

УДК 519.853.4

И. С.Полянский, Д. Е.Степанов, М. М.Фролов

## ГИБРИДНЫЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД С ГРАДИЕНТНЫМ ОБУЧЕНИЕМ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Предложена модификация генетического метода с целью наиболее эффективного определения глобального оптимума многомерной многоэкстремальной функции, в общем случае содержащей точки разрыва первого и второго рода. Выполнена численная оценка эффективности нахождения глобального оптимума предложенной модификации генетического метода в сравнении со стандартным генетическим алгоритмом и его известными модификациями для выбранной группы многоэкстремальных тестовых функций.

Ключевые слова: гибридный генетический алгоритм, градиентное обучение, селекция, прогнозирование, параболическая интерполяция, глобальная оптимизация, многоэкстремальная функция.

В современных условиях бурного развития информационных технологий решение большинства задач, возникающих в различных областях науки и техники, связано с нахождением глобального оптимума (наилучшего решения) в общем случае невыпуклой, негладкой, многоэкстремальной целевой функции, численно характеризующей выбранный показатель качества (эффективности). Решение подобных задач предполагает использование специальных многоэкстремальных оптимизационных методов, определяющих некоторое правило перебора решений на равномерной/неравномерной сетке по детерминированному или случайному закону. В практике научных решений большое распространение получили алгоритмы глобальной оптимизации, основанные на эволюционных методах, – генетические алгоритмы. Для увеличения эффективности последних, особенно при решении многомерных многоэкстремальных задач, в ряде работ [1–3] предложена комбинация работы генетического алгоритма и некоторого классического градиентного метода локальной оптимизации. В рассматриваемой постановке гибридная генетическая оптимизация предполагает параллельную (раздельную) работу генетического и градиентного методов с постоянным сравнением на каждой  $k$ -й итерации лучшего решения с последующей передачей последнего (лидера и вектора лидеров из полученной популяции) на  $k+1$ -й итерации градиентному методу.

При этом, с учетом предложенных решений [1–3] и результатов их работы, особый интерес вызывают вопросы, связанные с непосредственным объединением генетических методов с известными методами локального поиска [4–6], а также методов статистического анализа [7] на этапе селекции новой популяции.

**Градиентное обучение и прогнозирование при решении задач глобальной оптимизации.** Рассмотрим решение задачи нахождения глобального оптимума многомерной функции

$$f(\vec{X}) \rightarrow \min_{\vec{X} \in R^N}; \quad \vec{X} = (x_i)_N, \quad (1)$$

где  $N$  определяет число переменных функции. При этом в общей постановке функция (1) может быть недифференцируема в некоторых точках, иметь точки разрыва первого и второго рода (может быть определена не для всех точек  $x_i \in (-\infty, \infty)$ ). В связи с этим на существенное улучшение сходимости генетического метода при использовании только градиентного обучения особи-лидера популяции при случайном выборе начального приближения (первое поколение), очевидно, не всегда можно рассчитывать. Для увеличения скорости сходимости решения предлагается по выбранному методу локальной оптимизации [4] использовать градиентное обучение всех особей-лидеров с дополнительным приме-

нием моделей прогнозирования авторегрессии - скользящего среднего (ARMA) [7] выбранного порядка на этапе мутации популяции и скрещивания с использованием метода параболической интерполяции [5].

Для решения задачи (1) рассмотрим генетический алгоритм в вещественных кодах [8] RGA (real-coded genetic algorithms определяет представление генов особи в популяции в виде вещественного числа) с градиентным обучением и прогнозированием. Предпочтительность использования RGA кодирования заключается в простоте (с позиции минимизации вычислительных затрат) реализации процедуры кодирования/декодирования фенотипа особи в ее эквивалентный генотип, по сути определяющий перевод вещественного значения аргумента  $\psi_i : x_i \rightarrow y_i$  к безразмерному виду для интервала  $y_i \in [0,1]$  по правилу [8]

$$\psi_i : y_i = (x_i - x_i^{\min}) / (x_i^{\max} - x_i^{\min}); \quad \psi_i^{-1} : x_i = x_i^{\min} + y_i (x_i^{\max} - x_i^{\min}),$$

где  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  – границы области поиска глобального оптимума функции (1) по переменной  $x_i$ .

Последовательность предлагаемого решения заключается в выполнении следующих действий:

1. Задание настраиваемых параметров алгоритма:  $n$  – размер популяции;  $\alpha \in [0, 5 \cdot 10^{-2}]$  – параметр кроссовера;  $k$  – количество привилегированных особей в популяции (особи-лидеры);  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  – границы области поиска глобального оптимума функции (1) по переменной  $x_i$ ;  $p$  и  $q$  – параметры, определяющие порядок модели ARMA( $p, q$ );  $m = 1$  – номер итерации алгоритма;  $M$  – предельно допустимое число итераций алгоритма;  $(\vec{X}_1^1, \vec{X}_2^1, \dots, \vec{X}_n^1) = X^m = (x_{i,j}^m)_{N \times n}$  – первое поколение, определяющее начальное приближение итерационного алгоритма оптимизации функции (1).

2. Вычисление значений  $f_j$  целевой функции (1) для  $j$ -х ( $j = \overline{1, n}$ ) особей из  $m$ -й итерации популяции.

3. Сортировка значений  $f_j$  по возрастанию и выбор лучших особей из  $m$ -й популяции

4. Генерация фенотипов  $X' = (x'_{i,j})_{N \times n}$  и  $X'' = (x''_{i,j})_{N \times n}$  пары популяций родителей по правилу

$$a_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j}^m, & \text{если } m \leq \max(p, q) + 1; \\ \zeta_{i,j}^m + \sum_{r=1}^p \gamma_r x_{i,j}^{m-r+1} + \sum_{r=1}^q \beta_r \zeta_{i,j}^{m-r+1} & \text{- в противном случае;} \end{cases}$$

$$x'_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}, & \text{если } a_{i,j} \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}]; \\ x_i^{\min}, & \text{если } a_{i,j} < x_i^{\min}; \\ x_i^{\max}, & \text{если } a_{i,j} > x_i^{\max}; \end{cases} \quad x''_{i,j} = \psi_i^{-1}(\zeta_{i,j}^m),$$

где  $\zeta_{i,j}^m$  – белый шум (случайная величина, распределенная по равномерному закону на интервале  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ );  $\xi_{i,j}^m$  – случайная величина, распределенная по равномерному закону на интервале  $[0,1]$ ;  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  и  $\beta_1, \dots, \beta_q$  – коэффициенты модели ARMA (авторегрессионные коэффициенты и коэффициенты скользящего среднего соответственно), определяемые по правилам, представленным в [7].

5. Скрещивание полученных пар популяций родителей с использованием метода параболической интерполяции [5]. В такой постановке фенотипы потомков  $\hat{X} = (\hat{x}_{i,j})_{N \times n}$  с учетом [8] задаются отношениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i,j} &= \Psi_i^{-1}(\hat{y}_{i,j}); \quad y'_{i,j} = \Psi_i(x'_{i,j}); \quad y''_{i,j} = \Psi_i(x''_{i,j}); \\ \hat{y}_{i,j} &= 0,5 \frac{\left[ (y''_{i,j})^2 - (y'''_{i,j})^2 \right] f'_j + \left[ (y'''_{i,j})^2 - (y'_{i,j})^2 \right] f''_j + \left[ (y'_{i,j})^2 - (y''_{i,j})^2 \right] f'''_j}{\left[ y''_{i,j} - y'''_{i,j} \right] f'_j + \left[ y'''_{i,j} - y'_{i,j} \right] f''_j + \left[ y'_{i,j} - y''_{i,j} \right] f'''_j}; \\ y'''_{i,j} &= C_{i,j}^{\min} - \alpha (C_{i,j}^{\max} - C_{i,j}^{\min}) + \xi_{i,j}^m (C_{i,j}^{\max} - C_{i,j}^{\min}) (1 - 2\alpha); \\ C_{i,j}^{\min} &= \begin{cases} x'_{i,j}, & \text{если } f(x'_{1,j}, \dots, x'_{N,j}) < f(x''_{1,j}, \dots, x''_{N,j}); \\ x''_{i,j}, & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ C_{i,j}^{\max} &= \begin{cases} x'_{i,j}, & \text{если } f(x'_{1,j}, \dots, x'_{N,j}) > f(x''_{1,j}, \dots, x''_{N,j}); \\ x''_{i,j}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $f'_j, f''_j, f'''_j$  – значения целевой функции (1) для  $j$ -х особей, заданных соответствующими фенотипами популяций  $x'_{i,j}, x''_{i,j}, x'''_{i,j}$ .

6. Градиентное обучение по выбранному оптимизационному алгоритму  $k$  первых особей-лидеров из сформированной на предыдущем шаге популяции потомков  $\hat{X}$ .

Например, в случае градиентного обучения  $X^m$  по алгоритму Дэвидона-Флетчера-Пауэлла значения  $(X^m)^*$  определяются по правилу [4]

$$\left( (X^m)^{j} \right)^* = (X^m)^{j} - t D_j^m \nabla f \left( (X^m)^{j} \right),$$

где  $\langle \cdot \rangle$  определяется вектор-столбец матрицы;  $D_j^m$  – матрица, аппроксимирующая матрицу направлений размера  $N \times N$  для  $j$ -й особи на  $m$ -м шаге алгоритма (обратную матрицу Гессе), которая определяется в [4] как

$$D_j^m = D_j^{m-1} + \frac{\Delta (X^m)^{j} \left( \Delta (X^m)^{j} \right)^T}{\left( \Delta (X^m)^{j} \right)^T \Delta G_j^m} - \frac{D_j^{m-1} \Delta G_j^m \left( \Delta G_j^m \right)^T D_j^{m-1}}{\left( \Delta G_j^m \right)^T D_j^{m-1} \Delta G_j^m}; \quad D_j^1 = E,$$

где  $\Delta (X^m)^{j} = (X^m)^{j} - (X^{m-1})^{j}$ ;  $\Delta G_j^m = \nabla f \left( (X^m)^{j} \right) - \nabla f \left( (X^{m-1})^{j} \right)$ ;  $E$  – единичная матрица;  $\nabla f \left( (X^m)^{j} \right)$  – вектор градиента целевой функции (1).

Величина  $t$  на каждом шаге определяется из условия

$$\omega(t) = f \left( (X^m)^{j} - t D_j^m \nabla f \left( (X^m)^{j} \right) \right) \rightarrow \min_{t \in \square_{\geq 0}}. \quad (2)$$

Задача (2) решается численно гибридным методом одномерной безусловной оптимизации, пример реализации которого подробно рассмотрен в [5].

Из полученных значений  $(X^m)^*$  и  $\hat{X}^*$  с выхода градиентного алгоритма формируется  $m+1$ -е поколение  $X^{m+1} = (\bar{X}_1^{m+1}, \dots, \bar{X}_{n-k}^{m+1}, \bar{X}_{n-k+1}^{m+1}, \dots, \bar{X}_n^{m+1}) = (x_{i,j}^{m+1})_{N \times n}$ . Счетчик итераций увеличивается на единицу:  $m = m + 1$ .

7. Проверка выполнения условия остановки итерационного алгоритма. Например, наряду с очевидным условием  $m > M$  алгоритм может быть остановлен в случае невыполнения неравенства

$$\sum_{j=1}^k \left| \nabla f \left( (X^m)^{\langle j \rangle} \right) \right| \leq \varepsilon \text{ и/или } \sum_{j=1}^k \left| \Delta \left( (X^m)^{\langle j \rangle} \right) \right| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – малая величина, определяющая погрешность работы алгоритма.

8. В случае выполнения условия остановки алгоритм завершает работу, а результат решения задачи (1) определяет лидер из сформированной  $m$ -й популяции  $\bar{X}_1^m$ . В противном случае необходимо перейти к шагу 2 алгоритма.

**Результаты вычислительного эксперимента.** Для сравнительной оценки предложенного модифицированного генетического алгоритма выполним ряд вычислительных экспериментов по определению глобального оптимума следующих тестовых функций:

$$f_1(\bar{X}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \left( \cos(x_i^2) + \cos(x_{i+1}^2) - \frac{1}{2^{\cos(5x_i x_{i+1})^5}} \right), \quad (4)$$

где  $-2 \leq x_i \leq 2$  (график функции при  $N = 2$  представлен на рис. 1а);

$$f_2(\bar{X}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sin^2(x_i) \cos(x_{i+1}) \sqrt[9]{e^{x_i}} + \sqrt[9]{e^{x_{i+1}}} \right), \quad (5)$$

где  $-6 \leq x_i \leq 6$  (график функции при  $N = 2$  представлен на рис. 1б);

$$f_3(\bar{X}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \left( \cos(2x_i^2) - 1, 1 \right)^2 + \left( \sin(0,5x_i) - 1, 2 \right)^2 - \right. \\ \left. - \left( \cos(2x_{i+1}^2) - 1, 1 \right)^2 + \left( \sin(0,5x_{i+1}) - 1, 2 \right)^2 \right], \quad (6)$$

где  $-5 \leq x_i \leq 5$  (график функции при  $N = 2$  представлен на рис. 1в);

$$f_4(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{\left| \sin \left[ \sin \left( \sqrt{|\sin(x_i - 1)|} + \sqrt{|\sin(x_{i+1} + 2)|} \right) \right] \right|}, \quad (7)$$

где  $-5 \leq x_i \leq 5$  (график функции при  $N = 2$  представлен на рис. 1г).

При определении глобального минимума функций (4) и (5) их размерности принимались  $N = 2$ ,  $N = 50$  с заданной популяцией в 20 особей ( $n = 20$ ), для которой определено 5 особей-лидеров ( $k = 5$ ). Результаты расчетов фиксировались по  $10^6$  запускам алгоритма с последующим усреднением итогового выходного значения. Скорость сходимости предложенной модификации алгоритма с градиентным обучением особей из формируемой популяции методами наискорейшего спуска, Полака–Райбера, Флетчера–Ривса, Дэвидона–Флетчера–Пауэлла (Д–Ф–П), Ньютона–Рафсона [4] оценивалась в сравнении: 1) с гибридным генетическим алгоритмом (ГГА) с градиентным обучением лидера (ГОЛ) [1]; 2) ГГА с градиентным обучением особей-лидеров в популяции (ГООЛ); 3) ГГА с градиентным обучением всех особей в популяции (ГООП). На рис. 2а – г представлены графики зависимости ошибки определения глобального минимума соответствующих целевых функций (4 – 7) при  $N = 2$  методами ГГА с ГОЛ, ГООЛ и ГООП от числа итераций  $K$ .

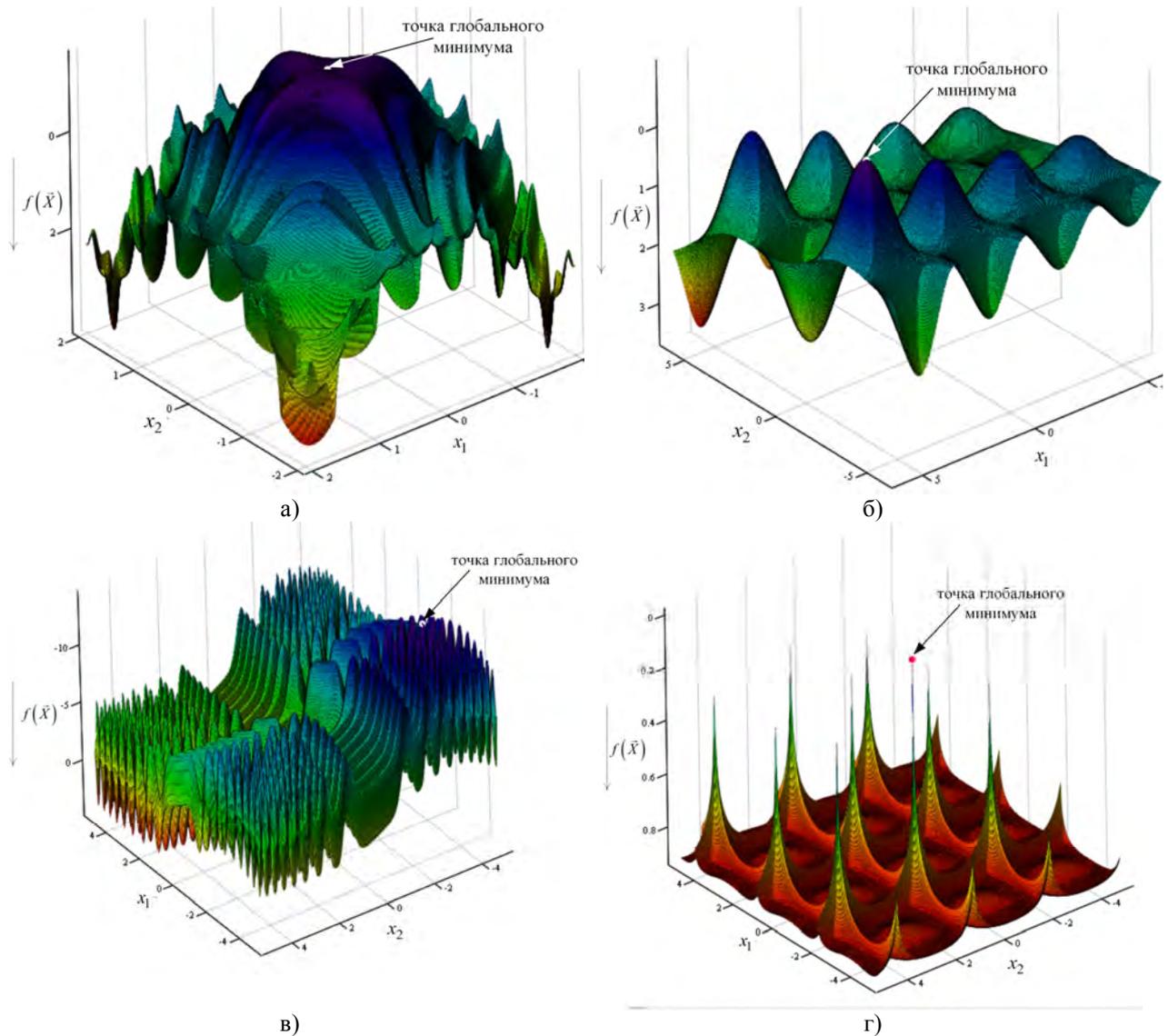


Рис. 1. Графики многоэкстремальных тестовых функций:  
 а – двумерная функция (4); б – двумерная функция (5); в – двумерная функция (6);  
 г – двумерная функция (7)

Полученные результаты (рис. 2а – г) свидетельствуют о предпочтительности с позиции увеличения скорости сходимости градиентного обучения всех особей из формируемой популяции. Выигрыш в сходимости увеличивается с увеличением числа локальных экстремумов (рис. 2а, б) дифференцируемой целевой функции. При этом не всегда скорость сходимости самого градиентного метода влияет на скорость сходимости итогового ГГА (ГГА с ГООП методом наискорейшего спуска сходится быстрее, чем ГГА с ГООП методом Ньютона-Рафсона для функции (4)). Также увеличение числа локальных экстремумов (рис. 2в), а тем более появление у целевой функции изолированных экстремумов (рис. 1г), приводит к существенному ухудшению скорости сходимости ГГА.

На рис. 3а – г представлены графики зависимости ошибки определения глобального минимума соответствующих целевых функций (4 – 7) при  $N = 2$  методами ГГА с ГООП и ГА с предложенной модификацией с прогнозированием по модели ARMA(1, 1) от числа итераций  $K$ . Градиентное обучение в обоих случаях выполнено методом наискорейшего спуска. Из полученных результатов следует более высокая скорость сходимости предложенной модификации при меньших вычислительных затратах алгоритма в сравнении с решением по ГГА с ГООП на единичной итерации.

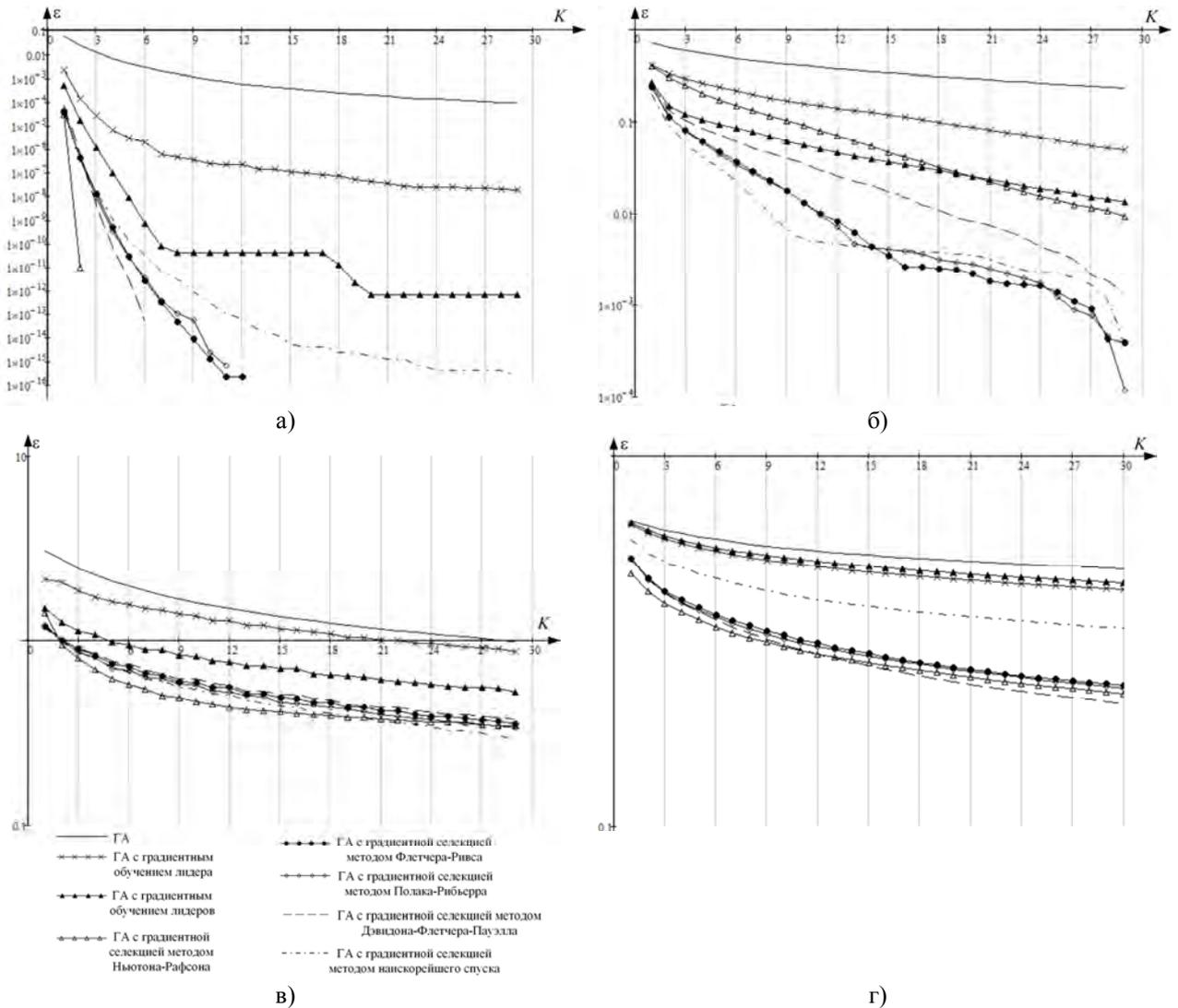


Рис. 2. Графики зависимости ошибки определения глобального минимума функций от числа итераций:  
 а – двухмерная функция (4); б – двухмерная функция (5); в – двухмерная функция (6);  
 г – двухмерная функция (7)

Однако в целом увеличение скорости сходимости алгоритма не может определить однозначную оценку предпочтительности использования предложенной модификации ГГА. Для окончательной оценки эффективности (вычислительная сложность и скорость сходимости) предложенной модификации ГГА для представленных тестовых функций выполнен следующий итоговый вычислительный эксперимент. Время работы алгоритма при реализации в САПР Mathcad 15 ограничено 2 мин (120 с) для ЭВМ с параметрами: Intel(R) Core(TM) i7-3612QM CPU 2.10 GHz, ОЗУ 8Гб (досрочная остановка алгоритма осуществляется при выполнении условий (3) при  $\varepsilon = 10^{-5}$ ). Выходные данные: средние выборочные значения числа итераций алгоритма  $N_{cp}$ , средняя выборочная ошибка определения экстремума целевой функции  $\varepsilon_f$ , среднее время работы алгоритма  $t_{cp}$ . Результаты указанного эксперимента для размерности целевых функций (4 – 7)  $N = 50$  представлены в таблице. Наиболее удачные (с точки зрения точности оценки) реализации алгоритмов по минимизации тестовых функций выделены серым цветом. Решения, соответствующие наибольшему быстрдействию, выделены жирным шрифтом.

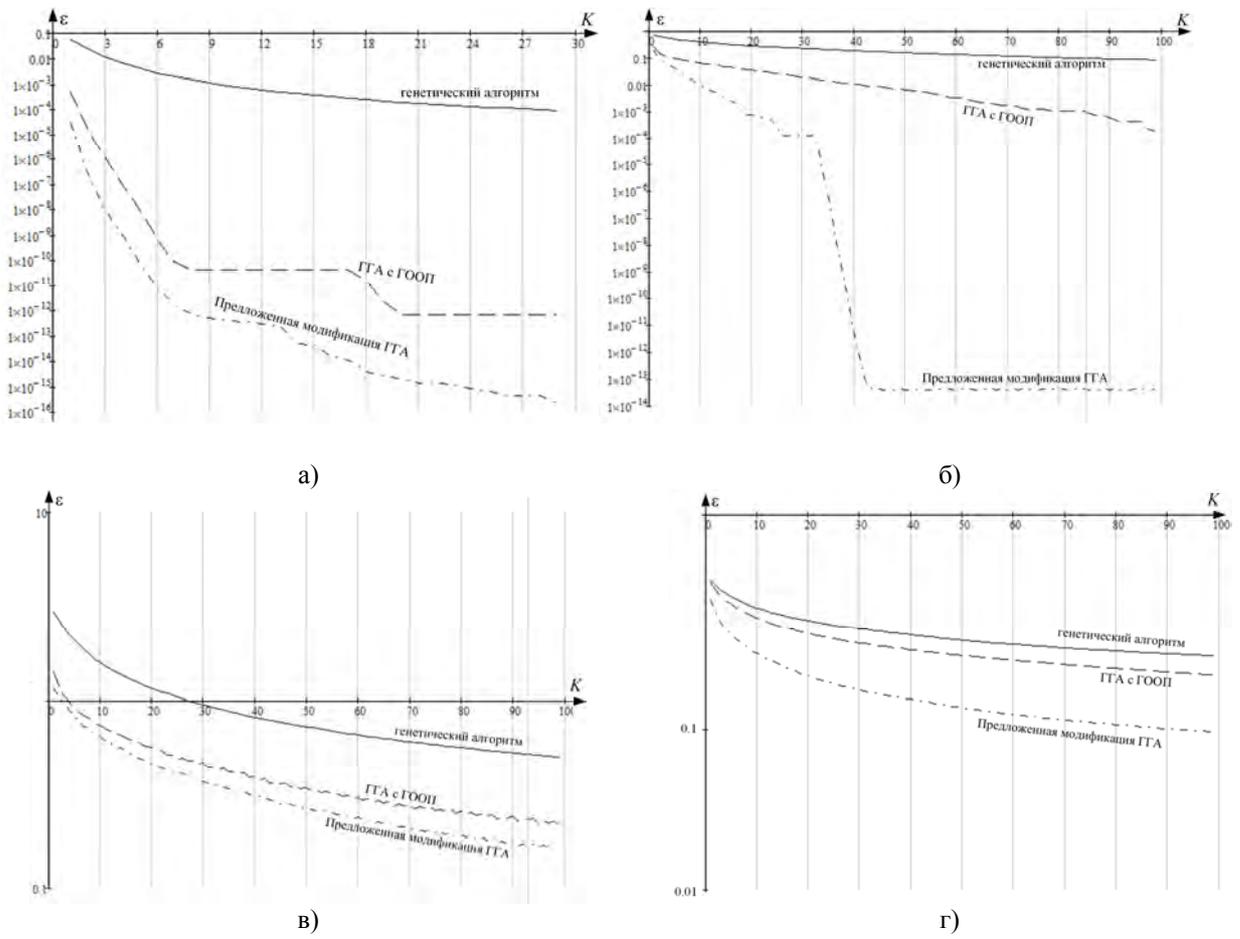


Рис. 3. Графики зависимости ошибки определения глобального минимума функций от числа итераций:  
 а – двухмерная функция (4); б – двухмерная функция (5); в – двухмерная функция (6);  
 г – двухмерная функция (7)

Из полученных результатов следует, что применение предложенной модификации генетического алгоритма – градиентного обучения особей-лидеров с прогнозированием - для многомерных произвольных функций в сравнении с известными решениями обладает наибольшей предпочтительностью как с позиции скорости сходимости, так и с позиции минимизации вычислительных затрат. Среднее время, соответствующее нахождению глобального оптимума четвертой тестовой функции по предложенной модификации генетического метода, составляет 16 мин 39,907 с, в то время как ГА с ГООЛ определяет глобальный оптимум в среднем за 21 мин 53,481 с.

Таблица

Результаты минимизации функций (4 – 7) для  $N = 50$

Метод	Функция	$N_{cp}$	$\varepsilon_f$	$\partial_f, \%$	$t_{cp}$
ГА	$f_1(\bar{X})$	27100	21,9024514018214	29,79925360792027	120
	$f_2(\bar{X})$	22324	38,39757872980871	192,4039257390211	120
	$f_3(\bar{X})$	24591	152,74652792666978	36,69114907590211	120
	$f_4(\bar{X})$	29340	1,69988279437646	4,220515207045037	120

Окончание таблицы

Метод	Функция	$N_{cp}$	$\varepsilon_f$	$\partial_f, \%$	$t_{cp}$
ГА с ГООЛ методом наискорейшего спуска	$f_1(\bar{X})$	32	0,000000709919254	$9,658765360544218 \cdot 10^{-7}$	2,715
	$f_2(\bar{X})$	1708	1,658898064508399	8,312464237868622	120
	$f_3(\bar{X})$	1874	16,634969162167998	3,995875662032455	119,22 9
	$f_4(\bar{X})$	2446	1,45886002055269	3,622097312862788	120
ГА с ГООП методом наискорейшего спуска	$f_1(\bar{X})$	32	0,000000741159308	$1,008380010884354 \cdot 10^{-6}$	6,544
	$f_2(\bar{X})$	423	1,496438447208582	7,498405925429308	120
	$f_3(\bar{X})$	483	13,448065408921881	3,230351480971913	120
	$f_4(\bar{X})$	661	1,60094434477437	3,974868135088967	120
ГА с ГООП методом Д–Ф–П	$f_1(\bar{X})$	33	0,00005622897363	$7,650200493877551 \cdot 10^{-5}$	7,082
	$f_2(\bar{X})$	408	1,551314273095953	7,773379626328437	120
	$f_3(\bar{X})$	459	14,12920302586905	3,393967126995706	120
	$f_4(\bar{X})$	587	1,63677565873361	4,063831095331676	120
ГА с ГООП методом наискорейшего спуска и прогнозированием по модели ARMA(1, 1)	$f_1(\bar{X})$	25	0,000000711750862	$9,683685197278912 \cdot 10^{-7}$	5,783
	$f_2(\bar{X})$	272	0,955943834233087	4,790076681310947	102,2
	$f_3(\bar{X})$	347	16,2700305474667	3,908213982927143	115,33 2
	$f_4(\bar{X})$	316	1,375057467154804	3,414030055417124	120
ГА с ГООП методом Д–Ф–П и прогнозированием по модели ARMA(1, 1)	$f_1(\bar{X})$	29	0,000000523342919	$7,120311823129252 \cdot 10^{-7}$	7,197
	$f_2(\bar{X})$	284	1,084864014956676	5,436074416031294	104,81 8
	$f_3(\bar{X})$	293	21,9837127642238	5,280694057158421	116,90 8
	$f_4(\bar{X})$	271	1,425581654851882	3,539472881948782	120
ГА с ГООЛ методом наискорейшего спуска и прогнозированием по модели ARMA(1, 1)	$f_1(\bar{X})$	26	0,000000750496937	$1,021084268027211 \cdot 10^{-6}$	<b>1,638</b>
	$f_2(\bar{X})$	561	0,562101235478331	2,816596461193676	<b>100,69 5</b>
	$f_3(\bar{X})$	399	2,255989608985317	0,5419098697726523	<b>113,45 2</b>
	$f_4(\bar{X})$	604	1,397845227692615	3,470608126683273	<b>120</b>

На основании полученных результатов можно заключить, что реализация алгоритмов глобальной оптимизации по предложенной модификации генетического метода в направлении объединения с известными методами локального поиска и статистического анализа позволяет повысить эффективность численного решения многомерных многоэкстремальных задач, в особенности связанных со структурно-параметрическим синтезом различных систем [9; 10]. При этом допускается содержание в целевой функции точек разрыва первого и второго рода. В рамках проведенных вычислительных экспериментов с

позиции вычислительной сложности определена предпочтительность предварительного прогнозирования фенотипов родителей популяции с последующим скрещиванием по методу параболической интерполяции и градиентным обучением особей-лидеров в сформированной популяции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тенев, В. А. Гибридный генетический алгоритм с дополнительным обучением лидера / В. А. Тенев, Н. Б. Паклин // Интеллектуальные системы в производстве. – 2003. - № 2. – С. 181–206.
2. Дмитриев, С. В. Применение прямых методов оптимизации в гибридном генетическом алгоритме / С. В. Дмитриев, В. А. Тенев // Интеллектуальные системы в производстве. – 2005. - № 2. – С. 11–22.
3. Дмитриев, С. В. Оптимизация многоэкстремальных функций с помощью гибридных генетических алгоритмов / С. В. Дмитриев, В. А. Тенев // Изв. Ин-та математики и информатики. Ижевск. – 2006. - № 2 (36). – С. 163–166.
4. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
5. Полянский, И. С. Метод одномерной безусловной оптимизации в задаче оценки развязки парциальных лучей многолучевой антенны зеркального типа / И. С. Полянский // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 4. – Режим доступа: [www.science-education.ru/104-6880](http://www.science-education.ru/104-6880).
6. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.
7. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон; пер. с англ. И. Г. Журбенко, В. П. Носко, под ред. Ю. К. Беяева. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
8. Herrera, F. Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis / F. Herrera, M. Lozano, J. L. Verdegay // Artificial Intelligence Review. – 1998. – Vol. 12. - № 4. – P. 265–319.
9. Еременко, В. Т. Методологические аспекты синтеза оптимальной древовидной структуры в системах сбора и обработки информации / В. Т. Еременко, И. С. Полянский, И. И. Беседин // Вестник компьютерных и информационных технологий. - 2013. – № 11. - С. 11–15.
10. Полянский, И. С. Алгоритм распределения неоднородных дискретных ограниченных ресурсов в системе физической защиты / И. С. Полянский, И. И. Беседин // Информационные системы и технологии. - 2013. – № 4(78).

Материал поступил в редколлегию 26.05.14.