

И.А. Никитов, И.С. Мельник, Е.П. Гаврилов, В.Н. Ланцов

## **ТЕНЗОРЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОГО БАЛАНСА**

*Рассмотрен вариант метода гармонического баланса, где линейная и нелинейная части моделируются в частотной области. Решена задача вычисления спектра в нелинейных элементах. В статье представлен обзор методов использования тензоров в задачах моделирования в САПР электроники. Описаны методы декомпозиции тензоров. Представлен возможный вариант использования тензорного исчисления в задачах спектрального баланса для САПР электроники.*

**Ключевые слова:** спектральный баланс, нелинейные элементы, расчет спектра, тензоры, разложения.

I.A. Nikitov, I.S. Melnik, E.P. Gavrilov, V.N. Lantsov

## **SIMULATION OF NONLINEAR CIRCUITS BY SPECTRAL BALANCE METHOD USING TENSORS**

*The version of harmonic balance method where the linear and nonlinear parts are modeled in frequency domain is described. The task of spectra calculation in nonlinear elements is solved. In this paper the review of methods for tensor usage at simulation tasks into electronic CAD systems are discussed. The methods of tensor decomposition are described. The possible version of tensors usage in the tasks of spectral balance method for electronic CAD systems is presented.*

**Keywords:** spectral balance, nonlinear elements, spectral calculation, tensors, decompositions.

### **Введение**

В связи с трудностью и длительностью проектирования электронных систем разработчиками программного обеспечения САПР постоянно совершенствуются методы и алгоритмы численных методов решения задач анализа нелинейных схем, особенно в интегральном исполнении, при воздействии сложных входных сигналов [1].

Объектом исследований в данной работе являются нелинейные электронные схемы, модель которых относится к сложным интегро-дифференциальным уравнениям высокой размерности.

Предмет исследования – методы спектрального баланса для решения нелинейных уравнений с использованием тензорных разложений.

Целью данной работы является разработка новых методов, алгоритмов, а в конечном итоге, инженерных программ для численного решения уравнений математических моделей электронных схем на основе методов спектрального баланса и тензорных декомпозиций.

### **1. Метод спектрального баланса**

Пусть нелинейная схема описывается системой нелинейных итегро-дифференциальных уравнений (СНИДУ) общего вида

$$f(v(t), t) = i(v(t)) + \frac{dq(v(t))}{dt} + \int_{-\infty}^t y(t - \tau)v(\tau)d\tau + i_E(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $v(t)$  – вектор узловых напряжений размерностью  $N$ ;  $i(v(t))$  – вектор тока резистивных элементов;  $q(v(t))$  – заряд конденсаторов;  $u(t)$  – токи входных источников;  $y(t)$  – импульсная характеристика линейной части схемы;  $i$  и  $q$  представляют только нелинейные элементы [1].

Метод спектрального баланса является разновидностью метода гармонического баланса (ГБ), когда и линейная и нелинейная части модели схемы описываются в частотной области [2, 3]. Система уравнений модели в этом случае будут иметь вид

$$f(V) = I(V) + \Omega Q(V) + Y(\omega)V - I_E = 0. \quad (2)$$

Здесь  $F(V)$ ,  $I(V)$ ,  $Q(V)$ ,  $V$  – векторы размерностью  $[(2K+1)*N]$ , содержащие спектр в каждом узле схемы. Матрица  $Y$  – является блочной, матрица  $\Omega$ , – блочно-диагональной,  $\Omega_{mn} = \text{diag}\{-j\omega_K, \dots, 0, \dots, j\omega_K\}$ ,  $K$  – число учитываемых гармоник частоты  $\omega$ ,  $V = \Gamma u$  и  $u = \Gamma^{-1}V$  – связь между представлением сигнала во временной и частотной областях,  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  прямое и обратное преобразование Фурье [1].

Метод спектрального баланса имеет преимущества перед методом ГБ по скорости расчетов, так как нет необходимости использовать преобразование Фурье дважды для перехода из частотной области во временную область и обратно [1, 3]. Но возникают ряд других проблем, одна из которых, это разработка методов и алгоритмов расчета спектра в нелинейных элементах (НЭ) схемы.

## 2. Расчет спектра в нелинейных элементах

Для характеристик НЭ описываемых зависимостями тока от напряжения во временной области  $i(t) = f[v(t)]$  или более упрощенно  $i = f(v)$  или  $i(v)$  необходимо найти связь амплитуд гармоник тока и напряжения в частотной области  $I(\omega) = f[V(\omega)]$  или  $I(V)$ .

При аппроксимации нелинейных зависимостей во временной области степенным рядом имеем [2]

$$i(t) = f[v(t)] = \sum_{k=0}^N g_k v^k(t) = i_0 + g_1 v(t) + g_2 v^2(t) + \dots, \quad (3)$$

где  $i_0 = i(t)|_{v(t)=v_0} = v_{DC}$ ,  $g_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k i(t)}{\partial v^k(t)}|_{v(t)=v_0=v_{DC}}$  – ток по постоянному току в

рабочей точке и производные тока по напряжению на НЭ.

Для нелинейных зависимостей емкостей НЭ имеем

$$i(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N c_k v^k(t) = \frac{d}{dt} q(v_0) + \frac{d}{dt} [c_1 v(t) + c_2 v^2(t) + \dots], \quad (4)$$

где  $c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k q(t)}{\partial v^k(t)}|_{v(t)=v_0=v_{DC}}$ .

Если в выражение ряда (3) подставим гармоническое напряжение, например для трех гармоник типа,  $u(t) = \sum_{k=-3}^3 V_k \exp(jk\omega t)$ , то можно получить необходимую связь амплитуд гармоник тока и напряжений  $I_n = f(V_m)$  следующим способом.

Представим хотя бы две гармоники экспоненциального сигнала (опустим время и другие элементы) в виде следующей упрощенной записи

$$u(t) = V_{-2}e^{-2\omega} + V_{-1}e^{-\omega} + V_0 + V_1e^{\omega} + V_2e^{2\omega} + \dots \quad (5)$$

Рассмотрим квадратичный элемент ряда с  $u^2(t)$  по классической формуле

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (6)$$

Тогда

$$u^2(t) = V_{-2}^2e^{-4\omega} + V_{-1}^2e^{-3\omega} + V_0^2 + V_1^2e^{3\omega} + V_2^2e^{4\omega} + 2V_{-2}V_{-1}e^{-3\omega} + 2V_{-2}V_0e^{-2\omega} + 2V_{-2}V_1e^{-\omega} + 2V_{-2}V_2 + 2V_{-1}V_0e^{-\omega} + 2V_{-1}V_1 + 2V_{-1}V_2e^{\omega} + 2V_0V_1e^{\omega} + V_0V_2e^{2\omega} + V_1V_2e^{3\omega} \quad (7)$$

Аналогично можно расписать элемент  $u^3(t)$ . Подставив  $u^2(t)$  и  $u^3(t)$  в формулу ряда, можно собрать все слагаемые на частотах  $\omega = 0$ , например это слагаемые из  $u^2(t) - V_0^2 + 2V_{-2}V_2 + 2V_{-1}V_1$ . Далее собираем слагаемые с частотой  $1\omega$ ,  $2\omega$  и  $3\omega$ . Получим следующие соотношения для амплитуд гармоник тока и гармоник напряжений на НЭ

$$\begin{aligned} I_0 &= i(u_{DC}) + g_1V_0 + g_2V_0V_0 + 2g_2[V_1V_1^* + V_2V_2^* + V_3V_3^*] + 3g_3[V_1^*V_1^*V_2 + V_1^2V_2^*] \dots \\ I_1 &= g_1V_1 + 2g_2[V_0V_1 + V_2V_1^* + V_3V_2^*] + 3g_3[V_3V_1^*V_1^* + V_0^2V_1 + V_2^2V_3^*] \dots \\ I_2 &= g_1V_2 + g_2V_1^2 + 2g_2[V_0V_2 + V_3V_1^*] + 3g_3[V_0^2V_2 + V_1^2V_0 + V_2^2V_2^*] \dots \\ I_3 &= g_1V_3 + 2g_2[V_0V_3 + V_1V_2] + 3g_3[V_1^3 + V_0^2V_3 + V_2^2V_1^* + V_3^2V_3^*] \dots \\ I_1^* &= g_1V_1^* + 2g_2[V_0V_1^* + V_1V_2^* + V_2V_3^*] + 3g_3[V_1^2V_3^* + V_0^2V_1^* + V_3V_2^*V_2^*] \dots \\ I_2^* &= g_1V_2^* + g_2V_1^*V_1^* + 2g_2[V_0V_2^* + V_1V_3^*] + 3g_3[V_0^2V_2^* + V_1^*V_1^*V_0 + V_2^*V_2^*V_2] \dots \\ I_3^* &= g_1V_3^* + 2g_2[V_0V_3^* + V_1^*V_2^*] + 3g_3[V_1^*V_1^*V_1^* + V_0^2V_3^* + V_2^*V_2^*V_1 + V_3^*V_3^*V_3^*] \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Эти соотношения легко программируются, не требуют дополнительных операций с матрицами, легко прослеживаются определенные закономерности в слагаемых на разных частотах.

### 3. Тензоры в САПР

Достижения в последние годы в области методов декомпозиции (разложении) тензоров позволили значительно сократить память для хранения высоко размерных задач и сократить вычислительные затраты. Это, в свою очередь, привело к резкому увеличению интереса к тензорам в различных приложениях, в том числе и САПР [4].

Так в статье [5] был представлен метод расчета нелинейных схем с применением алгоритмов понижения порядка моделей (model order reduction, MOR [6]) на основе тензорного анализа, который в отличие от существующих методов на основе традиционных методов MOR для нелинейных схем (методы близкие к рядам Вольтерра) позволил использовать нелинейности высокого порядка. В данном случае модель очень высокой размерности, легко была представлена тензором, и используя современные подходы к декомпозиции тензоров, была решена задача моделирования с более высокой точностью при сокращении времени расчета и сокращении необходимой памяти ЭВМ [5].

В работе [4] представлена тензорная теория как основа для САПР при решении проблем высокой размерности (с большим числом неизвестных). До недавних пор в

программном обеспечении САПР использовались операции с векторами и матрицами [4]. Тензорное исчисление является обобщением матричного исчисления, оно более эффективно для проблем высокой размерности, как для памяти хранения, так и скорости решения уравнений. Отмечается, что тензоры уже эффективно применялись, в первую очередь, в физике. Благодаря высокой эффективности для работы с данными большой размерности тензоры стали успешно применяться во многих инженерных задачах: обработки сигналов и задач больших данных.

Тензор  $d$ -го ранга (иногда вместо слова «ранг» используют слова «валентность», «порядок», «мода») это массив данных с  $d$  направлениями (число измерений, число индексов, directions, dimensions), определяемый как  $A \in R^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$  [5]. Отметим, что вектор  $a \in R^n$  это тензор 1-го ранга. Матрица  $A \in R^{n_1 \times n_2}$  это массив данных (тензор) 2-го ранга. Продолжая эту идею для более высоких рангов ( $d \geq 3$ ), тензор  $A \in R^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$  представляет массив данных  $d$ -го ранга. Рисунок 1 иллюстрирует пример тензора третьего ранга для  $3 \times 4 \times 2$  [4].

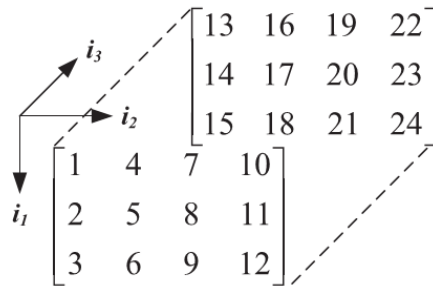


Рис. 1. Пример тензора третьего ранга ( $3 \times 4 \times 2$ ) [4].

Размерность тензора быстро растет с увеличением  $d$  (экспоненциальный рост от  $d$ ), число элементов определяется как  $n^d$ . Если  $n = 2$ ,  $d = 100$ , то получим  $2^{100} > 10^{30}$ . Это очень много, что делает практически невозможным использование стандартных подходов.

#### 4. Методы декомпозиции (разложения) тензоров

Методы декомпозиции позволяют аппроксимировать (сжать) высокоразмерный тензор небольшим числом элементов. В результате, можно решать высокоразмерные проблемы с малыми затратами памяти и вычислений [4].

**Каноническая декомпозиция.** Каноническая декомпозиция (КД, CANDECOMP/PARAFAC decomposition [5], CPD) аппроксимирует тензор  $A$  конечной суммой тензоров первого ранга, что можно записать в следующем виде

$$A \approx \sum_{r=1}^R a_r^{(1)} \circ a_r^{(2)} \circ \dots \circ a_r^{(d)}, a_r^{(k)} \in R^{n_k} \quad (9)$$

Здесь  $A^{(k)} \equiv [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_R^{(k)}] \in R^{n_k \times R}$  так называемые факторные матрицы. Иллюстрация метода для тензора третьего порядка приведена на рис. 2 [5].

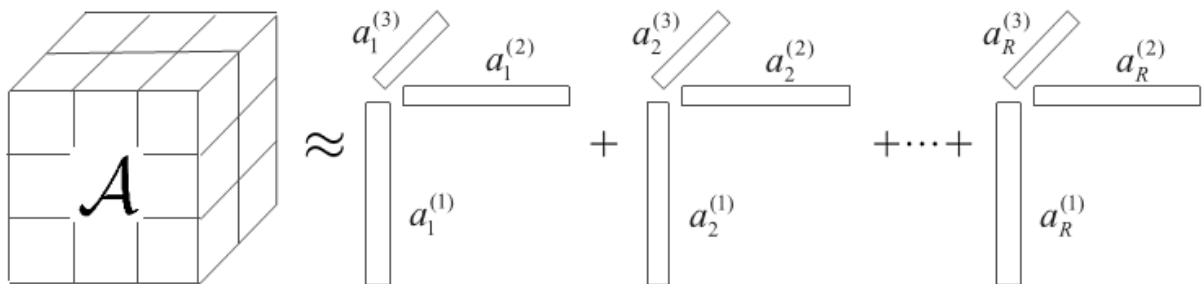


Рис. 2. Каноническая декомпозиция тензора третьего порядка [5].

**Декомпозиция Такера (Tucker).** Здесь Тензор  $A \in R^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$  аппроксимируется базовым тензором  $S \in R^{r_1 \times r_2 \times \dots \times r_d}$  и рядом факторных матриц  $U \in R^{n_k \times r_k}$  [4]

$$A = S \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_d U^{(d)} \quad (10)$$

Декомпозиция Такера сокращает необходимую память, когда  $r_k$  значительно меньше  $n_k$ . Декомпозиция иллюстрируется на рис. 3 [4].

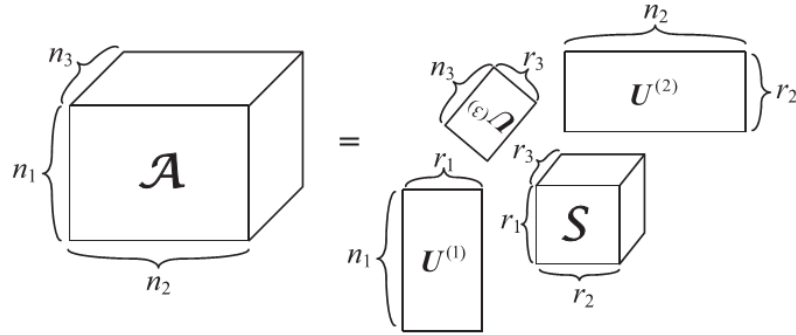


Рис. 3. Декомпозиция Такера преобразование тензора третьего порядка в базовый тензор  $S$  и факторные матрицы  $U \in R^{n_k \times r_k}$  [4].

**Декомпозиция «тензорного поезда» (Tensor Train Decomposition, TT).** В данном методе тензор порядка  $d$  аппроксимируется двумя тензорами второго порядка (матрицами) и  $(d - 2)$  3-х мерными тензорами, соединенными каскадно или в виде поезда [4]. Математически элементы тензора  $A \in R^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$  заменяется как  $A = G_{i1}^{(1)} G_{i2}^{(2)} \dots G_{id}^{(d)}$ . На рис. 4 приведен пример ТТ декомпозиции для тензора третьего порядка [4].

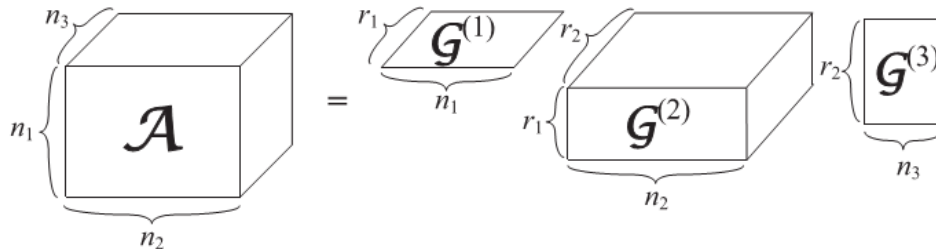


Рис. 4. Иллюстрация метода «тензорного поезда», где исходный трехмерный тензор преобразуется в две матрицы  $G_{i1}^{(1)}, G_{id}^{(d)}$  и трехмерный тензор  $G^{(2)}$  [4].

### 5. Спектральный баланс и тензоры

Уравнения модели электронной схемы имеют очень большую размерность, число уравнений (неизвестных) может достигать сотен тысяч и более. Поэтому методы решения таких уравнений относятся к сложным подходам и высоко размерным. Далее рассмотрим возможность применения тензорных разложений для метода спектрального баланса.

Одной из основных проблем метода спектрального баланса является необходимость учета большого числа членов аппроксимирующего полинома, для обеспечения достаточной точности расчетов, что приводит к увеличению вычислительных затрат [3].

Решение проблемы учета большого числа членов полинома возможно путем применения тензорного описания и тензорного разложения. В этом случае в качестве измерений при описании тензора будут:

- число уравнений (переменных)  $N$  в (2) (обычно  $N$  очень велико);

- число учитываемых спектральных составляющих  $2M+1$ , где  $M$  номер наивысшей гармоники спектра (обычно десятки или сотни);
- число членов ряда или полинома (больше трех-пяти).

Данный подход позволит увеличить число членов ряда (полинома), повысить точность при сокращении вычислительных затрат.

### Заключение

В работе представлен метод спектрального баланса, являющемся частным случаем метода гармонического баланса, В методе спектрального баланса линейная и нелинейная части схемы моделируются в частотной области, что не требует применения преобразования Фурье из временной области в частотную область и обратно. Для метода спектрального баланса решена задача вычисления спектра в нелинейных элементах. В статье представлен обзор методов использования тензоров в задачах моделирования в САПР электроники. Описаны методы декомпозиции тензоров. Представлен возможный вариант использования тензорного исчисления в задачах спектрального баланса для САПР электроники.

*Исследования поддержаны грантом Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.3270.2017/4.6.*

### Список литературы:

1. Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ электронных устройств связи (обзор). Часть 2 // Проектирование и технология электронных средств, 2013, № 1, с. 16 - 23.
2. Ланцов В.Н., Куванов А.В., Никитов И.А. Реализация метода гармонического баланса в инженерной системе MATLAB // Перспективные технологии в средствах передачи информации. Материалы XII международной научно-технической конференции ПТСПИ'2017. Владимир-Суздаль, 5-7 июля 2017, т. 2, с. 54-55.
3. Ланцов В.Н., Иванов В.А. Анализ нелинейных устройств методом спектрального баланса // Современные технологии в науке и образовании. Труды Международной научно-технической конференции, СТНО-2016, РГРУ, Рязань, 2016, с. 158-160.
4. Zhang Z., Batselier K., Liu H., Daniel L., Wong N. Tensor computation: a new framework for high-dimensional problems in EDA // *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2017, v. 36, No. 4, pp. 521-536.
5. Liu H., Daniel L., Wong N. Model reduction and simulation of nonlinear circuits via Tensor decomposition // *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2015, v. 34, No. 7, pp. 1059–1069.
6. Долинина А.А., Ланцов В.Н. Метод понижения порядка моделей на основе рядов Вольтерра // *Динамика сложных систем - XXI век.* – Радиотехника. - 2016. - №3. - С. 50-54.

### References:

1. Lantsov V.N. The state of the art into the area of simulation methods for nonlinear RF electronic communication. Part 2. Design and technology of electronic devices, 2013, No. 1. Pp. 16-23. [in Russian language]
2. Lantsov V.N., Kuvanov A.V., Nikitov I.A. Harmonic balance method realization in engineering system MATLAB. Perspective technologies into information transfer systems. XII International scientific conference PTSPI'2017. Vladimir-Suzdal, 5-7 June, 2017, v. 2, pp. 54-55. [in Russian language]
3. Lantsov V.N., Ivanov V.A. Nonlinear circuits analysis by spectral balance method. New technologies in science and education. Proc. of International conference, STNO-2016, Ryazan, 2016, pp. 158-160. [in Russian language]
4. Zhang Z., Batselier K., Liu H., Daniel L., Wong N. Tensor computation: a new framework for high-dimensional problems in EDA // *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2017, v. 36, No. 4, pp. 521-536.
5. Liu H., Daniel L., Wong N. Model reduction and simulation of nonlinear circuits via Tensor decomposition // *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2015, v. 34, No. 7, pp. 1059–1069.
6. Dolinina A.A., Lantsov V.N. Model order reduction method on the base of Volterra series. Complex Systems Dynamics. Radiotecnics. 2016, No. 3, pp. 50-54. [in Russian language]

*Статья поступила в редколлегию 26.03.19.*

*Рецензент: к.т.н., доцент Брянского государственного технического университета  
Подвесовский А.Г.*

*Статья принята к публикации 29.04.19.*

**Сведения об авторах**

**Никитов Илья Александрович**

Магистрант,  
Владимирский государственный университет имени  
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича  
Столетовых  
тел.: +7 (915) 772-38-39  
E-mail: [ioprst\\_0904@mail.ru](mailto:ioprst_0904@mail.ru)

**Мельник Иван Сергеевич**

Студент,  
Владимирский государственный университет имени  
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича  
Столетовых  
тел.: +7 (920) 626-14-14  
E-mail: [ism14111998@yandex.ru](mailto:ism14111998@yandex.ru)

**Гаврилов Евгений Павлович**

Студент,  
Владимирский государственный университет имени  
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича  
Столетовых  
тел.: +7 (905) 105-66-87  
E-mail: [gep1998@mail.ru](mailto:gep1998@mail.ru)

**Ланцов Владимир Николаевич**

Д.т.н., профессор,  
зав.кафедрой Вычислительной техники и систем  
управления, Владимирский государственный  
университет имени Александра Григорьевича и  
Николая Григорьевича Столетовых  
тел.: +7 (915) 777-87-07  
E-mail: [lantsov@vlsu.ru](mailto:lantsov@vlsu.ru)

**Information about authors:**

**Nikitov Ilya Alexandrovich**

Master degree student,  
Vladimir state university named after Alexander and  
Nicolay Stoletovs  
tel.: +7 (915) 772-38-39  
E-mail: [ioprst\\_0904@mail.ru](mailto:ioprst_0904@mail.ru)

**Melnik Ivan Sergeevich**

Student,  
Vladimir state university named after Alexander and  
Nicolay Stoletovs  
tel.: +7 (920) 626-14-14  
E-mail: [ism14111998@yandex.ru](mailto:ism14111998@yandex.ru)

**Gavrilov Evgenii Pavlovich**

Student,  
Vladimir state university named after Alexander and  
Nicolay Stoletovs  
tel.: +7 (905) 105-66-87  
E-mail: [gep1998@mail.ru](mailto:gep1998@mail.ru)

**Lantsov Vladimir Nikolaevich,**

Doctor of Engineering, Professor,  
Chief of Computer Engineering and System Control  
Department, Vladimir state university named after  
Alexander and Nicolay Stoletovs  
tel.: +7 (915) 777-87-07  
E-mail: [lantsov@vlsu.ru](mailto:lantsov@vlsu.ru)