

УДК 621.865.8

О.Н. Крахмалев, Д.И. Петрешин

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧИХ ЗОН МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПАРАМЕТРОВ ИНЕРЦИИ

Предложен подход к оптимизации законов движения манипуляционных роботов, основанный на анализе инерционных свойств таких роботов в пространстве их обобщенных координат.

Ключевые слова: манипуляционные роботы, оптимизация, законы движения, силы инерции.

Целью исследования является разработка подхода к оптимизации законов движения манипуляционных роботов, основанного на анализе инерционных свойств таких роботов в пространстве их обобщенных координат [1]. При этом целевая функция (интегральный критерий оптимизации) не составляется, поэтому задача оптимизации не рассматривается в строгой постановке. Данная научная проблема является актуальной и до настоящего времени не решена в объеме, необходимом для решения вытекающих из неё технических задач, направленных на повышение быстродействия и снижение энергоёмкости процессов манипулирования.

Предлагаемый подход основывается на методе Лагранжа – Эйлера, реализованном с применением аппарата матриц преобразования однородных координат, и методике анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных систем роботов [2]. Такой подход позволил получить аналитические выражения в виде, удобном для использования в системах управления и автоматизированного проектирования. Для исследования динамики манипуляционных систем роботов рассмотрим математическую модель, основанную на матричном уравнении [3]

$$[M]\{\ddot{q}\} + [S]\{\dot{q}^2\} + 2[K]\left\{\dot{q}_i\dot{q}_j\right\}_{i \neq j} = \{Q\}, \quad (1)$$

где $\{\ddot{q}\} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$ – вектор ускорений обобщенных координат;

$\{\dot{q}^2\} = [\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dots, \dot{q}_n^2]^T$ – вектор квадратов скоростей обобщенных координат;

$\left\{\dot{q}_i\dot{q}_j\right\}_{i \neq j} = [\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_2\dot{q}_n, \dot{q}_3\dot{q}_4, \dots, \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]^T$ – вектор попарных произведений обобщенных скоростей, имеющий размерность $C_n^2 \times 1$, n – число степеней свободы манипуляционной системы, C_n^2 – число сочетаний из n по 2; $\{Q\}$ – вектор $n \times 1$ обобщенных сил [4].

$[M]$ – положительно определенная матрица размерности $n \times n$, отражающая влияние даламберовых сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[M]$ можно представить суммой матриц:

$[M]$ – матрица размерности $n \times n$, отражающая влияние центробежных сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[S]$ можно представить суммой матриц:

$$[M] = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right) \quad (i, j = (1, \dots, n)). \quad (2)$$

$[S]$ – матрица размерности $n \times n$, отражающая влияние центробежных сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[S]$ можно представить суммой матриц:

$$[S] = [s_{ij}], \quad s_{ij} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} \right) \quad (i, j = (1, \dots, n)). \quad (3)$$

$[K]$ – матрица размерности $C_n^2 \times 1$, отражающая влияние кориолисовых сил инерции, действующих на звенья манипуляционной системы робота. Матрицу $[K]$ также можно представить суммой матриц:

$$[K] = [k_{ij}], \quad k_{ij} = \sum_{k=2}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_j} \right) \quad (i, j = (1, \dots, n)). \quad (4)$$

H_k – матрица (4×4) инерции k -го звена манипуляционной системы, рассматриваемого как твёрдое тело. $A_{0,k}$ – матрица (4×4) преобразования однородных координат из системы координат, связанной с k -м звеном, в неподвижную систему координат, связанную с основанием робота.

Элементы матричных коэффициентов $[M]$, $[S]$ и $[K]$ представляют собой параметры инерции манипуляционного робота и являются функциями обобщённых координат, поэтому анализ инерционных свойств манипуляционных роботов в пространстве их обобщённых координат может быть проведен путём анализа ненулевых элементов этих матричных коэффициентов.

По теореме о необходимых условиях экстремума функции многих переменных для элементов матричных коэффициентов m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} в точках экстремума $q_i = q_i^*$, $i = (1, \dots, n)$, должны выполняться условия:

$$\frac{\partial m_{ij}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial s_{ij}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial k_{ih}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_s} = 0, \quad s = (1, \dots, n). \quad (5)$$

Аналитические выражения для частных производных матричных коэффициентов, составляющих уравнения (5), имеют вид

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_s} + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_s} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial k_{ih}}{\partial q_s} = \sum_{k=2}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_t \partial q_s} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_t} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right). \quad (8)$$

Для поиска экстремумов могут быть использованы численные методы, например метод Ньютона для безусловной минимизации функции многих переменных. Полагаем, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности своего минимума $f_{min} = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$. Алгоритм поиска экстремумов на k -м шаге итерации может иметь вид

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x^2} \right] \{ \Delta x^{(k)} \} = - \left\{ \frac{\partial f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x} \right\}, \quad \{ x^{(k+1)} \} = \{ x^{(k)} \} + \{ \Delta x^{(k)} \},$$

где $\{\Delta x^{(k)}\}$ – вектор $(n \times 1)$ разности промежуточных решений; $\left[\frac{\partial^2 f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x^2} \right]$ – матрица Гессе $(n \times n)$; $\left\{ \frac{\partial f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x} \right\}$ – градиент $(n \times 1)$.

Если матрица Гессе в точке экстремума является положительно определенной, то данная точка соответствует локальному минимуму, если отрицательно определенной – локальному максимуму.

Для составления матрицы Гессе и проверки знакоопределенности этой матрицы в точках экстремума (q_1^*, \dots, q_n^*) используются квадратуры соответствующих функций m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} , $i, j = (1, \dots, n)$, $h = (1, \dots, C_n^2)$, которые могут быть получены из выражений (6–8). В нашем случае будем иметь:

$$\frac{\partial^2 m_{ij}(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_p \partial q_q} = \sum_{k=1}^n tr \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p \partial q_q} + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p} \right) \end{aligned} \right),$$

$$\frac{\partial^2 s_{ij}(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_p \partial q_q} = \sum_{k=1}^n tr \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p} \right) \end{aligned} \right),$$

$$\frac{\partial^2 k_{ih}(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_p \partial q_q} = \sum_{k=2}^n tr \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_l \partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_p \partial q_q} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_i \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_i \partial q_p} \right) \end{aligned} \right).$$

Для исследования движения робота в его рабочей зоне, построенной в пространстве обобщенных координат, удобно использовать не экстремумы функций $m_{ij}(q_1, \dots, q_n)$, $s_{ij}(q_1, \dots, q_n)$ и $k_{ih}(q_1, \dots, q_n)$, а экстремумы их модулей. Связь между экстремумами этих функций и экстремумами их модулей может быть однозначно определена по следующему правилу:

$$u = (m_{ij}, s_{ij}, k_{ij}), \quad v = (|m_{ij}|, |s_{ij}|, |k_{ij}|),$$

if $\max(u) > 0$ and $\min(u) > 0$ then $\max(v) = \max(u)$, $\min(v) = \min(u)$,

if $\max(u) > 0$ and $\min(u) < 0$ then $\max(v) = \max(\max(u), |\min(u)|)$, $\min(v) = 0$,

if $\max(u) < 0$ and $\min(u) < 0$ then $\max(v) = \min(u)$, $\min(v) = \max(v)$.

В пространстве обобщенных координат на основе точек, соответствующих экстремумам (минимумам) модулей ненулевых элементов матричных коэффициентов динамической модели, определяется область рабочей зоны манипуляционного робота, внутри ко-

торой выбирается траектория его движения. Построенная таким образом траектория движения может считаться оптимальной с точки зрения влияния инерционных параметров, определяемых матричными коэффициентами (2–4).

Проиллюстрируем применение рассмотренного подхода к оптимизации законов движения манипуляционных роботов на примере исследования рабочей зоны трехзвенного манипуляционного робота, кинематическая схема манипуляционной системы которого представлена на рис. 1.

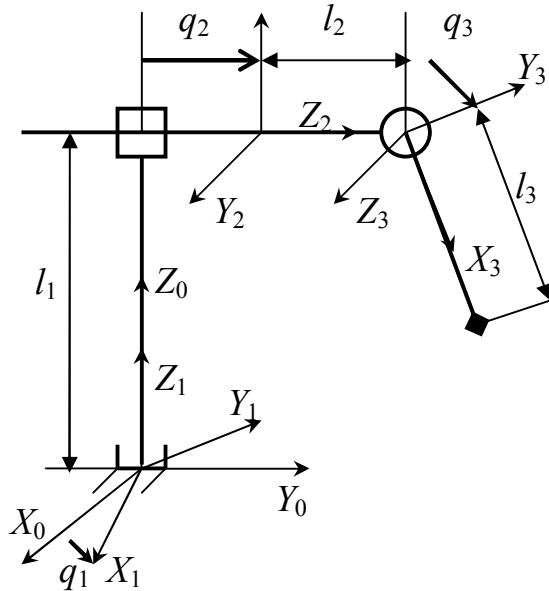


Рис. 1. Кинематическая схема

Первое звено исследуемой манипуляционной системы вращается вокруг вертикальной оси, имеет массу $m_1=3$ кг и моделируется тонкостенным цилиндром длиной $l_1=1$ м и радиусом $R_1=0,01$ м. Второе звено, имеющее массу $m_2=3$ кг, совершает поступательные перемещения вдоль горизонтальной оси и моделируется стержнем длиной $2l_2=1$ м. Третье звено представляет собой сосредоточенную массу $m_3=1$ кг и совершает вращательное движение в вертикальной плоскости, совпадающей со вторым звеном. Используя кинематическую схему манипуляционной системы, составим матрицы $A_{0,k}$, описывающие её конфигурацию, и матрицы H_k , описывающие распределение масс в звеньях этой манипуляционной системы ($k=1, 2, 3$) [3].

Используя уравнение (1), построим математическую модель трёхзвенной манипуляционной системы, которая будет иметь вид матричного уравнения:

$$[M][\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3]^T + [S][\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_3^2]^T + 2[K][\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dot{q}_2\dot{q}_3]^T = \{Q_D\} + \{Q_G\}, \quad (9)$$

где $\{Q_D\}$ – вектор (3×1) усилий, развиваемых приводами; $\{Q_G\}$ – вектор (3×1) обобщенных сил, соответствующих силам тяжести звеньев исследуемой манипуляционной системы и перемещаемого груза [4].

Матричные коэффициенты $[M]$, $[S]$ и $[K]$, входящие в уравнение (9), для выбранной модели манипуляционной системы можно представить в развернутом (поэлементном) виде:

$$[m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad [s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & 0 & s_{23} \\ s_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ненулевые элементы матричных коэффициентов (10) могут быть получены в общем виде.

$$m_{11} = m_1 R_1^2 + m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + q_2^2 \right) + m_3 (q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3)^2,$$

где первое слагаемое – это момент инерции тонкостенного цилиндра массой m_1 и радиусом R_1 относительно оси вращения первого звена, второе слагаемое – момент инерции второго звена, моделируемого стержнем длиной $2l_2$ и массой m_2 , относительно оси вращения первого звена, третье слагаемое – момент инерции третьего звена (сосредоточенная

масса m_3) относительно оси вращения первого звена. Аналогично могут быть получены выражения для других ненулевых элементов:

$$m_{22} = m_2 + m_3, \quad m_{23} = m_{32} = -m_3 l_3 \sin q_3, \quad m_{33} = m_3 l_3^2;$$

$$s_{21} = -m_2 q_2 - m_3(q_2 + l_2 + l_3 \sin q_3), \quad s_{23} = -m_3 l_3 \cos q_3, \quad s_{31} = m_3 l_3(q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3) \sin q_3;$$

$$k_{11} = m_2 q_2 + m_3 l_3(q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3), \quad k_{12} = -m_3 l_3(q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3) \sin q_3.$$

Полученные зависимости могут быть представлены графически в виде соответствующих им поверхностей, изображенных внутри рабочей зоны робота.

$$0 \leq q_1 \leq 2\pi, \quad -l_2 \leq q_2 \leq l_2, \quad -3\pi/4 \leq q_3 \leq 3\pi/4.$$

На рис. 2–7 представлены поверхности, соответствующие зависимостям, $m_{11}(q_2, q_3)$, $m_{23}(q_2, q_3)$, $s_{21}(q_2, q_3)$, $s_{23}(q_2, q_3)$, $s_{31}(q_2, q_3)$, $k_{11}(q_2, q_3)$, а на рис. 8–11 – проекции поверхностей $m_{11}(q_2, q_3)$ и $s_{31}(q_2, q_3)$ на плоскости (m_{11}, q_2) , (m_{11}, q_3) и (s_{31}, q_2) , (s_{31}, q_3) соответственно.

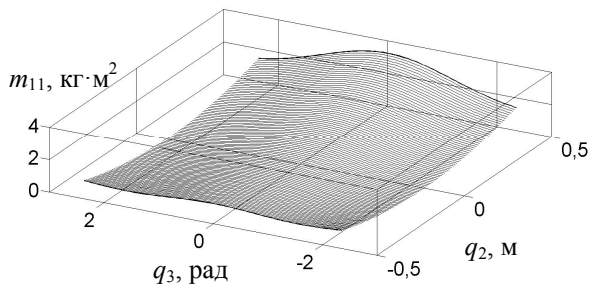


Рис. 2. Поверхность $m_{11}(q_2, q_3)$

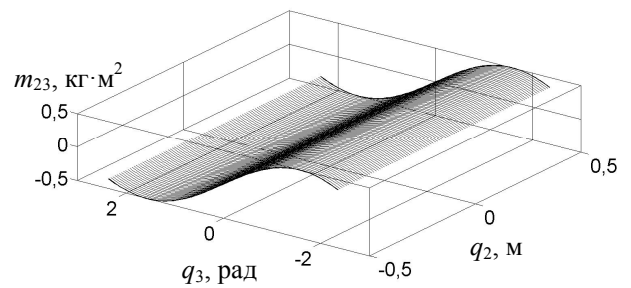


Рис. 3. Поверхность $m_{23}(q_2, q_3)$

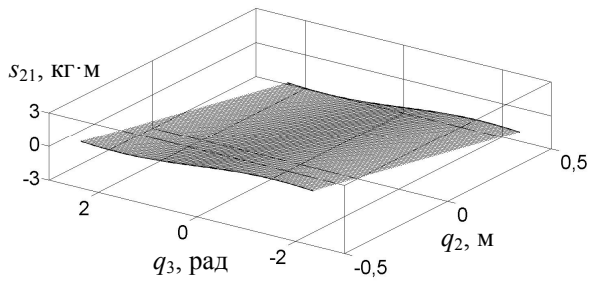


Рис. 4. Поверхность $s_{21}(q_2, q_3)$

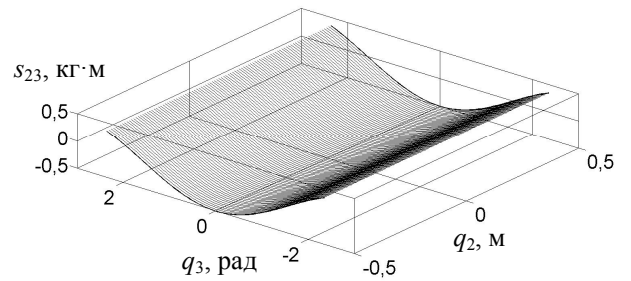


Рис. 5. Поверхность $s_{23}(q_2, q_3)$

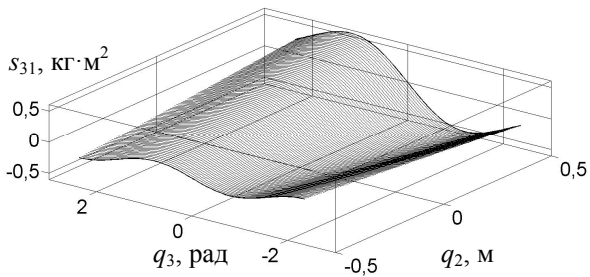


Рис. 6. Поверхность $s_{31}(q_2, q_3)$

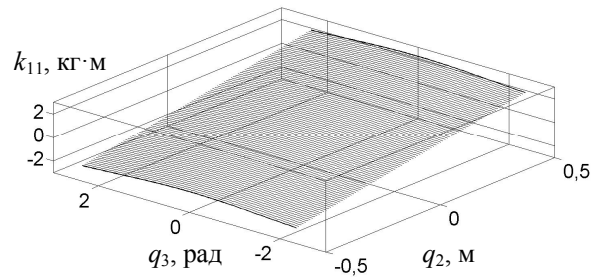


Рис. 7. Поверхность $k_{11}(q_2, q_3)$

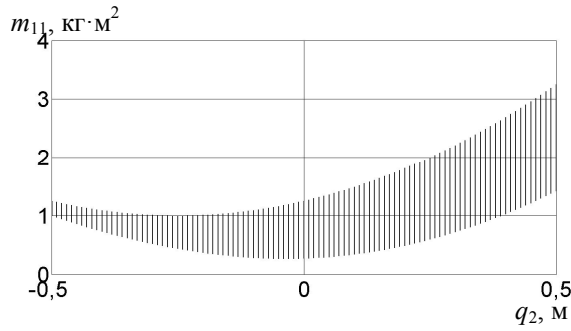


Рис. 8. Проекция поверхности $m_{11}(q_2, q_3)$ на плоскость (m_{11}, q_2)

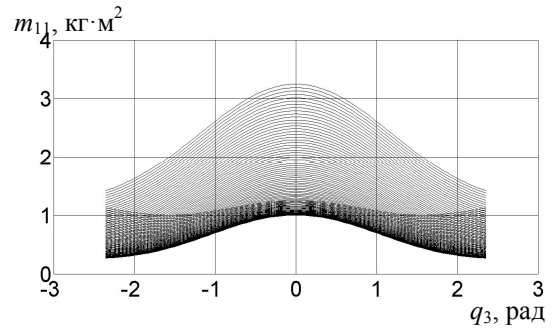


Рис. 9. Проекция поверхности $m_{11}(q_2, q_3)$ на плоскость (m_{11}, q_3)

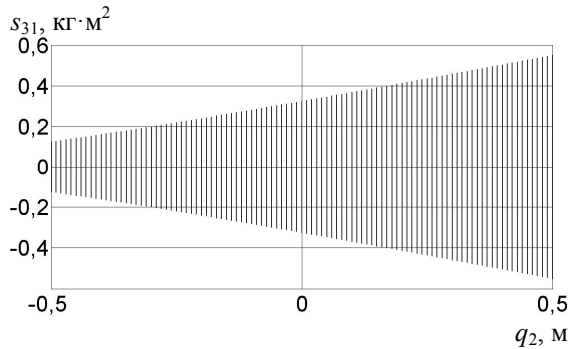


Рис. 10. Проекция поверхности $s_{31}(q_2, q_3)$ на плоскость (s_{31}, q_2)

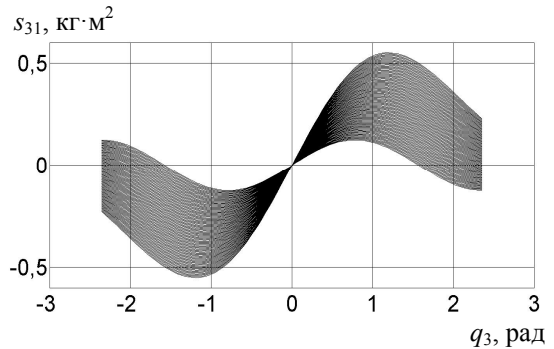


Рис. 11. Проекция поверхности $s_{31}(q_2, q_3)$ на плоскость (s_{31}, q_3)

Экстремумы модулей исследуемых зависимостей ненулевых элементов $m_{ij}(q_2, q_3)$, $s_{ij}(q_2, q_3)$ и $k_{ij}(q_2, q_3)$ ($i, j=1, 2, 3$) могут быть представлены графически (рис. 12). Пунктирными линиями изображены максимумы исследуемых зависимостей, а сплошными линиями – минимумы, не совпадающие с максимумами. Область оптимальных траекторий, полученная объединением областей рабочей зоны робота, соответствующих минимумам исследуемых ненулевых элементов, представлена на рис. 13.

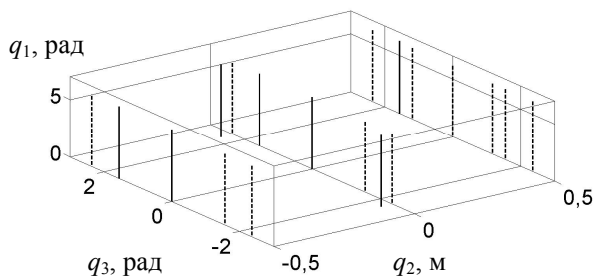


Рис. 12. Экстремумы ненулевых элементов

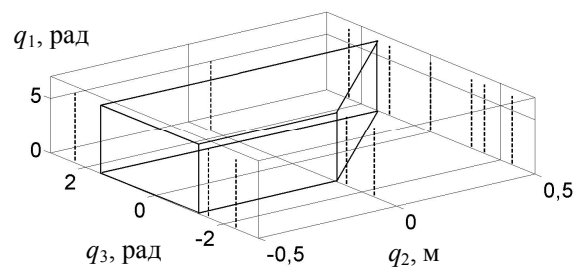


Рис. 13. Область оптимальных траекторий

Законы движения, необходимые для управления рассматриваемым манипуляционным роботом, могут быть получены на основе выбранных траекторий движения внутри построенной оптимальной области рабочей зоны робота и заданных пространственно-временных условий.

Применение рассмотренного подхода к оптимизации законов движения манипуляционных роботов при проектировании робототехнологических комплексов будет способствовать повышению производительности труда в роботизированном производстве за счёт повышения быстродействия роботов и снижения энергоёмкости процессов манипулирования [5–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крахмалев, О.Н. Оптимизация законов движения при моделировании динамики манипуляционных роботов / О.Н. Крахмалев, Д.М. Медведев, Д.И. Петрешин // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2014. – №1. – С.27–30.
2. Крахмалев, О.Н. Методика анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов / О.Н. Крахмалев // Теория механизмов и машин. – 2012. – №20. – Т. 10. – С. 41–53.
3. Крахмалев, О.Н. Математическое моделирование динамики манипуляционных систем промышленных роботов и кранов-манипуляторов: монография / О.Н. Крахмалев. – Брянск: БГТУ, 2012. – 200 с.
4. Крахмалев, О.Н. Моделирование обобщенных сил, действующих на звенья манипуляционных систем / О.Н. Крахмалев, А.П. Болдырев // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. – №1. – С.115–121.
5. Федонин, О.Н. Научное обоснование выбора режимов обработки при поверхностном пластическом деформировании / О.Н. Федонин, С.В. Степошина // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. – №1. – С. 4–8.
6. Федонин, О.Н. Учет погрешностей системы управления в балансе точности токарного станка с ЧПУ / О.Н. Федонин, Д.И. Петрешин, А.В. Хандожко, А.В. Агеенко // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2013. – №3. – С.55–57.
7. Финатов, Д.Н. Механосборочный робототехнологический комплекс / Д.Н. Финатов, Д.И. Петрешин, Г.В. Горячев // Обработка металлов: технология, оборудование, инструменты. – 2003. – №1. – С. 4–6.
8. Петрешин, Д.И. Расширение функциональных возможностей металлорежущих станков с ЧПУ путем организации связи между ПЭВМ и УЧПУ при построении адаптивной системы управления / Д.И. Петрешин, О.Н. Федонин, В.П. Федоров, А.В. Хандожко, В.А. Хандожко // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. – 2011. – №4. – С.4–9.
9. Петрешин, Д.И. Применение лазерного оптического датчика для измерения высотных параметров шероховатости поверхности деталей машин в самообучающейся адаптивной технологической системе / Д.И. Петрешин // Контроль. Диагностика. – 2009. – №11. – С. 53–57.
10. Суслов, А.Г. Определение закона управления для адаптивной технологической системы при обеспечении заданных параметров качества поверхностного слоя деталей машин при механической обработке / А.Г. Суслов, Д.И. Петрешин // СТИН. – 2010. – №1. – С. 30–36.

Материал поступил в редколлегию 19.05.14.