней границы. Во всяком случае $a_0>R_E$. Важная роль этого условия будет продемонстрирована в разделе 6.

Для проведения дальнейших выкладок зависимость функции распределения от переменной $\tilde{\mu}$ представим в виде разложения в ряд Тейлора:

$$F = F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}^n f_n(\upsilon, \tilde{p}). \quad (5)$$

Поскольку интересующие нас величины — кинетическая энергия кольцевого тока и создаваемое им магнитное поле — являются аддитивными, то сначала мы рассмотрим отдельный член разложения (5), т. е. будем полагать $F = F(\upsilon, \tilde{p}, \tilde{\mu}) = \tilde{\mu}^n f_n(\upsilon, \tilde{p})$.

Используя (2) и выражение для $\tilde{p}$ и разлагая по малым слагаемым в них, получаем с точностью до первого порядка по параметру ρ/a

$$F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}) = \mu^n f_n(\upsilon, p) - \frac{mc}{eM}\upsilon_\varphi \times$$
$$\times\left[6n\left(\frac{\upsilon^2}{B} - \frac{\mu}{2}\right) a^2 V(\theta) \mu^{n-1} f_n(\upsilon, p) + \right. \quad (6)$$
$$\left. + + a^3 \cos^3\theta \mu^n \frac{\partial f_n(\upsilon, p)}{\partial a}\right].$$

Здесь учтено, что $\partial f_n/\partial p = -(a^2/M)\,(\partial f_n/\partial a)$. Далее с помощью этого выражения мы будем вычислять плотность кинетической энергии и плотность тока. При вычислении энергии достаточно оставить только вклад первого члена, так как второй дает лишь малую поправку к нему. Однако при вычислении тока вклад первого члена обращается в нуль, так что и весь ток определяется вторым членом.

3. Плотность кинетической энергии дается выражением

$$k = \frac{1}{2}\int d\mathbf{\upsilon} m\upsilon^2 F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\int d\mathbf{\upsilon} m\upsilon^2 \mu^n f_n(\upsilon, p). \quad (7)$$

Здесь $d\mathbf{\upsilon} = \upsilon_\perp d\upsilon_\perp d\upsilon_\parallel d\psi$, где ψ — азимутальный угол в пространстве скоростей, отсчитываемый от нормали к силовой линии. Переходя к переменным υ, μ, ψ, имеем

$$d\mathbf{\upsilon} = \frac{1}{2}\sum_\sigma \frac{B\upsilon\, d\upsilon\, d\mu\, d\psi}{\sqrt{\upsilon^2 - \mu B}}, \quad (8)$$

где σ — знак продольной скорости, по которому подразумевается суммирование. Учитывая симметрию подынтегрального выражения по ψ и σ, имеем

$$k = \pi m B\int_0^\infty d\upsilon \upsilon^3 f_n(\upsilon, p) \int_0^{v^2/B} \frac{\mu^n d\mu}{\sqrt{\upsilon^2 - \mu B}}.$$

Внутренний интеграл вычисляется явно, и мы получаем

$$k(a, \theta) = \pi m \eta_n \frac{g_n(a)}{[B(a, \theta)]^n}. \quad (9)$$

Здесь обозначено

$$\eta_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{-1/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)},$$
$$g_n(a) = \int_0^\infty d\upsilon \upsilon^{2n+4} f_n(\upsilon, p(a)), \quad (10)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Наличие нижней границы кольцевого тока означает, что при $a<a_0$ функция распределения $f_n(\upsilon, p(a)) = 0$ и, следовательно, $g_n(a)=0$, $k(a, \theta)=0$. Зависимость плотности энергии $k(a, \theta)$ от угла θ описывается функцией $1/[B(a, \theta)]^n$. При $n=0$ она постоянна на силовой линии, функция распределения нулевого приближения в этом случае равна $f(\upsilon, p)$ и, следовательно, изотропна. Именно это мы имели в виду, когда говорили об изотропном распределении в одном частном случае, рассмотренном Десслером и Паркером. Точная функция при этом, конечно, не изотропна из-за зависимости $\tilde{p}$ от v_φ. Впрочем, функция распределения с $n=0$, в силу своего постоянства вдоль силовой линии, не удовлетворяет условию отсутствия частиц при $a<a_0$ и поэтому не может входить в суперпозицию (5). Все остальные члены, начиная с $n=1$, достаточно быстро убывают к концам силовой линии и с разумной точностью могут быть признаны приемлемыми.

4. Плотность тока описывается выражением

$$j_\varphi = e\int d\mathbf{\upsilon} \upsilon_\varphi F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}).$$

Вклад в этот интеграл дает только второй член в разложении (6). В нем фигурирует зависящий от угла ψ множитель $\upsilon_\varphi^2 = \upsilon_\perp^2 \sin^2\psi$. Интегрирование по этому углу превращает его в множитель $\pi\upsilon_\perp^2 = \pi\mu B$. После этого имеем

$$j(a, \theta) = -\frac{\pi mc}{M}\frac{\eta_n}{2n+3}\frac{2a^2}{[B(a, \theta)]^n}\times$$
$$\times\left[3n(n+2)\, V(\theta) g_n(a) + (n+1)\cos^3\theta\, a\frac{dg_n(a)}{da}\right].$$

Здесь использовано соотношение $\eta_{n+1}/\eta_n = 2(n+1)/$ $/(2n+3)$.

5. Полная кинетическая энергия частиц кольцевого тока есть

$$K = \int d\mathbf{r}\, k(a, \theta). \quad (11)$$

В сферической системе координат, с учетом аксиальной симметрии всех интересующих нас функций, $d\mathbf{r}=2\pi r^2 dr\cdot\cos\theta\, d\theta$. Но далее вместо координаты r мы будем использовать координату a. Тогда $d\mathbf{r}=2\pi a^2 da\cdot\cos^7\theta\, d\theta$ и выражение (11) можно записать следующим образом:

$$K = 2\pi^2 m \frac{\eta_n \xi_n}{M^n} \int_0^\infty da\, a^{3n+2} g_n(a). \quad (12)$$

Здесь обозначено

$$\xi_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^7\theta}{b^n(\theta)} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^{6n+7}\theta}{(1+3\sin^2\theta)^{n/2}} d\theta$$

и использовано выражение (2) для $B(a, \theta)$.

6. Согласно закону Био–Савара, магнитное поле кольцевого тока в начале координат

$$\Delta B_z(0) = \frac{1}{c} \int d\mathbf{r}\, \frac{j\cos\theta}{r^2}.$$

По аналогии с предыдущим записываем его в виде

$$\Delta B_z(0) = -2\pi^2 m \frac{\eta_n}{M^{n+1}} \times$$
$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\cos^4\theta}{\left[b(\theta)\right]^n} \int_0^\infty da \left[\frac{6n(n+2)}{2n+3} V(\theta) a^{3n+2} g_n(a) + \right.$$
$$\left. + \frac{2(n+1)}{2n+3} \cos^3\theta\, a^{3n+3} \frac{dg_n(a)}{da} \right].$$

Последний член в квадратной скобке преобразуем с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^\infty da\, a^{3n+3} \frac{dg_n(a)}{da} =$$
$$= a^{3n+3} g_n(a) \Big|_0^\infty - 3(n+1) \int_0^\infty da\, a^{3n+2} g_n(a).$$

Внеинтегральный член исчезает, если произведение $a^{3n+3} g_n(a)$ обращается в нуль в начале координат и на бесконечности. Первое условие выполняется, поскольку $g_n(a)$=0 при $a<a_0$. Второе условие означает, что плотность энергии частиц кольцевого тока должна быстро спадать на бесконечности. Фактически это означает, что ток должен быть локализован на некотором ограниченном интервале магнитных оболочек. Это условие не выполняется для упоминавшейся во вводном пункте однородной и изотропной функции распределения. Для нее внеинтегральный член не обращается в нуль и поэтому не выполняется соотношение ДПС.

Опуская внеинтегральный член, получаем

$$\Delta B_z(0) = -12\pi^2 m \frac{\eta_n}{M^{n+1}} \times$$
$$\times \left[\frac{n(n+2)}{2n+3} \chi_n - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \xi_n \right] \int_0^\infty da\, a^{3n+2} g_n(a). \quad (13)$$

Здесь обозначено

$$\chi_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\cos^4\theta}{\left[b(\theta)\right]^n} V(\theta) =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\cos^{6n+9}\theta (1+\sin^2\theta)}{(1+3\sin^2\theta)^{n/2+2}}.$$

В приложении показано, что

$\chi_n=\xi_n(n+4/3)/(n+2)$.

Подставляя это равенство в выражение (13), приводим его к виду

$$\Delta B_z(0) = 4\pi^2 m \frac{\eta_n \xi_n}{M^{n+1}} \int_0^\infty da\, a^{3n+2} g_n(a). \quad (14)$$

7. Поделив (14) на (12), получаем $\Delta B_z(0)/K=2/M$. Учтем теперь, что $B_E = -M/R_E^3$ и $U_E = \frac{1}{3} M^2 / R_E^3$. Минус в выражении для B_E означает, что геомагнитное поле на земном экваторе направлено против магнитного момента Земли. В результате мы приходим к соотношению (1).

Но пока оно доказано для отдельного члена в разложении (5). Обозначим вклады n-го члена в полную энергию и магнитное поле K_n и $[\Delta B_z(0)]_n$ соответственно. Мы доказали, что $[\Delta B_z(0)]_n=(2/M)K_n$. Но тогда

$$\frac{\Delta B_z(0)}{K} = \frac{\sum\left[\Delta B_z(0)\right]_n}{\sum K_n} = \frac{(2/M)\sum K_n}{\sum K_n} = \frac{2}{M}. \quad (15)$$

Тем самым соотношение (1) доказано для любой функции распределения, разлагающейся в ряд Тейлора (5).

Этот результат можно еще несколько обобщить. Предположим, что функция распределения $F(v, \tilde{\mu}, \tilde{p})$ имеет в точке $\tilde{\mu}=0$ степенную особенность типа $\tilde{\mu}^\alpha$ с нецелым значением α. Тогда она, вообще говоря, разлагается в ряд

$$F = F(\upsilon, \tilde{\mu}, \tilde{p}) =$$
$$= \tilde{\mu}^\alpha \sum_{n=0}^\infty \tilde{\mu}^n f_n(\upsilon, \tilde{p}) = \sum_{n=0}^\infty \tilde{\mu}^{n+\alpha} f_n(\upsilon, \tilde{p}). \quad (16)$$

Легко убедиться, что в предыдущем выводе мы нигде не использовали тот факт, что n — целое число. Поэтому наш вывод в равной степени применим и к любой степени n+α, а следовательно, и ко всему ряду (16).

Выше мы привели вывод соотношения (1) для одного сорта частиц с массой m и зарядом e, так что в качестве $\Delta B_z(0)$ в нем пока следует понимать поле, создаваемое частицами одного сорта, а в качестве K — их кинетическую энергию. Однако, как это следует из (15), отношение $\Delta B_z(0)/K$ универсально, т. е. не зависит от m и e. Следовательно, соотношение (1) выполняется для кольцевого тока в целом.

Отметим, что приведенный выше вывод соотношения ДПС, впрочем, как и вывод, предложенный в пионерных работах, ограничен несколькими предположениями. Так, в нем не учитываются эффект, связанный с искажением полного магнитного поля самим кольцевым током, и влияние внеземных источников, отличных от кольцевого тока. Оба этих фактора могут сделать конфигурацию поля достаточно сильно отличающейся от дипольной и привести к модификации соотношения ДПС.

Работа частично поддержана программой Президиума РАН № 22 и грантами РФФИ № 12-0200031 и 14-05-00080.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Необходимо доказать, что равна нулю величина $\delta_n = (n+2)\chi_n - (n+4/3)\xi_n$. В развернутом виде, полагая $\sin\theta = x$, имеем

$$\delta_n = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} dx \frac{(1-x^2)^{3n+3}\left[1-3(3n+4)x^2-3(5n+7)x^4\right]}{(1+3x^2)^{n/2+2}}.$$

Представим этот интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\delta_n = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{3n+3}}{(1+3x^2)^{n/2+1}} d(x-x^3) -$$

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{3n+3} x^2\left[(3n+4)-(5n+4)x^2\right]}{(1+3x^2)^{n/2+2}} dx.$$

Первый интеграл берем по частям и убеждаемся, что он в точности равен второму, так что $\delta_n=0$. Идея этого преобразования принадлежит Скопке [Sckopke, 1966].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Брагинский С.И. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 645–653.

Волков Ф.Т. Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 3–19.

Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 112 с.

Chew G.F., Goldberger H.L., Low F.E. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1956. V. 236. P. 112–118. DOI: 10.1098/rspa.1956.0116.

Dessler A.J., Parker E.N. Hydromagnetic theory of geomagnetic storms // J. Geophys. Res. 1959. V. 64. P. 2239–2252. DOI: 10.1029/JZ064i012p02239.

Olbert S., Siscoe G.L., Vasyliunas V.M. A simple derivation of the Dessler–Parker–Sckopke relation // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 1115–1116. DOI: 10/1029/JA073i003p0115.

Schlüter A. Plasma im Magnetfeld // Annalen der Physik. 1952. V. 445. P. 422–428. DOI: 10.1002/andp.19524450804.

Sckopke N.A. General relation between the energy of trapped particles and the disturbance field near the Earth // J. Geophys. Res. 1966. V. 71. P. 3125–3130. DOI: 10.1029/JZ071i013 p03125.

REFERENCES

Braginskii S.I. On the behavior of fully ionized plasma in a strong magnetic field. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1957, vol. 33, pp. 645–653 (in Russian).

Chew G.F., Goldberger H.L., Low F.E. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1956, vol. 236, pp. 112–118. DOI: 10.1098/rspa.1956.0116.

Dessler A.J., Parker E.N. Hydromagnetic theory of geomagnetic storms. *J. Geophys. Res.* 1959, vol. 64, pp. 2239–2252. DOI: 10.1029/JZ064i012p02239.

Olbert S., Siscoe G.L., Vasyliunas V.M. A simple derivation of the Dessler–Parker–Sckopke relation. *J. Geophys. Res.* 1968, vol. 73, pp. 1115–1116. DOI: 10/1029/JA073i003p0115.

Schlüter A. Plasma im Magnetfeld. *Annalen der Physik.* 1952, vol. 445, pp. 422–428. DOI: 10.1002/andp.19524450804.

Sckopke N.A. General relation between the energy of trapped particles and the disturbance field near the Earth. *J. Geophys. Res.* 1966, vol. 71, pp. 3125–3130. DOI: 10.1029/JZ071i013p03125.

Spitzer L. *Fizika polnost'yu ionizovannogo gaza* [Physics of Fully Ionized Gases]. Moscow, 1957, 112 p. (in Russian). [English edition: *Physics of Fully Ionized Gases*. New York, Interscience Publ., 1956, 105 p.].

Volkov. F.T. Hydrodynamic description of strongly rarefied plasma. Leonovich M.A. (ed.). *Voprosy teorii plazmy* [Reviews of Plasma Physics]. Moscow, Atomizdat Publ., 1964, iss. 4. pp. 3–19 (in Russian). [English edition: *Reviews of Plasma Physics*. New York, Consultants Bureau, 1966, vol. 4, pp. 1–17].