

---

## ВОЛНА НАД ИСТОЧНИКОМ В ТЕПЛОПРОВОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

### WAVE OVER THE SOURCE IN A THERMAL-CONDUCTIVE ATMOSPHERE

---

**Г.В. Руденко***Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, rud@iszf.irk.ru***И.С. Дмитриенко***Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, dmitrien@iszf.irk.ru***G.V. Rudenko***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, rud@iszf.irk.ru***I.S. Dmitrienko***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, dmitrien@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** Для акустогравитационных волн предложен метод получения решения над источником с учетом теплопроводности по всей атмосфере. Решение строится посредством соединения аналитического решения для верхней изотермической части и численного решения для реальной неизо-термической диссипативной атмосферы. Для разных высотных диапазонов исследованы возможности различных способов описания волновых возмущений. Предложен специальный способ учета малой диссипации для нижней атмосферы. Определены высоты сильной диссипации.

**Ключевые слова:** диссипативные волны в верхней атмосфере, акустико-гравитационные волны.

**Abstract.** For acoustic-gravity waves a method for obtaining solutions over the source, taking into account the thermal conductivity throughout the atmosphere is proposed. The solution is constructed by combining the analytical solution for the upper isothermal part and numerical solution for the real non-isothermal dissipative atmosphere. The possibility of different ways of describing the wave disturbances investigated for different altitudinal ranges. A special way of accounting for small dissipation of the lower atmosphere is proposed. The heights of strong dissipation are found.

**Key words:** dissipative waves in the upper atmosphere, acoustic-gravity waves.

---

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена построению решения над источником возмущения в атмосфере как единого решения для двух принципиально разных физических условий распространения акустогравитационных волн в атмосфере: практически без диссипации в нижней и средней атмосфере и с существенным нарастающим с высотой воздействием диссипации в верхней атмосфере. Граничным условием является непоступление энергии сверху, поэтому при произвольных действительных значениях частоты и горизонтального волнового числа наше решение описывает монохроматическое возмущение выше источника (он может находиться в атмосфере или, например, на поверхности Земли), простирающееся формально неограниченно в верхней атмосфере. Набор таких решений с различными действительными частотами и горизонтальными волновыми числами позволяет рассчитать возмущение, производимое в атмосфере конкретным источником. При определенных значениях частоты или продольного волнового вектора решения над источником удовлетворяют также нижним граничным условиям на Земле — в таком случае они представляют собой моды, захваченные неоднородностью атмосферы. Вследствие пресачивания и диссипации собственные числа, соответствующие таким модам, являются комплексными. Захваченные моды представляют особый ин-

терес, так как вдали от источника возмущение представляет собой суперпозицию таких мод.

Для решения задачи нахождения возмущения от источника в настоящее время существуют хорошо развитые методы описания волновых явлений в реальной атмосфере, основанные на непосредственном численном решении системы гидродинамических уравнений, включающие в себя разнообразные модели источников климатического и техногенного характера [Hickey et al., 1997, 1998; Walterscheid, Schubert, 1990; Walterscheid et al., 2001; Snively, Pasco, 2003, 2005; Snively et al., 2007; Yuand Hickey, 2007a, b, c; Yu et al., 2009; Kshevetskii, Gavrilov, 2005; Гаврилов, Кшевецкий, 2014]. Эти методы основаны на прямом численном интегрировании нелинейной системы уравнений в частных производных в двумерном или трехмерном приближении для стратифицированной атмосферы с вязкостью, теплопроводностью и ветровой стратификацией. Однако эти методы становятся неэффективными из-за своей ресурсоемкости и быстрого накопления численных ошибок при необходимости увеличения объема сетки для обеспечения достаточного пространственного разрешения при описании волновых форм возмущений на большем удалении от места локализации источника. Хорошо известно, что удаленные от источника волновые возмущения, особенно благодаря росту с высотой их относительной амплитуды, яв-

ляются одним из основных элементов динамики атмосферы в ее верхней части (термосфере), где они проявляют себя в качестве основной причины многообразных ионосферных возмущений. Перенос волновой энергии и импульса на большие расстояния обеспечивается наличием условий волноводного распространения на температурных неоднородностях нижней и средней атмосферы [Pierce, Posey, 1970]. Наиболее эффективным методом описания удаленных сигналов является представление их как суперпозиции волноводных мод, порожденных источником (метод нормальных мод). Алгоритм решения задачи распространения возмущения, основанный на методе нормальных мод, подробно описан в работе [Pierce et al., 1971], в которой был впервые представлен результат сравнения вычисленного и наблюдавшегося возмущения давления на поверхности Земли в дальней зоне ядерного взрыва. В принципе, на основе алгоритма [Pierce et al., 1971], синтезируя распространяющиеся нормальные моды, можно рассчитать характеристики возмущения на любой высоте, на которой еще справедливо бездиссипативное приближение, в рамках которого авторы работы [Pierce et al., 1971] строили свой алгоритм.

Основной целью нашей работы является исследование возможности аналогичного описания дальнего распространения возмущений на ионосферных высотах. В ионосфере, согласно основополагающей концепции [Hines, 1960], так называемые перемещающиеся ионосферные возмущения (ПИВы) являются следствием просачивания возмущений нейтральной атмосферы из нижних волноводных каналов для ВГВ-мод. В верхней атмосфере в области термосферных высот диссипативное воздействие на волновые процессы становится доминирующим. Это приводит к невозможности игнорирования и даже приближенного учета высших порядков производных в диссипативных членах общей системы волновых уравнений и, как следствие, к существенному усложнению рассматриваемой задачи по сравнению с [Pierce et al., 1971].

Как и в бездиссипативном случае [Pierce et al., 1971], основным элементом задачи является нахождение функции (или матрицы) Грина, для построения которой нам необходимы два решения: нижнее (под источником) и верхнее (над источником), удовлетворяющие физически обусловленным нижним и верхним граничным условиям соответственно. В случае, когда предполагаемые источники находятся в высотном диапазоне, в котором справедливо бездиссипативное приближение, нахождение решения под источником можно считать рутинной задачей. Тогда ключевым моментом является нахождение решения над источником для реалистичной модели атмосферы с полноценным учетом диссипации. Решению именно этой задачи посвящена настоящая работа. Подход основан на сращивании решения слабодиссипативной волновой задачи второго порядка для нижней части атмосферы с решением диссипативной волновой задачи порядка выше второго для верхней части атмосферы и существенно по уровню строгости отличается от метода, предло-

женного в свое время в работе [Francis, 1973a]. В ней получение решения над источником основано на так называемой многослойной технике, когда среда в каждом горизонтальном слое считается изотермической с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности, поэтому представление решения в каждом таком слое возможно в аналитической форме. При учете диссипации, вообще говоря, имеются три типа волн с тремя комплексными значениями квадрата вертикального волнового числа, отвечающих (в области слабой диссипации) обычным акустогравитационным волнам (АГВ) двух типов и чисто диссипативным колебаниям, обусловленным вязкостью и теплопроводностью. В работе [Francis, 1973a] решение в каждом слое представлено только решениями, отвечающими АГВ, а для сшивки решений соседних слоев использовались только два условия из шести. Такое приближение вполне оправдано только на умеренных высотах, отвечающих слабой диссипации, но заведомо некорректно в области доминирования диссипации. Таким образом, для того чтобы решить задачу, Фрэнсис всюду искусственно понижал шестой порядок уравнений до второго порядка. Таким образом, структуру волновых возмущений в нижней части атмосферы и дисперсионные характеристики захваченных неоднородностями нижней атмосферы мод метод Фрэнсиса может рассчитывать достаточно хорошо, но заведомо не может дать правильное описание возмущений в верхней атмосфере. Результаты Фрэнсиса широко используются и в теоретических работах, и в интерпретации наблюдений различных возмущений, в том числе и в верхней атмосфере [Shibata, Okuzawa, 1983; Afraimovich et al., 2001; Vadas, Liu, 2009; Vadas, Nicolls, 2012; Idrus et al., 2013, 2014; Hedlin, Drob, 2014]. В отличие от Фрэнсиса мы используем прием понижения порядка волновых уравнений до второго (в собственном варианте) только для области высот малой диссипации, где это вполне оправдано. Поэтому наш метод в отличие от метода Фрэнсиса позволяет адекватно описывать верхнеатмосферные возмущения.

Другой подход к получению решения над источником развит в работах [Lindzen, 1970, 1971; Lindzen, Blake, 1971]. Основанный на численном методе прогонки для полной системы линейных диссипативных гидродинамических уравнений, он может считаться вполне строгим. Единственным ограничением является использование гидростатического приближения, правомерного только для достаточно длиннопериодных колебаний с частотами, много меньшими частоты Вайсяля–Брента. Результаты, полученные на основе этого подхода, сыграли в свое время важную роль в описании приливных мод и продолжают быть актуальными до сих пор [Forbes, Garret, 1979; Fesen, 1995; Gavrilov, 1995; Grigor'ev, 1999; Akmaev, 2001; Angelats, Forbes, 2002; Yu et al., 2009].

Таким образом, развиваемый нами в настоящей работе подход к нахождению решения над источником отличается от [Francis, 1973a] правильным учетом диссипации, а по сравнению с исследованиями, основанными на работе [Lindzen, 1970], он более универсален, так как по периоду колебаний не имеет

ограничений, связанных с использованием гидростатического приближения. Необходимо отметить, что в настоящей работе менее полно, чем в вышеназванных работах, учитывается диссипация. Это связано с тем, что мы считаем возможным в качестве первого шага пренебречь вязкой диссипацией, оставляя только диссипацию, связанную с теплопроводностью. Такое приближение мы используем в связи с возможностью простого аналитического представления решений в теплопроводной термосфере, что позволяет нам наиболее строго ставить граничные условия, формально соответствующие условиям на бесконечности. Такие условия являются более точными по сравнению с граничными условиями на конечной высоте, использовавшимися в работе [Lindzen, 1970]. Кроме того, это приближение полезно как дающее наиболее прозрачное для анализа представление о воздействии диссипации на волновые движения в верхней атмосфере. Поскольку в реальности диссипация, связанная с теплопроводностью, обнаруживает свое влияние на более низкой высоте, чем вязкая диссипация, используемая нами модель среды вполне хорошо может отражать реальную картину возмущений в верхней атмосфере, по крайней мере, до определенных высот. Впрочем, как будет показано ниже, учет реальной вязкости не является принципиальным ограничением разрабатываемого нами подхода к нахождению решения над источником.

Не является также принципиальным ограничением включение в модель атмосферы ветра, который не учитывается в настоящей работе. Получаемое решение над источником формально существует для всей атмосферы вплоть до Земли и в таком виде (для всех высот) соответствует частному случаю источника на поверхности Земли. Если такое решение при определенных значениях частоты  $\omega$  и горизонтального волнового числа  $k_x$  будет удовлетворять нижним граничным условиям, оно может рассматриваться как некоторое волновое решение. В общем случае с ветром продолжение решения над источником до Земли возможно, только если горизонтальная фазовая скорость волны достаточно велика и ни на одной высоте не равна значению скорости ветра на этой высоте. В противном случае из-за так называемого волнового разрушения (явления, ответственного за турбулентные свойства реальной атмосферы) [Lindzen, 1981] решение над источником будет применимо только до определенной высоты и может быть использовано для случаев источников на достаточно больших высотах. Однако для волновых мод, ответственных за дальнейшее распространение [Francis, 1973b], горизонтальная фазовая скорость составляет порядка скорости звука, поэтому условие ее равенства скорости ветра нигде не выполняется и волновое разрушение для волновых мод не имеет места. Следует также заметить, что особенностью нашего метода является необязательность включения в уравнения добавочных диссипативных членов, модельным образом учитывающих влияние турбулентности, без которых ни один из ранее разработанных методов не может обойтись из-за присущей им численной неустойчивости.

Получение решения над источником с полноценным учетом диссипации может иметь наибольшее значение для синтеза волновых форм на достаточно больших высотах, где диссипацию невозможно учесть никакими приближенными методами, а именно, на высотах, характерных для ПИВ. Для синтеза волновых форм на более низких высотах достаточны алгоритмы для бездиссипативной атмосферы, например алгоритм вышеупомянутой работы [Pierce et al., 1971]. Отметим, что волновые формы возмущений в верхней атмосфере должны иметь менее сложный характер, чем на средних и нижних высотах, вследствие подавления диссипацией многочисленных высокочастотных волновых мод звукового диапазона. Как показано в работе [Francis, 1973b], только одна или две основные моды ВГВ способны за счет волнового просачивания и слабогоризонтального затухания присутствовать на ионосферных высотах. Наше рассмотрение, так же как и общая задача синтеза волновых форм методом нормальных мод, требует линейности возмущений на всех высотах. Учет диссипации обеспечивает падение относительно фоновых параметров амплитуды возмущения с высотой в верхней атмосфере, начиная с некоторого уровня. Это обстоятельство обеспечивает возможность выбора амплитуды источника, достаточно малой для выполнения всюду линейности получаемого решения. На первый взгляд может показаться, что ограничения амплитуд источников для обеспечения линейности возмущений должны быть очень сильными и потому вряд ли выполнимыми для реальных источников. Это объясняется тем, что подавление диссипацией роста относительной амплитуды возмущения с высотой, обусловленного падением в этом направлении значений фоновых параметров, как правило, начинается с высот, на которых амплитуда возмущения по сравнению с амплитудой вблизи Земли может успевать вырасти на несколько порядков. Действительно, возмущения непосредственно над типичными локализованными в пространстве и времени источниками, скорее всего, должны иметь нелинейный характер. Однако мы должны учитывать то обстоятельство, что только небольшая часть энергии возмущения захватывается нижнеатмосферными волноводами, способными переносить волновую энергию на большие расстояния. Кроме того, способные к дальнему распространению моды имеют слабое просачивание вверх, поэтому нарастание относительной амплитуды с высотой для них сильно ослаблено. Далее, если основная спектральная мощность источника распределена в высокочастотном интервале (это характерно, например, для взрывов), амплитуды, отвечающие низкочастотной части спектра, порождающей волновые моды, будут существенно меньше основных амплитуд источника. Все эти факторы вполне могут приводить к обеспечению условий линейности волновых мод. В пользу правильности предположения о линейности реальных откликов в верхней атмосфере, в частности, говорит то обстоятельство, что для ПИВ типична высокая степень гармоничности [Госсард, Хук, 1978]. Таким образом, можно полагать, что линейное ре-

шение над источником является основой решения задачи о распространении возмущений в стратифицированной атмосфере, если амплитуда источника достаточно мала или нас интересует только волновое распространение возмущения.

Решение задачи о распространении возмущений в атмосфере в рамках бездиссипативного приближения хорошо известно [Госсард, Хук, 1978]. В этом случае задача имеет второй порядок, т. е. она формулируется либо в виде дифференциального уравнения второго порядка, либо в виде эквивалентной ему системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Решение задачи с источником осуществляется с помощью либо функции Грина для уравнения второго порядка, либо матрицы Грина второго порядка соответственно [Госсард, Хук, 1978]. В настоящей работе показано, что в приближении малой диссипации для возмущений не слишком малых вертикальных масштабов можно свести задачу с учетом диссипации, как и в бездиссипативном приближении, к задаче второго порядка. Однако вследствие нарастания диссипации с высотой приближение слабой диссипации в атмосфере применимо только в ее нижней и средней частях. Для описания возмущений в верхней атмосфере приближение слабой диссипации недостаточно, необходимо решать задачу более высокого порядка, чем второй. Однако, как показано в настоящей работе, при этом можно в существенной степени сохранить формализм задачи второго порядка для описания распространения возмущений от источников в нижней и средней частях атмосферы, эти возмущения преимущественно и имеют в ней место. Для этого достаточно часть матрицы Грина второго порядка для бездиссипативной или слабодиссипативной задачи, удовлетворяющую верхним граничным условиям, заменить на удовлетворяющее верхним граничным условиям решение задачи с полноценным учетом диссипации в верхней части атмосферы, совпадающее в нижней части с бездиссипативным или слабодиссипативным решением. Мы называем в настоящей работе такое решение диссипативным решением над источником. Что касается возмущения под источником, для его описания достаточно ограничиться приближением малой диссипации или даже бездиссипативным.

Мы предложили метод построения диссипативного решения над источником в рамках теплопроводной модели атмосферы без вязкости. В этом случае полный набор волновых уравнений представляется системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая, как мы показываем, может быть численно решена сверху, где диссипация велика, до некоторых высот в средней атмосфере, где влияние диссипации достаточно мало. Для продолжения численного решения вниз возникают вычислительные трудности, не позволяющие воспользоваться полным набором волновых уравнений. С другой стороны, диссипация в нижней части атмосферы мала. Мы используем это обстоятельство таким образом, чтобы свести волновую задачу в нижней части атмосферы к задаче второго порядка, как и в бездиссипативном случае. Сращивание всех волновых величин верхней и нижней

частей нашего решения над источником мы осуществляем путем нахождения подходящей комбинации двух удовлетворяющих граничному условию непоступления энергии сверху аналитических асимптотик уравнения 4-го порядка. Таким образом, единое решение над источником строится сверху вниз из решений для трех высотных диапазонов: аналитического решения для изотермической части атмосферы (I); численного решения системы дифференциальных уравнений в неизотермической области верхней атмосферы до высоты  $z_1$ , на которой безразмерная кинематическая теплопроводность достигает достаточной малости (II); решения системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающих колебания атмосферы в приближении малой диссипации в области от  $z_1$  до поверхности Земли (III). Решение II является непрерывным продолжением решения I, так как аналитическое решение I дает начальные значения для численного решения вниз задачи в области II.

Важным элементом построения решения над источником является наша методика сращивания решений II и III. Сращивание состоит в том, что на высоте  $z_1$  мы обеспечиваем непрерывность любых двух из четырех независимых величин. Для двух других мы обеспечиваем несущественную малость скачка на этой высоте посредством подбора специальным способом коэффициентов асимптотик в области I, удовлетворяющих верхнему граничному условию. Таким образом мы получаем высотную структуру единого решения для всех высотных диапазонов атмосферы. Это решение удовлетворяет условию непоступления энергии в направлении Земли. Вследствие усиления роли диссипации с высотой, начиная с некоторой высоты в верхней атмосфере, решение убывает с ее увеличением.

Описание протяженного хвоста, формально неограниченно уходящего в область изотермической атмосферы, является основной особенностью нашего диссипативного решения над источником. Однако, если волна слишком сильно затухает при ее распространении до верхней атмосферы, относительная амплитуда верхнего атмосферного хвоста может оказаться настолько малой, что возмущение с такой амплитудой не представляет интереса. С другой стороны, если волна слабо затухает при распространении до верхней атмосферы, относительная амплитуда такого хвоста в связи с сильным убыванием плотности атмосферы вверх может быть слишком большой, такой что возмущение окажется вне рамок линейного описания. В связи с этим в настоящей работе проведен анализ свойств распространения волн в диссипативной атмосфере, позволяющий оценить возможности проникновения волны в верхнюю атмосферу по параметрам этой волны. Как функция волнового периода рассчитан параметр  $z_c$ , характеризующий высоты, при которых происходит качественное изменение условий волнового распространения в изотермической диссипативной атмосфере с переходом выше  $z_c$  в режим сильной диссипации. Этот параметр выделяется в аналитическом решении волновой задачи [Lyons, Yanowitch, 1974; Yanowitch, 1967a; Yanowitch, 1967b; Rudenko,

1994a]. На высотах, много меньших  $z_c$ , мы имеем приблизительно классическое поведение колебаний, соответствующее колебаниям обычных волновых типов без диссипации. В области высот, больших  $z_c$  (область сильной диссипации), диссипация полностью изменяет характер колебаний, трансформируя их в чисто диссипативные моды. Из уравнений следует, что для конкретного распределения плотности реальной атмосферы  $z_c$  зависит только от волнового периода. Также важной характеристикой способности диссипативного решения над источником проникать в верхнюю атмосферу является введенный нами показатель суммарного вертикального поглощения. Он отражает диссипативные потери волны на высотах, меньших  $z_c$ , в зависимости от ее параметров. Мы осуществляем расчеты показателя суммарного вертикального поглощения на основе WKВ-приближения и аналитического решения.

Мы тестируем наш метод построения диссипативного решения над источником на примере всюду изотермической модели атмосферы, а также приводим расчет диссипативного решения над источником для реальной неизотермической атмосферы. Кроме того, мы сравниваем наше решение с одним из решений, получаемых на основе численного решения полной системы гидродинамических уравнений с частными производными и нелинейными членами, в работе [Гаврилов, Кшевецкий, 2014], для случая источника малой амплитуды. Наше решение воспроизводит практически все детали выбранного для сравнения решения, что говорит, в частности, о достаточной адекватности выбранной нами модели диссипативной атмосферы. В заключение мы приводим матрицу Грина, позволяющую описывать распространение возмущений в атмосфере от произвольных источников.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Представим все физические величины в виде сумм их невозмущенных и возмущенных частей:  $f \rightarrow f_0 + f(z, \omega, \mathbf{k}_\perp) e^{-i\omega t + i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r})}$ , где  $z$  — вертикальная координата. Без ограничения общности можно считать, что координатная ось  $X$  направлена вдоль горизонтального волнового вектора  $\mathbf{k}_\perp$  ( $\mathbf{k}_\perp = (k_x, 0, 0)$ ).

Система гидродинамических уравнений для возмущений дает

$$\begin{aligned} -i\Omega\rho + \rho_0(ik_x v_x + v'_z) + \rho'_0 v_z &= 0, \\ -i\Omega T + (\gamma - 1)T_0(ik_x v_x + v'_z) + T'_0 v_z &= \\ = \frac{\kappa}{c_v \rho_0}(-k_x^2 T + T''), \\ -i\Omega v_x + ik_x p &= v_1(-k_x^2 v_x + v''_x) + \\ + \left(\frac{1}{3}v_1 + v_2\right)(-k_x^2 v_x + ik_x v'_z), \\ -i\Omega v_z + p' + \rho g &= v_1(-k_x^2 v_z + v''_z) + \\ + \left(\frac{1}{3}v_1 + v_2\right)(ik_x v'_z + v''_z), \\ p &= RT_0\rho + R\rho_0 T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $z$ ;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения  $(0, 0, -\mathbf{g})$ ;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $\kappa$  — динамический коэффициент теплопроводности;  $v_1$  и  $v_2$  — динамические коэффициенты первой и второй вязкости.

Получим из системы уравнений (1) нормальные системы дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$\mathbf{F}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{F}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}$  — вектор  $n$  неизвестных величин, достаточных для полного описания волновой задачи в соответствии с выбранным физическим приближением;  $\hat{\mathbf{A}}$  — матрица размерности  $n \times n$ , элементы которой зависят от невозмущенных параметров среды и параметров волны  $(\omega, kx)$ .

Теплопроводная среда,  $n=4$

В этом случае система уравнений (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} -i\omega\rho + \rho_0(ik_x v_x + v'_z) + \rho'_0 v_z &= 0, \\ -i\omega T + (\gamma - 1)T_0(ik_x v_x + v'_z) + T'_0 v_z &= \\ = \frac{\kappa}{c_v \rho_0}(-k_x^2 T + T''), \\ -i\omega v_x + ik_x p &= 0, \\ -i\omega v_z + p' + \rho g &= 0, \\ p &= RT_0\rho + R\rho_0 T. \end{aligned} \quad (3)$$

В этой работе мы не учитываем ветер, поэтому все формулы записываем без него; формулы, учитывающие ветер, могут быть получены с помощью замены  $\omega \rightarrow \Omega$ .

Для представления (3) в виде (2) мы выбираем следующий вектор  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = (T', T, p, v_z). \quad (4)$$

Для построения уравнения вида (2) нам нужны выражения величин  $T''$ ,  $p'$ ,  $v'_z$  через компоненты  $\mathbf{F}$ . Эти выражения нетрудно получить из (3), исключая переменные  $v_x$  и  $\rho$  с помощью 3-го и 5-го уравнений соответственно. Выражение для  $T''$  выводится из 2-го уравнения с использованием выражения  $ik_x v_x + v'_z$  из первого уравнения; выражение для  $p'$  получаем из 4-го уравнения; выражение для  $v'_z$  выводим из 1-го уравнения. Окончательные выражения для элементов матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0; \quad a_{12} = k_x^2 - \frac{i\gamma\omega c_v \rho_0}{\kappa}; \quad a_{13} = \frac{i\omega c_v (\gamma - 1)}{\kappa R}; \\ a_{14} &= \frac{c_v \rho_0 T_0}{\kappa} \left( \frac{T'_0}{T_0} - (\gamma - 1) \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right); \\ a_{21} &= 1; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = 0; \quad a_{24} = 0; \\ a_{31} &= 0; \quad a_{32} = \frac{g\rho_0}{T_0}; \quad a_{33} = -\frac{g}{RT_0}; \quad a_{34} = i\omega\rho_0; \\ a_{41} &= 0; \quad a_{42} = -\frac{i\omega}{T_0}; \quad a_{43} = -\frac{i\omega}{\rho_0} \left( \frac{p'_0}{\rho_0 g} + \frac{k_x^2}{\omega^2} \right); \quad a_{44} = -\frac{\rho'_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переменные  $v_x$  и  $\rho$ , не входящие в вектор  $\mathbf{F}$ , выражаются через его компоненты из 3-го и 5-го уравнений системы (3):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{k_x}{\omega} f_3, \\ \rho &= \frac{1}{RT_0} f_3 - \frac{\rho_0}{T_0} f_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (2), (4)–(6) описывают волновые возмущения для теплопроводной среды в виде нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

*Бездиссипативная среда,  $n=2$*

В этом случае система уравнений (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} -i\omega\rho + \rho_0 (ik_x v_x + v'_z) + \rho'_0 v_z &= 0, \\ -i\omega T + (\gamma - 1)T_0 (ik_x v_x + v'_z) + T'_0 v_z &= 0, \\ -i\omega v_x + ik_x p &= 0, \\ -i\omega v_z + p' + \rho g &= 0, \\ p &= RT_0 \rho + R\rho_0 T. \end{aligned} \quad (7)$$

Вектор  $\mathbf{F}$  для получения уравнения вида (2) выбираем в виде

$$\mathbf{F} = (p, v_z). \quad (8)$$

Путем несложных алгебраических манипуляций с системой уравнений (7) получаем матрицу  $\hat{A}$  для вектора  $\mathbf{F}$ , определяемого выражением (8):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{p'_0}{\gamma\rho_0}; \quad a_{12} = i\omega\rho_0 \left(1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2}\right); \\ a_{21} &= -\frac{i\omega}{\rho_0} \left(\frac{p'_0}{\gamma\rho_0 g} + \frac{k_x^2}{\omega^2}\right); \quad a_{22} = -\frac{p'_0}{\gamma\rho_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\omega_N^2 = -\frac{g^2}{c_s^2} - \frac{g\rho'_0}{\rho_0}$ ,  $c_s = \sqrt{\gamma RT_0}$  — скорость звука. Величины  $T$ ,  $v_x$ ,  $\rho$ ,  $T$  выражаются через компоненты вектора  $\mathbf{F}$  вида (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma - 1}{\gamma R\rho_0} f_1 + \frac{T_0 \omega_N^2}{i\omega g} f_2, \\ v_x &= \frac{k_x}{\omega} f_1, \\ \rho &= \frac{1}{\gamma RT_0} f_1 - \frac{\rho_0 \omega_N^2}{i\omega g} f_2, \\ T' &= \frac{1}{R\rho_0} f_1 - \frac{T'_0}{\rho_0} \rho - \frac{p'_0}{\rho_0} T - \frac{T_0}{\rho_0} \rho'. \end{aligned} \quad (10)$$

В последней формуле набора уравнений (10) величины  $f_1$  и  $\rho'$  определяются из уравнения (2).

Уравнения (2), (8)–(10) описывают волновые возмущения в виде нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка в случае бездиссипативной среды.

*Слабодиссипативная среда,  $n=2$*

Мы будем рассматривать только возмущения, масштаб которых существенно превышает диссипа-

тивный масштаб. В таком случае при слабой диссипации можно ограничиться при выводе диссипативных членов из (3) бездиссипативными соотношениями, что приводит уравнения к задаче второго порядка. Из (3) получаем соотношения

$$\begin{aligned} p' &= a_{11}p + a_{12}v_z + iHR\rho_0 s(T'' - k^2 T), \\ v'_z &= a_{21}p + a_{22}v_z + \frac{\omega H^2}{T_0} s(T'' - k^2 T). \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения состояния имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{R\rho_0} p - \frac{T_0}{\rho_0} \rho, \\ T'' &= \frac{1}{R\rho_0} p'' - \frac{T_0}{\rho_0} \rho'' + 2\left(\frac{1}{R\rho_0}\right)' p' - \\ &- 2\left(\frac{T_0}{\rho_0}\right)' \rho' + \left(\frac{1}{R\rho_0}\right)'' p - \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right)'' \rho. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$  выражаем из 4-го уравнения системы (7):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\omega}{g} \rho_0 v_z - \frac{1}{g} p', \\ \rho' &= \frac{i\omega}{g} \rho_0 v'_z + \frac{i\omega}{g} \rho'_0 v_z - \frac{1}{g} p'', \\ \rho'' &= \frac{i\omega}{g} \rho_0 v''_z + \frac{2i\omega}{g} \rho'_0 v'_z + \frac{i\omega}{g} \rho''_0 v_z - \frac{1}{g} p'''. \end{aligned} \quad (13)$$

Затем величины  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$ ,  $v'_z$ ,  $v''_z$ , входящие в (13), выражаем из (2), (7), (8):

$$\begin{aligned} p' &= a_{11}p + a_{12}v_z, \\ v'_z &= a_{21}p + a_{22}v_z, \\ p'' &= a_{11}p' + a_{12}v'_z + a'_{11}p + a'_{12}v_z, \\ v''_z &= a_{21}p' + a_{22}v'_z + a'_{21}p + a'_{22}v_z, \\ p''' &= a_{11}p'' + a_{12}v''_z + 2a'_{11}p' + 2a'_{12}v'_z + a''_{11}p + a''_{12}v_z. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (12)–(14) позволяют привести систему уравнений (11) к нормальной форме (2):

$$\begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix}' = \tilde{A} \begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Решения этой системы уравнений дают только обычные атмосферные волны с учетом воздействия на них диссипации; они не содержат специфических «диссипативных» решений, присущих исходной системе волновых диссипативных уравнений с более высоким порядком дифференциальных уравнений.

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

Модель изотермической диссипативной атмосферы необходима в построении диссипативного решения над источником как для получения этого решения в изотермической части верхней атмосферы, так и для выявления специфических свойств распространения возмущений в верхней атмосфере с экспоненциально растущим с высотой воздействием диссипации. Эти

свойства присущи не только изотермической, но и неизотермической верхней атмосфере; их анализ необходим для правильного сращивания частей решения над источником для верхней атмосферы и нижней бездиссипативной атмосферы. Весьма существенно для успешного анализа свойств распространения волн в случае изотермической диссипативной атмосферы то обстоятельство, что можно привести задачу к одному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим изотермическую атмосферу с постоянными коэффициентами теплопроводности и вязкости, формально простирающуюся во всем пространстве  $z \in [-\infty, \infty]$ :

$$\begin{aligned} p_0(z) &= p_0(z_r) e^{-\frac{(z-z_r)}{H}}, \\ \rho_0(z) &= \rho_0(z_r) e^{-\frac{(z-z_r)}{H}}, \\ H &= \frac{RT_0}{g}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\kappa = const, \nu_1 = const, \nu_2 = const.$$

Здесь  $H$  — высота однородной атмосферы;  $z_r$  — высота, на которой величины невозмущенных давления и плотности считаются заданными. В изотермическом случае перейдем к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &\equiv (x^*, y^*, z^*) = \mathbf{r} / H \equiv (x, y, z) / H, \quad t^* = t\sqrt{g/H}, \\ k &= k_x H, \quad \sigma = \omega\sqrt{H/g}, \\ n &= \rho' / \rho_0, \quad f = p' / p_0, \quad \Theta = T' / T_0, \\ u &= v_x / c_s, \quad w = v_y / c_s, \quad v = v_z / c_s. \end{aligned} \quad (17)$$

Также будем использовать безразмерные кинематические диссипативные величины:

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{\kappa}{\sigma\gamma c_v H \sqrt{gH}} \rho_0^{-1}, \\ \mu(z) &= \frac{\nu_1}{\sigma H \sqrt{gH}} \rho_0^{-1}, \\ q(z) &= \frac{(\nu_1/3 + \nu_2)}{\sigma H \sqrt{gH}} \rho_0^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя введенные определения (16)–(18) к линеаризованным уравнениям состояния, непрерывности, момента и изменения энтропии (1), получаем систему волновых уравнений для возмущений плотности, давления, скорости и температуры:

$$\begin{aligned} (a) \quad &\Theta = f - n, \\ (b) \quad &-i\sigma n + \Psi - \sqrt{\gamma}v = 0, \\ (c) \quad &-i\sigma f - \sqrt{\gamma}v + \gamma\Psi = \sigma\gamma s\Delta^*\Theta, \\ (d) \quad &-i\sigma\sqrt{\gamma}u + ikf = \sqrt{\gamma}\sigma\mu\Delta^*u + ik\sigma q\Psi, \\ (e) \quad &-i\sigma\sqrt{\gamma}v + \dot{f} - f + n = \sqrt{\gamma}\sigma\mu\Delta^*v + \sigma q\dot{\Psi}, \\ (f) \quad &-i\sigma w = \sigma\mu\Delta w. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь точка означает производную функции по аргументу  $z^*$ ;  $\Psi = \sqrt{\gamma}(\dot{v} + iku)$  — безразмерная ди-

вергенция возмущения скорости;  $\Delta^* = \frac{d^2}{dz^{*2}} - k^2$  —

безразмерный оператор Лапласа.

Уравнение (19f) описывает независимое тривиальное вязкое решение, не связанное с интересующими нас возмущениями. Поэтому далее полагаем  $w=0$  и рассматриваем систему пяти уравнений (19a–19e) на неизвестные  $(\Theta, n, f, u, v)$ . Кинематические диссипативные коэффициенты  $s, \mu$  и  $q$  являются функциями, экспоненциально растущими с высотой. На малых высотах, где диссипативными эффектами можно пренебречь, система (19) описывает классические звуковые и гравитационные колебания. В реальной атмосфере теплопроводность больше вязкости. Поэтому с увеличением высоты в первую очередь проявляется именно теплопроводная диссипация на той высоте, где безразмерная функция  $s$  становится порядка единицы. Соответствующая этому высота  $z_c$  в реальной атмосфере может быть определена согласно первой формуле (18) из условия

$$\frac{\kappa}{\sigma\gamma c_v (H(z_c))^2 \rho_0(z_c)} = 1. \quad (20)$$

Эта формула учитывает зависимость от  $z$  высоты однородной атмосферы. Как будет видно далее, вхождение в это условие частоты  $\omega$  обусловлено свойствами волновых решений, у которых нижнее и верхнее асимптотическое поведение определяется отношением величины  $s$  к единице. Значение  $z_c$  может быть вычислено путем решения неявного уравнения (20). Из (20) видно, что с повышением частоты колебаний критическая высота должна также увеличиваться. Далее мы будем полагать для удобства, что начало отсчета безразмерной координаты  $z$  соответствует  $z_c$ :

$$z^* = \frac{(z - z_c)}{H}. \quad (21)$$

Соответственно  $p_0(z_r)$  и  $\rho_0(z_r)$  в (16) определяются значениями на высоте  $z_r = z_c$  и, следовательно, также неявно будут зависеть от частоты колебаний. Из (20) и (21) выражения для  $s, \mu, \text{ и } q$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s &= e^{z^*}, \\ \mu &= \frac{\nu_1}{\kappa} c_v e^{z^*}, \\ q &= \frac{\nu_1/3 + \nu_2}{\kappa} c_v e^{z^*}. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (19a)–(19e) допускает сведение к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 6-го порядка на одну переменную  $\Theta$ . Для вывода этого уравнения осуществляется следующая последовательность исключения переменных. Вначале мы исключаем  $n$  и  $f$  из уравнений (19a), (19b):

$$n = \frac{1}{i\sigma}(\Psi - \sqrt{\gamma}v), \quad f = \Theta + n = \Theta + \frac{1}{i\sigma}(\Psi - \sqrt{\gamma}v). \quad (23)$$

Используя (23), получаем следующие выражения:

$$(a) \quad \Psi = \frac{\sigma}{\gamma - 1}(\gamma s \Delta^* \Theta + i\Theta),$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & i\sigma\sqrt{\gamma}u + \frac{k}{\sigma}\sqrt{\gamma}v + \sqrt{\gamma}\sigma\mu\Delta^*u = \\
 & = ik\Theta - ik\left(\sigma q - \frac{1}{i\sigma}\right)\Psi, \\
 (c) \quad & i\sigma\sqrt{\gamma}v + \frac{\sqrt{\gamma}}{i\sigma}\dot{v} + \sqrt{\gamma}\sigma\mu\Delta^*v = \\
 & = \dot{\Theta} - \Theta - \left(\sigma q - \frac{1}{i\sigma}\right)\dot{\Psi}, \\
 (d) \quad & \Psi = \sqrt{\gamma}(\dot{v} + ikv), \\
 (e) \quad & \theta = \sqrt{\gamma}(\dot{u} - ikv), \\
 (f) \quad & \Delta^*u \equiv (\dot{\Theta} + ik\Psi)/\sqrt{\gamma}, \\
 (g) \quad & \Delta^*v \equiv (\dot{\Psi} + ik\theta)\sqrt{\gamma}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь (24a) — результат вычитания (19b) из (19c) с использованием (19a); (24b) и (24c) — результат подстановки (23) в (19d) и (19e) соответственно; (24d) — определение дивергенции; (24e) — новая вспомогательная функция тока; (24f) и (24g) — вспомогательные тождества, очевидным образом следующие из определений дивергенции и токовой функции. Уравнение (24a) дает нам явное выражение дивергенции  $\Psi$  через возмущение температуры  $\Theta$ . Токовую функцию  $\theta$  также можно выразить явно через  $\Theta$  с помощью суммирования продифференцированного уравнения (24c) и уравнения (24b), умноженного на  $ik$ :

$$\theta = \frac{\sigma}{k} \frac{1}{1+i\sigma^2\mu} \left[ \hat{L} \left( \sigma(\mu+q)\Psi - \Theta - \frac{1}{i\sigma}\Psi \right) + i\sigma\Psi \right], \tag{25}$$

где  $\hat{L} = \Delta^* - (d/dz^*)$ . Дифференцируя (24b) и вычитая (24c), умноженное на  $ik$ , мы получаем дифференциальное уравнение, выражаемое через одну неизвестную функцию  $\Theta$ :

$$(1 - i\hat{L}\mu)\Theta + k(\mu+q)\Psi - (k/\sigma)\Theta = 0 \tag{26}$$

или в более развернутой форме

$$(1 - i\hat{L}\mu) \frac{\hat{L} \left( \sigma(\mu+q)\Psi - \Theta - \frac{1}{i\sigma}\Psi \right) + i\sigma\Psi}{1 + i\sigma^2\mu} + \tag{27}$$

$$+ \frac{k^2}{\sigma}(\mu+q)\Psi - \frac{k^2}{\sigma^2}\Theta = 0.$$

Выражения через  $\Theta$  остальных величин представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\sigma^2}{\sigma^4 - k^2} \times \\
 & \times \left[ \left( 1 - \frac{d}{dz^*} - \frac{k^2}{\sigma^2} \right) (\Psi + i\sigma\Theta) - \right. \\
 & \left. - i\sigma^2(\mu+q) \left( \frac{d}{dz^*} + \frac{k^2}{\sigma^2} \right) \Psi - k\mu \left( \frac{d}{dz^*} + \sigma^2 \right) \theta \right], \tag{28}
 \end{aligned}$$

$$f = \Theta + \frac{i}{\sigma}(\sqrt{\gamma}v - \Psi),$$

$$u = \left( \frac{k}{\sigma}f + i\mu\dot{\Theta} - k(\mu+q)\Psi \right) \frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

$$n = f - \Theta.$$

Равенства (27) и (28) полностью описывают волновое возмущение в выбранной модели среды. Уравнение (27) не имеет аналитических решений, но может быть использовано для анализа асимптотического поведения решений при больших и малых  $z^*$  или для численного решения [Rudenko, 1994a, b]. Уравнение (27), в отличие от бездиссипативных уравнений, позволяет построить решение, не обладающее бесконечным ростом амплитуды относительных величин возмущений, т. е. для такого решения может быть применимо линейное приближение [Rudenko, 1994a] на всех высотах.

### 3.1. АГВ в изотермической теплопроводной атмосфере

Наиболее интересная возможность получения аналитической формы диссипативных решений, описывающей возмущения как звукового, так и гравитационного диапазонов, имеется в модели атмосферы как теплопроводной среды без вязкости ( $\mu=q=0$ ). В этом случае уравнения (27) и (28) принимают следующий вид:

$$\left[ -\hat{L} \left( \Theta + \frac{1}{i\sigma}\Psi \right) + i\sigma\Psi \right] - \frac{k^2}{\sigma^2}\Theta = 0, \tag{29}$$

$$\Psi = \frac{\sigma}{\gamma-1} \left( \gamma e^{z^*} \Delta^*\Theta + i\Theta \right),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\sigma^2}{\sigma^4 - k^2} \left( 1 - \frac{d}{dz^*} - \frac{k^2}{\sigma^2} \right) (\Psi + i\sigma\Theta),$$

$$f = \Theta + \frac{i}{\sigma}(\sqrt{\gamma}v - \Psi), \tag{30}$$

$$u = \frac{k}{\sqrt{\gamma}\sigma}f,$$

$$n = f - \Theta.$$

Введение новой переменной

$$\xi = \exp \left( -z^* + i\pi \frac{3}{2} \right) \tag{31}$$

позволяет представить уравнение (29) в канонической форме обобщенного гипергеометрического уравнения

$$\left[ \xi \prod_{j=1}^2 (\delta - a_j + 1) - \prod_{i=1}^4 (\delta - b_i) \right] \Theta = 0, \tag{32}$$

где  $\delta = \xi d/d\xi$ ,  $a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm iq$ ,  $b_{1,2} = \pm k$ ,  $b_{3,4} = 1/2 \pm \alpha$ ,

$$q = \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{k^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{\gamma} - k^2}, \tag{33}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + k^2 - \sigma^2}.$$

Уравнение (32) имеет две особые точки:  $\xi=0$  (регулярная особая точка,  $z^*=+\infty$ ) и  $\xi=\infty$  (иррегулярная особая точка,  $z^*=-\infty$ ). Фундаментальная система решений уравнения (32) может быть образована четырьмя линейно независимыми обобщенными функциями Мейера [Luke, 1975]:



$$\begin{aligned}
 (a) \quad \Theta_1 &= G_{2,4}^{4,1} \left( \xi e^{-i\pi} \left| \begin{array}{c} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \right. \right), \\
 (b) \quad \Theta_2 &= G_{2,4}^{4,1} \left( \xi e^{-i\pi} \left| \begin{array}{c} a_2, a_1 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \right. \right), \\
 (c) \quad \Theta_3 &= G_{2,4}^{4,0} \left( \xi e^{-2i\pi} \left| \begin{array}{c} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \right. \right), \\
 (d) \quad \Theta_4 &= G_{2,4}^{4,0} \left( \xi \left| \begin{array}{c} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \right. \right).
 \end{aligned} \tag{34}$$

Решение уравнения (29) может быть найдено с использованием известных асимптотик функций  $\Theta_{ii}$  в двух особых точках уравнения (32). В иррегулярной точке  $\xi=\infty$  ( $z^*=-\infty$ ) имеем:

$$\begin{aligned}
 (a, b) \quad \Theta_{1,2}(\xi) &\sim \Theta_{1,2}^\infty(\xi) = p_{1,2} e^{(1/2 \mp iq)z^*} = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \mp iq + k\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} \mp iq - k\right) \Gamma(1 \mp iq + \alpha) \Gamma(1 \mp iq + \alpha)}{\Gamma(1 \mp 2iq)} \times \\
 &\times e^{\mp \frac{\pi q}{2} - i \frac{\pi}{4}} e^{(1/2 \mp iq)z^*}, \\
 (c, d) \quad \Theta_{3,4}(\xi) &\sim \Theta_{3,4}^\infty(\xi) = \pi^{1/2} e^{-i \frac{\pi}{8}(1 \mp 2)} e^{z^*/4} e^{\mp \sqrt{2}(1-i)e^{-z^*/2}}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Из (35 a, b) следует, что при вещественных  $q$  асимптотики  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  отвечают двум бегущим в разных направлениях классическим бездиссипативным волнам. Мы будем полагать, что  $\Theta_1$  отвечает волне, распространяющейся вверх, а  $\Theta_2$  — вниз. Тогда для  $\sigma$  и  $k$ , соответствующих звуковым волнам, будем полагать  $q < 0$ , а внутренним гравитационным волнам —  $q > 0$ . Асимптотики  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ , задаваемые выражениями (35c, d), отвечают колебаниям диссипативной природы. Эти асимптотики являются функциями  $z^*$  с чрезвычайно быстрым падением и ростом. Мы можем получить на  $z^* \rightarrow -\infty$  решение, масштаб которого может определяться недиссипативными параметрами среды (крупномасштабное) в случае  $\Theta_4=0$ , в противном случае мы получим решение, масштаб которого определяется диссипацией (мелкомасштабное). Нас интересует в настоящей работе крупномасштабное решение на  $z^* \rightarrow -\infty$ , так как только решение такого типа существует в масштабе всей атмосферы. Таким образом, мы выбираем решение с  $\Theta_4=0$ ; падающая  $\Theta_3$  очень быстро уходит с физической сцены при уменьшении  $z^*$ , и мы получаем при  $z^* \rightarrow -\infty$  крупномасштабное решение.

Поведение вблизи регулярной точки  $\xi=0$  ( $z^* \rightarrow +\infty$ ) остальных решений  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ , и  $\Theta_3$  представляется следующими выражениями:

$$\Theta_i \sim \Theta_i^0 = \sum_{j=1}^4 t_{ij} e^{-bjz^*}, \quad (i=1, 2, 3). \tag{36}$$

Выражения для  $t_{ij}$  выводятся из известных определений асимптотического разложения G-функций Мейера в регулярной особой точке [Luke, 1975]. Явные их выражения даны в приложении.

В построении физического решения будем руководствоваться тем, что в нем не должны присутствовать растущие вверх асимптотические члены  $\sim e^{-b_2 z^*}$  и  $\sim e^{-b_4 z^*}$ . Кроме того, считается, что амплитуда падающей волны равна 1. В соответствии с этим искомым решением ищем в виде

$$\Theta(\xi) = p_1^{-1} \Theta_1(\xi) + \alpha_2 \Theta_2(\xi) + \alpha_3 \Theta_3(\xi), \tag{37}$$

где коэффициенты  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  подбираются из условия исключения растущих асимптотик в окрестности регулярной особой точки уравнения (32):

$$\begin{aligned}
 p_1^{-1} t_{12} + \alpha_2 t_{22} + \alpha_3 t_{32} &= 0, \\
 p_1^{-1} t_{13} + \alpha_2 t_{23} + \alpha_3 t_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Решая систему (38), имеем:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \alpha_2 &= -p_1^{-1} e^{-2\pi q} \times \\
 &\times \frac{\sin[\pi(\alpha - iq)] \cos[\pi(k - iq)]}{\sin[\pi(\alpha + iq)] \cos[\pi(k + iq)]}, \\
 (b) \quad \alpha_3 &= 2\pi p_1^{-1} \frac{e^{-\pi q}}{e^{i2\pi\alpha} + e^{i2\pi k}} \times \\
 &\times \left\{ \frac{\sin[\pi(\alpha - iq)]}{\sin[\pi(\alpha + iq)]} - \frac{\cos[\pi(k - iq)]}{\cos[\pi(k + iq)]} \right\}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Выражения (37) и (39a), (39b) дают аналитическое выражение для искомого физического решения. Для значений  $|\xi| < 1$  ( $z^* > 0$ ) решение (37) может быть выражено через обобщенные гипергеометрические функции  ${}_mF_n$ , которые в этой области аргумента, как известно, представляются простыми сходящимися степенными рядами, удобными для численного расчета. Такое представление решения получается из стандартного представления G-функции Мейера

$$\begin{aligned}
 G_{p,q}^{m,n} \left( y \left| \begin{array}{c} a_p \\ b_q \end{array} \right. \right) &= \\
 &= \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - b_h)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^n \Gamma(a_j - b_h)} y^{b_h} \times \\
 &\times {}_pF_{q-1} \left( \begin{array}{c} 1 + b_h - a_p \\ 1 + b_h - b_q^* \end{array} \middle| (-1)^{p-m-n} y \right).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь \* означает, что член с индексом, равным  $h$ , пропускается. Используя (40), после достаточно громоздких выкладок можно привести решение (37) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \Theta(z^* > 0) &= \beta_0 \beta_1 e^{-kz^*} \times \\
 &\times {}_2F_3 \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} + k - iq, \frac{1}{2} + k + iq \\ 1 + 2k, \frac{1}{2} + k + \alpha, \frac{1}{2} + k - \alpha \end{array} \middle| -ie^{-z^*} \right) + \\
 &+ \beta_0 \beta_2 e^{-\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)z^*} \times \\
 &\times {}_2F_3 \left( \begin{array}{c} 1 + \alpha - iq, 1 + \alpha + iq \\ 1 + \frac{1}{2} + \alpha - k, 1 + \frac{1}{2} + \alpha + k, 1 + 2\alpha \end{array} \middle| -ie^{-z^*} \right),
 \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$\beta_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iq + k\right)\Gamma(iq + \alpha)}{\Gamma(2iq)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + k\right)} e^{-\frac{i\pi}{4} - \frac{\pi q}{2}},$$

$$\beta_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + iq + k\right)}{\Gamma(1 + 2k)\Gamma(1 - iq + \alpha)} e^{-\frac{i\pi k}{2}},$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} - \alpha + k\right)\Gamma(1 + iq + \alpha)}{\left(\frac{1}{2} + \alpha + k\right)\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2} - iq + k\right)} e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)}.$$

При  $z^* \rightarrow \infty$  обобщенные гипергеометрические функции  $\mathbf{F}$  в (41) стремятся к единице, а решение  $\Theta$  приобретает простой асимптотический вид с двумя экспоненциально падающими слагаемыми.

Найденное решение описывает падение внутренней гравитационной или звуковой волны произвольного наклона на диссипативную область  $z^* > 0$ , отражение от этой области и проникновение в нее с трансформацией в диссипативную форму. Комплексный коэффициент отражения имеет аналитическое выражение

$$K = \alpha_2 p_2. \quad (42)$$

В работе [Rudenko, 1994a] показано, что модуль коэффициента отражения принимает значения порядка единицы, если характерный вертикальный масштаб падающей волны  $q^{-1} \gtrsim 1$ . В обратном случае вклад отраженной волны экспоненциально уменьшается с уменьшением вертикального масштаба. Такое поведение отражения аналогично обычному отражению волны от неоднородности среды. В нашем случае масштабом неоднородности является высота однородной атмосферы  $H$ .

Полезно ввести в рассмотрение еще одну функцию параметров волны:

$$\eta = |\Theta(0)|. \quad (43)$$

Мы будем называть  $\eta$  показателем суммарного вертикального поглощения. Величина  $\eta$  характеризует величину суммарного вертикального затухания волны в области ( $z^* < 0$ ), одновременно она характеризует способность волнового возмущения проникать в верхнюю атмосферу. Если  $\eta$  близок 1, возмущение доходит до верхних слоев атмосферы без потери энергии. Если  $\eta$  пренебрежимо мал, волновое возмущение в области  $z^* > 0$  можно игнорировать. То, что  $\eta$  определяется без каких-либо ограничений на значения волновых параметров, дает возможность его использования в качестве универсальной характеристики волнового распространения. Как будет показано далее, поведение  $\eta$  в зависимости от вертикального волнового масштаба аналогично поведению коэффициента отражения.

### 3.2. Диссипативные свойства АГВ

Для понимания конкретных волновых проявлений на высотах верхней атмосферы важно представ-

ление возможных режимов волнового распространения, связанных с воздействием диссипации. Интересны, во-первых, определение характерной высоты, начиная с которой диссипация принимает на себя основное управление волновым процессом, во-вторых, тип волнового распространения возмущения (слабо диссипативное распространение или распространение с доминирующей диссипацией).

#### 3.2.1. Критическая диссипативная высота

Независимость  $z_c$  от горизонтальной длины волны дает возможность провести полезную классификацию волн только по их периоду. Для проведения такой классификации далее используется высотное распределение температуры  $T_0(z)$  согласно модели NRLMSISE-2000 с географическими координатами Иркутска для местного полудня зимнего противостояния:

$$-p_0(z) = p_0(0) e^{-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0(z')} dz'}, \quad p_0(0) = 1.01 \text{ Па};$$

$$-\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0(z')} dz'}, \quad \rho_0(0) = 287.0 \text{ г/м}^3;$$

$$-g = 9.807 \text{ м/с}^2, \quad R = 287 \text{ J/(kgK)},$$

$$\kappa = 0.026 \text{ J/(Kms)}, \quad c_v = 716.72 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

Решение уравнения (20) на  $z_c$  (рис. 1) дает следующую полезную информацию: а) высоту трансформации волн выбранного периода в диссипативные колебания; б) высоту, выше которой волны выбранного периода с вертикальными масштабами, много меньшими высоты атмосферы, существенно подавляются диссипацией (фактически такие волны не присутствуют на этих высотах); в) высоту, ограничивающую возможность применения WKБ-приближения для волны выбранного периода.

#### 3.2.2. Показатель суммарного вертикального поглощения

Важной характеристикой волны с конкретными волновыми параметрами  $\sigma$  и  $k$  является отношение амплитуды волнового решения на высоте  $z_c$  к амплитуде волны, бегущей из  $-\infty$ , которое мы в (43) обозначили  $\eta$  и назвали показателем суммарного вертикального поглощения. Эта величина вычисляется из (41). Она дает полезную информацию о способности данной волны иметь физически значимую амплитуду на высотах порядка и больше  $z_c$ . Однако проследить изменение амплитуды от  $-\infty$  до  $z_c$  мы не можем.

Прямое вычисление волнового решения для области высот  $z < z_c$  на основе общего выражения (37) технически вряд ли осуществимо. Первый член асимптотического разложения (35а) описывает решение только на достаточно большом удалении от  $z_c$  и не отражает истинного поведения амплитуды при наличии диссипации, поскольку он имеет форму обычной распространяющейся бездиссипативной волны. Только начиная с  $z_c$ , мы имеем возможность точного вычисления решения с помощью степенного разло-

жения (41). Поэтому для получения представления о распределении диссипативных потерь волны по высоте, мы получим  $\eta$  с помощью WKB-решения уравнения (32). Для этого перепишем уравнение (32)

на новую переменную  $\Theta_{\text{ref}} = \Theta e^{-\frac{1}{2}z^*}$ :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^{*2}} + q^2 + \frac{e^{z^*}}{i} \left( \frac{d^2}{dz^{*2}} - \frac{1}{4} - k^2 + \sigma^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \left( \frac{d}{dz^*} + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right) \right\} \Theta_{\text{ref}} = 0. \quad (44)$$

В WKB-приближении уравнение (44) дает алгебраическое уравнение четвертой степени на комплексное безразмерное вертикальное волновое число  $k_z^*$ :

$$-k_z^{*2} + q^2 + \frac{e^{z^*}}{i} \left( -k_z^{*2} - \frac{1}{4} - k^2 + \sigma^2 \right) \times \\ \times \left( \left( -k_z^* + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right) = 0. \quad (45)$$

Заметим, что уравнение (45) может быть получено из аналогичного дисперсионного уравнения (19) в статье [Vadas, 2005] посредством удаления из него членов, содержащих первую и вторую вязкости. Мы рассмотрим внутренние гравитационные волны (ВГВ) с малыми частотами  $\sigma$  и  $k_z^* \gg 1$ . В этом случае уравнение

$$-k_z^{*2} + q^2 + \frac{e^{z^*}}{i} (k_z^{*2} + k^2)^2 = 0 \quad (46)$$

дает четыре корня, из которых нас будет интересовать один, отвечающий распространяющейся вверх ВГВ в пределе  $z^* \rightarrow -\infty$ :

$$k_z^* = -\sqrt{\frac{2K^2}{\sqrt{4ie^z K^2 + 1} + 1}} - k^2, \quad (47)$$

где  $K = \sqrt{q^2 + k^2}$  — модуль полного волнового вектора бездиссипативной волны.

Показатель суммарного вертикального поглощения волны ниже высоты  $z^*$  в WKB-приближении может быть представлен в виде:

$$\eta_{\text{WKB}}(z^*) = \sqrt{\frac{q}{|k_z^*(z^*)|}} e^{-\text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{z^*} k_z^*(z^*) dz^* \right]} = \\ = \sqrt{\frac{q}{|k_z^*(z^*)|}} e^{-\Gamma}. \quad (48)$$

Выражение (48) можно использовать также для оценки диссипативного затухания волны в реальной атмосфере. В приближении изотермической атмосферы интеграл в экспоненте может быть представлен в аналитической форме:

$$\Gamma = \text{Re} \left[ i\sqrt{2}K \times \right. \\ \left. \times \left( 2i \ln \frac{a+in}{a-in} + b \ln \frac{b-a}{b+a} - 2a - i \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right], \quad (49)$$

$$\text{где } n = \frac{k}{\sqrt{2}K}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4iKe^{z^*}}} - n^2}; \quad b = \sqrt{\frac{1}{2} - n^2}.$$

Кроме величины, определенной формулой (48), может быть также полезным в качестве характеристики диссипативного затухания волны отношение амплитуд возмущения на высоте  $z^*$  и на заданной ниже высоте  $z_n^*$ :

$$\eta_{\text{WKB}}(z^*, z_n^*) = \eta_{\text{WKB}}(z^*) / \eta_{\text{WKB}}(z_n^*). \quad (50)$$

Найденная согласно (48), (49) величина  $\eta_{\text{WKB}}(z^*)$  при  $z^*=0$  представляет собой показатель суммарного вертикального поглощения (43) в WKB-приближении. На рис. 2 представлены  $\eta_{\text{WKB}}(0)$  и  $\eta$ , вычисленный согласно (43). Функция  $\eta_{\text{WKB}}(z^*)$  качественно описывает амплитуду волнового решения в изотермической атмосфере ниже высоты  $z_c(z^*, 0)$  (рис. 3).

Кривые показателей суммарного вертикального поглощения  $\eta_{\text{WKB}}(0)$  и  $\eta$  на рис. 2 демонстрируют, как это и должно быть, сходимость в области применимости WKB-приближения при уменьшении вертикальных волновых масштабов. Полученная схо-

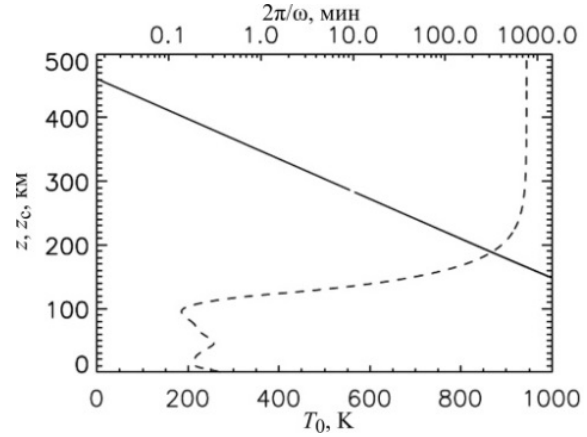


Рис. 1. Штриховая кривая — высотная зависимость температуры для выбранной модели; правая часть сплошной линии — зависимость  $z_c$  от периода колебаний, соответствующих падающим снизу IGW-волнам; левая часть сплошной линии — зависимость  $z_c$  от периода колебаний, соответствующих падающим снизу звуковым волнам

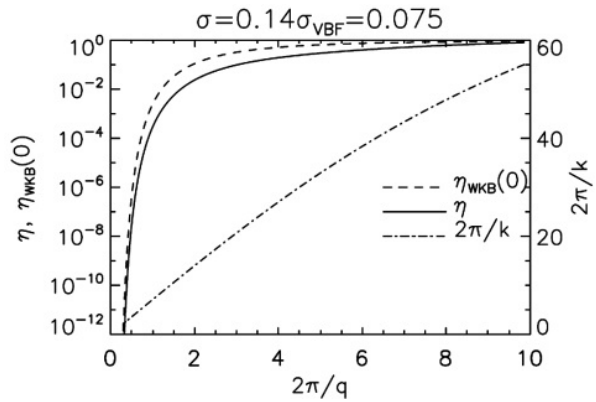


Рис. 2. Сплошная линия — зависимость величины  $\eta$  от вертикальной длины падающей волны; штриховая — то же для величины  $\eta_{\text{WKB}}(0)$ ; штрихпунктирная линия — зависимость горизонтальной длины волны от вертикальной длины падающей волны для выбранных волновых решений (ось справа). Частота  $\sigma$  постоянна и равна 0.14 частоты Вэйсяля-Брента  $\sigma_{\text{VBF}}$

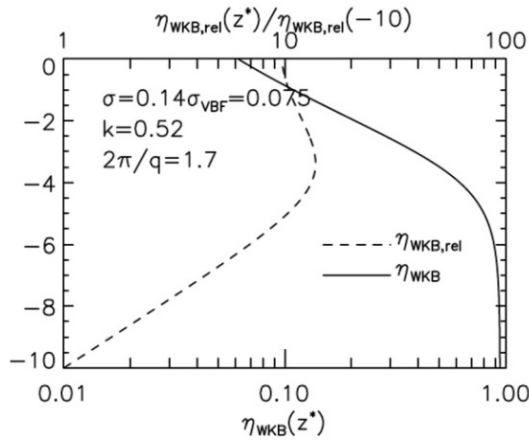


Рис. 3. Высотная зависимость величин затухания  $\eta_{WKB}$  и  $\eta_{WKB,rel}$  при заданных волновых параметрах

димось этих кривых при больших вертикальных масштабах представляет интерес с той точки зрения, что может оправдывать использование WKB-приближения для амплитудных оценок реальных длинноволновых возмущений, несмотря на то, что формально условие применимости WKB-приближения для таких возмущений не выполняется.

Рисунок 3 наглядно показывает предсказуемый типичный характер высотного распределения амплитуды волны ниже  $z_c$ . Видно, что воздействие диссипации начинается на высоте нескольких масштабов высоты атмосферы. Вспомогательная величина  $\eta_{WKB,rel} = e^{2z^*} \eta_{WKB}(z^*)$  демонстрирует подавление диссипацией экспоненциального роста амплитуды относительных колебаний. Подавление экспоненциального роста обеспечивает возможность удовлетворения линейности возмущения на всех высотах.

Общая картина распределения показателя суммарного вертикального поглощения для внутренних гравитационных и акустических волн представлена на рис. 4, где показаны уровни постоянных значений  $\eta$  в плоскости волновых параметров  $(k, \sigma)$ . Для удобства сопоставления значений  $\eta$  с соответствующим вертикальным масштабом на рис. 5 представлены уровни постоянных значений вертикального волнового числа  $q$  в той же плоскости. Рисунки 4, 5 классифицируют в зависимости от  $k$  и  $\sigma$  волны слабого, умеренного и сильного затухания и позволяют оценивать возможность их проникновения на высоты выше  $z_c$ .

#### 4. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ НАД ИСТОЧНИКОМ ДЛЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЫ

Проведенный в предыдущем разделе анализ позволяет нам приступить к построению диссипативного решения над источником для неизотермической атмосферы.

Поскольку верхняя часть неизотермической атмосферы удовлетворяет условию изотермичности, наше решение над источником в этой части неизотермической атмосферы должно быть некоторой комбинацией решений, имеющих нерастущие асимп-

тотики  $\sim e^{-kz^*}$  и  $\sim e^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)z^*}$ . Найденное нами решение (41) для изотермической всюду атмосферы, кроме того, не содержит чрезвычайно быстро растущую вниз асимптотику (35d), которая не должна присутствовать в физическом решении. Можно записать (41) в следующем виде:

$$\Theta = \Theta^{(k)} + \Theta^{(\alpha)}, \quad (51)$$

где

$$\Theta^{(k)} = \beta_0 \beta_1 e^{-kz^*} {}_2F_3 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + k - iq, \frac{1}{2} + k + iq & & \\ & & -ie^{-z^*} \\ 1 + 2k, \frac{1}{2} + k + \alpha, \frac{1}{2} + k - \alpha \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\Theta^{(\alpha)} = \beta_0 \beta_2 e^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)z^*} {}_2F_3 \times \begin{pmatrix} 1 + \alpha - iq, 1 + \alpha + iq & & \\ & & -ie^{-z^*} \\ 1 + \frac{1}{2} + \alpha - k, 1 + \frac{1}{2} + \alpha + k, 1 + 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(\alpha)}$  также остальные возмущенные параметры с асимптотиками соответствующего вида, получаемыми из (30) подстановкой (52). Мы будем использовать обозначения  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(\alpha)}$  не только для изотермического решения, но и для его продолжения в неизотермическую область.

Наше решение над источником для неизотермической атмосферы должно быть представлено суммой решений, совпадающих в изотермической ее части с аналитическими решениями  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(\alpha)}$  (52). Однако ясно, что, так как граничные условия внизу во всюду изотермической атмосфере и в реальной атмосфере различны, в реальной атмосфере функции

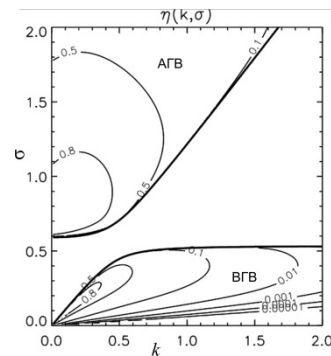


Рис. 4. Уровни значений  $\eta$  в плоскости волновых параметров  $k$  и  $\sigma$

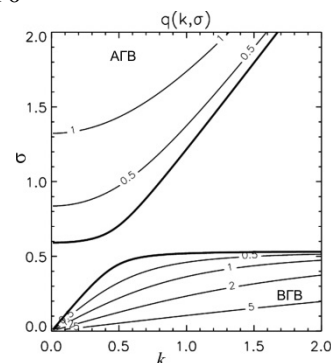


Рис. 5. Уровни значений  $q$  в плоскости волновых параметров  $k$  и  $\sigma$

$\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  должны входить в решение над источником в комбинации, отличной от (51). В случае реальной атмосферы, когда необходимая комбинация решений  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  неизвестна, нужно исходить из того соображения, что правильная комбинация решений  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  на высотах, соответствующих малым значениям параметра  $s \ll 1$ , должна давать решение, близкое некоторому решению слабодиссипативной задачи. Это условие будет условием сращивания решений в верхней диссипативной атмосфере и нижней бездиссипативной атмосфере. Для выполнения такого условия правильная комбинация для реальной атмосферы не должна содержать быстро растущего вниз решения, подобного (35d), как это имеет место в решении для всюду изотермической атмосферы (41). Что касается быстро падающей вниз подобно (35c) части решения для реальной атмосферы, она в правильной комбинации при  $s \ll 1$  пренебрежимо мала при естественном предположении, что вклад этой части решения на высотах, где  $s \sim 1$ , равновелик вкладу остальной части решения. Имея правильную комбинацию решений  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$ , мы получаем в верхней части атмосферы, ограниченной снизу некоторой высотой с малым значением локального параметра  $s$ , решение, удовлетворяющее как верхнему граничному условию, так как оно является комбинацией  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$ , так и вследствие подбора коэффициентов комбинации  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  условию сращивания решений в верхней диссипативной атмосфере и нижней слабодиссипативной атмосфере. Затем, используя значения возмущенных величин  $p$  и  $v$  на выбранной высоте, соответствующей малому значению параметра  $s$ , в качестве начальных условий, мы можем найти решение над источником в нижней атмосфере вплоть до поверхности Земли.

Итак, мы выделяем три высотных диапазона:

$$\begin{aligned} R^I : z \in [z_I, \infty]; \\ R^{II} : z \in [z_s, z_I]; \\ R^{III} : z \in [0, z_s]. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь  $z_I$  — минимальная высота зоны изотермичности выбираемой модели атмосферы;  $z_s$  — высота, соответствующая выбираемому малому значению параметра  $s$  ( $s = s_1 \ll 1$ ). В области  $R^{II}$  мы решаем задачу Коши для системы уравнений (2), (4)–(6). В связи с этим при выборе  $s_1$  мы руководствуемся критерием обратимости численного решения задачи Коши (2), (4)–(6) в высотном диапазоне  $R^{II}$ . Очевидно, что численная неустойчивость, связанная с наличием быстрого асимптотического нарастания решения (подобного в изотермическом случае (35d)), при слишком малых значениях параметра  $s$  неизбежно нарушает обратимость задачи Коши. Проведенные нами численные исследования показали, что оптимальной величиной для  $s_1$ , удовлетворяющей условию обратимости, является значение 0.05. Ниже этого порога численные ошибки проявляются, быстро нарастая до бесконечности с дальнейшим уменьшением  $s_1$ .

В области  $R^I$  мы рассчитываем по аналитическим формулам (52), (30) два решения  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$ . Используя аналитические выражения векторов  $\mathbf{F}$  решений

$\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  на высоте  $z_I$  в качестве граничных условий волновой задачи (2), (4)–(6), соответственно решаем численно две задачи Коши в области  $R^{II}$ . После того как решения  $\dots^{(k)}$  и  $\dots^{(a)}$  получены в области  $R^I R^{II}$ , мы приступаем к поиску их правильной комбинации. Без ограничения общности искомую комбинацию представляем в виде  $\dots^{(k)} + W \dots^{(a)}$ , где множитель  $W$  — искомая величина. Согласно нашему предположению, на высоте  $z_s$  величины  $T, T'$  должны с хорошей точностью удовлетворять уравнениям (10) для слабодиссипативного приближения. Обозначая эти величины как  $T_{III} = T_{III}(p, v), T'_{III} = T'_{III}(p, v)$ , мы можем ввести вектор

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H(T^{(k')} - T_{III}^{(k')}) + WH(T^{(a')} - T_{III}^{(a')}) \\ (T^{(k)} - T_{III}^{(k)}) + W(T^{(a)} - T_{III}^{(a)}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1 + Wa_2 \\ b_1 + Wb_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (54)$$

Минимизация нормы вектора (54) как положительно определенной комплекснозначной билинейной формы

$$(a_1 + Wa_2)(\overline{a_1 + Wa_2}) + (b_1 + Wb_2)(\overline{b_1 + Wb_2}) \quad (55)$$

дает уравнение на комплексный коэффициент  $W$ :

$$W = -\frac{a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2}{a_2 \bar{a}_2 + b_2 \bar{b}_2}. \quad (56)$$

Здесь черта означает комплексно сопряженную величину. Формулы (2), (10), (54) и (56) дают искомое выражение коэффициента  $W$  через величины  $(p, v)^{(k), (a)}$  на высоте  $z_I$ . Очевидно, если минимум нормы (54) относительно параметра  $W$  достигается вблизи ее нулевого значения, мы имеем малость разности всех величин, определяемых равенствами (10). Расчеты показали, как и следовало ожидать, что сращивание согласно нашей процедуре обеспечивается с точностью порядка  $s_1$ . Таким образом, определив  $W$ , мы нашли часть решения над источником в области  $R^I R^{II}$ .

Мы завершаем построение диссипативного решения над источником в нижней зоне  $R^{III}$ , решая задачу Коши для уравнения (15). Начальными значениями  $p, v$  на верхней границе  $R^{III}$  являются значения  $p, v$  диссипативного решения над источником в области  $R^I R^{II}$  на ее нижней границе.

## 5. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ДИССИПАТИВНОГО РЕШЕНИЯ НАД ИСТОЧНИКОМ ДЛЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЫ

Мы провели тестовые расчеты диссипативного решения над источником для модели всюду изотермической атмосферы, используя код, разработанный в соответствии с описанным выше методом построения диссипативного решения над источником для неизотермической атмосферы. В примере выбраны безразмерные волновые параметры  $\sigma = 0.0616, k = 0.1289$ . Если взять характерный масштаб высоты атмосферы  $H = 28$  км, эти параметры будут соответствовать

колебанию с волновым периодом  $T=90.84$  мин и горизонтальной длиной волны  $\lambda_{\text{гор}}=1365$  км.

**Тест А**

На рис. 6 дается представление численного решения для модели всюду изотермической атмосферы. Мы используем волновые величины в соответствии с обозначениями раздела 3.

На панелях рис. 6, а, б приведены высотные зависимости модулей волновых величин в обычном и логарифмическом масштабах соответственно. Фрагмент рис. 6, с представляет фазы комплексных значений этих же величин. В данном случае мы выбрали высоту перехода от аналитического решения к численному, равную критической высоте  $z_t^* = z_c^* = 0$ . Любой выбор  $z_t^* > 0$  приводит к одному и тому же результату. Параметры  $s_t$  и соответствующая ему высота  $z_t^*$  даны в нижней правой части рис. 6. При решении в обратном направлении с высоты  $z_t^*$  задачи Коши для (2), (15) все высотные зависимости с очень хорошей точностью воспроизводятся в области  $R^I R^{II}$ . Мы не приводим результаты этих тестов, поскольку они совпадают с результатом, показанным на рис. 6, который наглядно убеждает в достаточной гладкости волнового решения во всех его компонентах. Показатели разрывности величин  $\Theta, n$  на высоте  $z_t^*$  отображены в нижней правой части рис. 6,  $\delta_{[X]}$  обозначает величину

$$\delta_{[X]} = 2 \frac{|X(+z_t^*) - X(-z_t^*)|}{|X(+z_t^*)| + |X(-z_t^*)|} \quad (57)$$

Как мы и ожидали, значения этих величин малы и имеют порядок  $s_t$ .

**Тест В**

Был проведен также тест, основанный на том, что аналитическое решение, задаваемое уравнением (41), дает нам готовое решение над источником в области  $R^I$ . Использовалось сразу это решение для

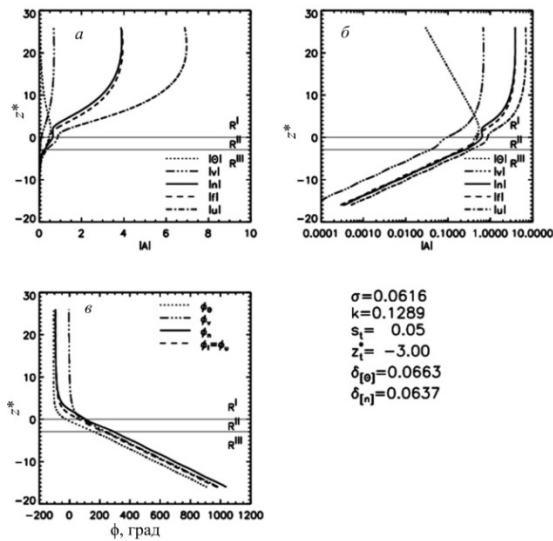


Рис. 6. Пример численного диссипативного решения над источником для изотермической атмосферы

постановки задачи Коши в  $R^{II}$ . При этом не приводится соответствующее решение над источником, так как оно графически идентично приведенному на рис. 6. Но в этом случае мы получили несколько лучшие меры разрывности решения:  $\delta_{[\Theta]}=0.0272$ ;  $\delta_{[n]}=0.0264$ .

**Тест С**

В области  $R^I R^{III}$  мы не имеем возможности вычисления волнового решения в аналитической форме из-за трудностей, связанных с формальной расходимостью рядов гипергеометрических функций в уравнении (41). Мы можем использовать для тестов только асимптотику аналитического решения при  $z^* \rightarrow \infty$ . На рис. 7 показаны результаты сравнения нашего диссипативного решения над источником с асимптотикой аналитического решения. В качестве тестируемой величины мы выбрали

$$\text{Re}\Theta_{\text{ref}} = \text{Re}\left(\Theta e^{-\frac{1}{2}z^*}\right) \quad (\text{сплошная линия}).$$

Для асимптотики аналитического решения  $\text{Re}\Theta_{\text{ref}}$  выводится из формул (35a, b), (37) и (42):

$$\text{Re}\Theta_{\text{ref}}^y = \text{Re}\left(e^{-iqz^*} + Ke^{iqz^*}\right) \quad (\text{пунктирная линия}).$$

В нашем случае комплексный коэффициент  $K$  достаточно мал,  $K=-0.0055-i0.0439$ . Специально для сравнения мы произвели расчеты как с учетом малой диссипации в области  $R^{III}$ , так и без ее учета в этой области. Кроме того, для сравнения мы использовали также два значения  $s_t$ . Результаты изображены на различных панелях рис. 7. Расчеты для панелей (а), (б) и (в), (г) различаются тем, что для (а), (б) в области  $R^{III}$  учитывалась малая диссипация согласно (11)–(15), а для (в), (г) использовалось бездиссипативное приближение (2), (8)–(10). Панели (а) и (б) рис. 7 дают результаты для случаев с наименьшим значением  $s_t, s_t=0.05$ , а (в) и (г) соответствуют большему значению параметра  $s_t, s_t=0.2$ . Во всех случаях мы явно видим выход численного решения над источником на его аналитическую асимптотику с точностью до фазы. Сравнивая (а) и (б), можно обнаружить едва заметное преимущество результата (а). Более явно виден положительный эффект учета малой диссипации в  $R^{III}$  на панели (в) по

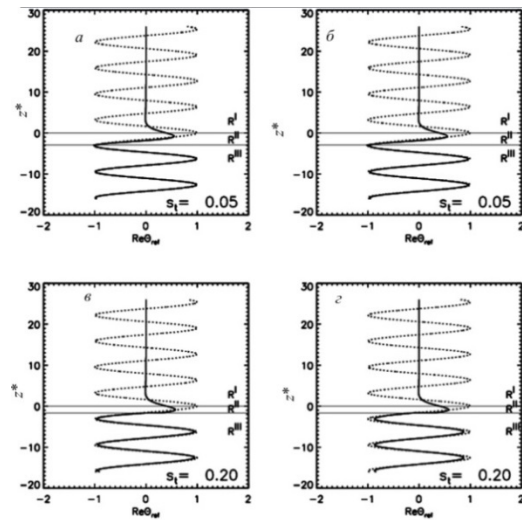


Рис. 7. Расчеты для анализа численного решения над источником в нижней асимптотической области

сравнению с (z). Наиболее явно видно преимущество учета малой диссипации по метрикам разрывности решений для этих случаев:

Рис. 7a —  $\delta_{[\Theta]}=0.0272, \delta_{[n]}=0.0264$ ;

Рис. 7b —  $\delta_{[\Theta]}=0.1245, \delta_{[n]}=0.1200$ ;

Рис. 7c —  $\delta_{[\Theta]}=0.3760, \delta_{[n]}=0.3400$ ;

Рис. 7d —  $\delta_{[\Theta]}=0.4792, \delta_{[n]}=0.4408$ .

Как и следовало ожидать, наилучший результат дает случай (a). Последние равенства убеждают нас в целесообразности применения «диссипативной» поправки и при наименьших допустимых значениях параметра  $s_t$ , а также в достаточности для  $s_t$  значения 0.05.

### 6. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ НАД ИСТОЧНИКОМ ДЛЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЫ

Использована модель атмосферы, введенная в 3.2.1, с высотным распределением невозмущенной температуры, приведенным на рис. 1. Расчет выполнен для периода  $T=90.84$  мин и горизонтальной длины волны  $\lambda_{hor}=1365$  км. Выбранные параметры соответствуют безразмерным  $\sigma$  и  $k$ , использованным в тестах на изотермической модели. Для нормировки решения над источником использовано условие:

$$\text{Max}(\sqrt{v_x^2 + v_z^2}) = 50 \text{ м/с.}$$

Результаты расчетов отражены на рис. 8. Они наглядно демонстрируют достаточную гладкость решения во всех его компонентах на высоте  $z_t$ . Показатели разрывности  $\delta_{[\Theta]}=0.129, \delta_{[n]}=0.091$  примерно в пять раз больше, чем в изотермическом случае, но остаются достаточно малыми. В верхней части атмосферы выше  $z_c$  высотные зависимости компонент решения близки по своему характеру соответствующим зависимостям изотермической модели.

Так же как и в случае изотермической модели, сравниваем полученное решение с решением бездиссипативной задачи. Для этого решаем задачу Коши для уравнений (2), (15) в обратном направлении от Земли до высоты  $z_c$ . Полученное решение мы не приводим в силу его слишком малого графического отличия от решения, показанного на рис. 8.

Мы полагаем, что интересно привести сравнение нашего решения с одним из решений [Гаврилов, Кшевецкий, 2014], получаемых на основе численного решения полной системы гидродинамических уравнений с частными производными и нелинейными членами. Для этого мы произвели расчет нашего решения при параметрах, соответствующих случаю расчета эволюции приближенно линейного возмущения в работе [Гаврилов, Кшевецкий, 2014], вызываемого включением гармонического источника малой амплитуды на нижней границе. Мы даем наше решение (рис. 9) в представлении, соответствующем рис. 2, в из работы [Гаврилов, Кшевецкий, 2014]. Нетрудно видеть, что наше решение хорошо воспроизводит детали решения из работы [Гаврилов, Кшевецкий, 2014]. Заметим, что на точность этого совпадения не повлияла неучтенность нами

вязкости и турбулентной диссипации, что говорит о достаточной адекватности выбранной нами модели диссипации атмосферы.

### 7. МАТРИЦА ГРИНА

Задачу эволюции возмущения от некоего источника без учета диссипации, как известно, можно решить с помощью матрицы Грина  $2 \times 2$ . [Камке, 2003]. Бездиссипативное решение, однако, обладает тем недостатком, что не может адекватно отразить высотную структуру в верхних слоях атмосферы, поэтому там необходимо использовать задачу более высокого порядка, чем второй. Однако можно достичь цели описания высотной структуры в верхних слоях атмосферы и при этом в существенной степени сохранить формализм задачи второго порядка. Это возможно сделать в том случае, когда, как это преимущественно и происходит в атмосфере, источник возмущения расположен не слишком высоко — так, что не попадает в область сильной диссипации.

Для нахождения возмущения, создаваемого неким источником, с учетом диссипации мы введем расширенную матрицу Грина. Сначала запишем матрицу Грина для решения слабодиссипативной задачи. Неоднородная слабодиссипативная задача имеет вид

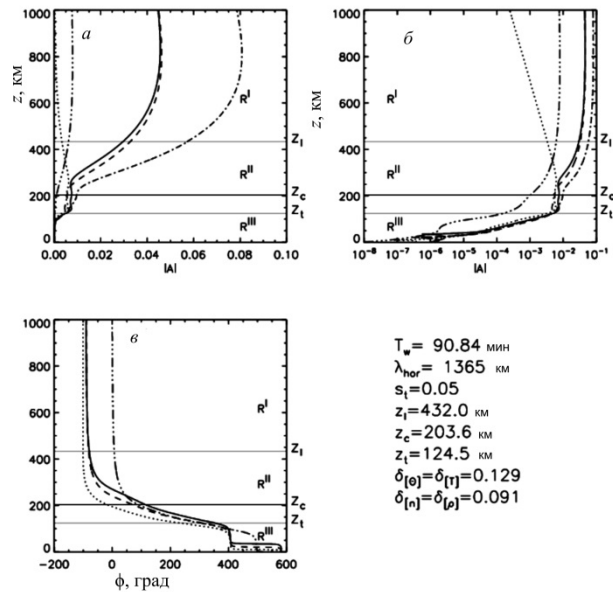


Рис. 8. Пример численного решения над источником для неизотермической атмосферы

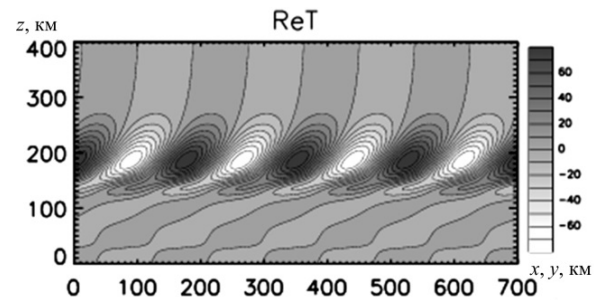


Рис. 9. Распределение возмущенной температуры решения с аналогичными волновыми параметрами, использованными в работе [Гаврилов, Кшевецкий 2014]:

$$\lambda_x = \lambda_y = 175 \text{ км; } \frac{2\pi}{\omega} = 11 \text{ мин}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_p \\ f_v \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Однородная часть (58) получена в разделе 2 (15), функции  $\begin{pmatrix} f_p \\ f_v \end{pmatrix}$  описывают источник. Уравнения (58) представляют собой задачу второго порядка, и соответствующая матрица Грина имеет порядок  $2 \times 2$ . Для ее построения введем обозначения:  $\mathbf{F}^u = (p^u, v_z^u)$  — слабодиссипативное решение над источником;  $\mathbf{F}^l = (p^l, v_z^l)$  — слабодиссипативное решение под источником. Пусть  $a \leq z_s$ . В области  $z \leq a$  решение  $\mathbf{F}^u$  отвечает слабодиссипативной задаче и удовлетворяет верхнему граничному условию при  $z=a$  (мы не вводим это условие явно), а нижнее решение  $\mathbf{F}^l$  удовлетворяет условию  $v_z^l(0) = 0$ . Нижнее решение мы можем легко получить, например, путем решения задачи Коши для однородных уравнений (15) с начальным условием  $\mathbf{F}^l(0) = (1, 0)$ . Функция Грина для области  $z < a$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} G_{11}(z, z') &= \frac{1}{V(z')} \times \begin{cases} p^u(z) v_z^l(z'), & 0 < z' < z, \\ p^l(z) v_z^u(z'), & z < z' < a, \end{cases} \\ G_{12}(z, z') &= \frac{1}{V(z')} \times \begin{cases} v_z^u(z) v_z^l(z'), & 0 < z' < z, \\ v_z^l(z) v_z^u(z'), & z < z' < a, \end{cases} \\ G_{21}(z, z') &= \frac{-1}{V(z')} \times \begin{cases} p^u(z) p^l(z'), & 0 < z' < z, \\ p^l(z) p^u(z'), & z < z' < a, \end{cases} \\ G_{22}(z, z') &= \frac{-1}{V(z')} \times \begin{cases} v_z^u(z) p^l(z'), & 0 < z' < z, \\ v_z^l(z) p^u(z'), & z < z' < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь  $V(z') = v_z^l(z') p^u(z') - v_z^u(z') p^l(z')$ , а решение (58) есть

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_0^a G_{11}(z, z') f_p(z') dz' + \int_0^a G_{21}(z, z') f_v(z') dz', \\ v_z(z) &= \int_0^a G_{12}(z, z') f_p(z') dz' + \int_0^a G_{22}(z, z') f_v(z') dz'. \end{aligned} \quad (60)$$

Ясно, что, если мы расширим выражение для (59) формально вверх до бесконечности ( $a \rightarrow \infty$ ) полученным в настоящей работе диссипативным решением над источником, мы получим из (60) решение диссипативной задачи (3), (8), (9) и с источником из (58). Аналитический диссипативный хвост вверху будет описывать возмущение в верхних слоях атмосферы:

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}^u(z) \int_0^{z_{\max}} \frac{1}{V(z')} [v_z^l(z') f_p(z') - p^l(z') f_v(z')] dz',$$

где всюду выше высоты  $z_{\max}$  неоднородные члены уравнения (58) имеют нулевые значения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод построения для реальной атмосферы диссипативного волнового решения над источником. Имея такое решение, можно найти возмущение, производимое источником в горизонтально-однородной атмосфере

на любой ее высоте. Решение задачи с источником осуществляется либо с помощью функции Грина уравнения, либо матрицы Грина соответственно. Особенно просто такая задача решается в случае, когда источник расположен на высотах, где применимо приближение малой диссипации. Для этого достаточно в качестве части функции Грина (или матрицы Грина), удовлетворяющей нижним граничным условиям, взять решение в приближении малой диссипации или даже бездиссипативным, а в качестве части функции Грина (или матрицы Грина), удовлетворяющей верхним граничным условиям, использовать решение над источником, полученное указанным в настоящей работе способом. Это решение над источником получается непрерывным продолжением аналитического решения для верхней изотермической части атмосферы вниз численным решением для средней неизотермической части; последнее решение сращивается с решением для нижней части. В двух верхних частях диссипация не мала, и задача с ее полноценным учетом имеет 4-й порядок. В нижней части диссипация мала. Для случая малой диссипации в настоящей работе предложен специальный способ ее учета, который позволяет в нижней части атмосферы ограничиться задачей второго порядка.

Спецификой полученного решения над источником является наличие протяженного хвоста, формально неограниченно уходящего в область изотермической атмосферы. Если волна слабо затухает на протяжении ее распространения до верхней атмосферы, относительная амплитуда такого хвоста в связи с сильным убыванием плотности атмосферы вверх может быть слишком большой, такой что возмущение окажется вне рамок линейного описания. Если волна слишком сильно затухает на протяжении ее распространения до верхней атмосферы, относительная амплитуда верхнего атмосферного хвоста может оказаться настолько малой, что возмущение с такой амплитудой не представляет интереса. В связи с такой особенностью решения в работе проведен анализ основных свойств распространения волн в диссипативной атмосфере, позволяющий оценить возможности проникновения волны в верхнюю атмосферу по параметрам этой волны. Рассчитан параметр  $z_c$ , характеризующий высоты, на которых происходит качественное изменение условий волнового распространения в изотермической диссипативной атмосфере с переходом выше  $z_c$  в режим сильной диссипации. В качестве характеристики диссипации на высотах, меньших  $z_c$ , вводится показатель суммарного вертикального поглощения. Для этого показателя получены формулы в WKВ-приближении и с использованием точного аналитического решения.

Метод построения диссипативного решения над источником протестирован на примере модели всюду изотермической атмосферы. Наиболее существенные элементы проведенного теста — расчет скачков в области сращивания, продемонстрировавший их достаточную малость, и сравнение численного решения с асимптотикой аналитического решения в области малой диссипации, продемонстрировавшее их совпадение. Приведены также результаты расчета решения над источником для неизотермической атмосферы.



**ПРИЛОЖЕНИЕ**

$$t_{11} = \frac{\Gamma(-2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k - iq\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k - iq\right)} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{12} = \frac{\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - k - iq\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k - iq\right)} \times$$

$$\times e^{-\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{13} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma(-2\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - iq\right)}{\Gamma(-iq - \alpha)} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)},$$

$$t_{14} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - iq\right)}{\Gamma(-iq + \alpha)} \times$$

$$\times e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)},$$

$$t_{21} = \frac{\Gamma(-2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k + iq\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + iq\right)} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{22} = \frac{\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + iq\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k + iq\right)} \times$$

$$\times e^{-\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{23} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma(-2\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + iq\right)}{\Gamma(iq - \alpha)} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)},$$

$$t_{24} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + iq\right)}{\Gamma(iq + \alpha)} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)},$$

$$t_{31} = \frac{\Gamma(-2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + iq\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - k - iq\right)} e^{-\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{32} = \frac{\Gamma(2k)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k + iq\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k - iq\right)} e^{\frac{i\pi k}{2}},$$

$$t_{33} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma(-2\alpha)}{\Gamma(-\alpha + iq)\Gamma(-iq - \alpha)} e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)},$$

$$t_{34} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha + iq)\Gamma(-iq + \alpha)} e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}.$$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

Гаврилов Н.М., Кшевецкий С.П. Численное моделирование распространения нелинейных акустико-гравитационных волн в средней и верхней атмосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 1. С. 76–82.

Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань, 2003. 576 с.

Afraimovich E.L., Kosogorov E.A., Lesyuta O.S., Ushakov I.I., Yakovets A.F. Geomagnetic control of the spectrum of traveling ionospheric disturbances based on data from a global GPS network // Annales Geophysicae. 2001. V. 19, iss. 7. P. 723–731. DOI: 10.5194/angeo-19-723-2001.

Akmaev R.A. Simulation of large-scale dynamics in the mesosphere and lower thermosphere with the Doppler-spread parameterization of gravity waves: 2. Eddy mixing and the diurnal tide // J. Geophys. Res. Atmosph. 2001. V. 106, iss. D1. P. 1205–1213. DOI: 10.1029/2000JD900519.

Angelats i Coll M., Forbes J.M. Nonlinear interactions in the upper atmosphere: The s=1 and s=3 nonmigrating semidiurnal tides // J. Geophys. Res. Space Phys. 2002. V. 107, Iss. A8. P. SIA 3–1. CiteID 1157. DOI: 10.1029/2001JA900179.

Gavrilov N.M. Distributions of the intensity of ion temperature perturbations in the thermosphere // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, iss. A12. P. 23835–23844. DOI: 10.1029/95JA01927.

Grigor'ev G.I. Acoustic-gravity waves in the Earth's atmosphere (review) // Radiophys. Quantum Electronics. 1999. V. 42, iss. 1. P. 1–21. DOI: 10.1007/BF02677636.

Idrus Intan Izafina, Martina Abdullah, Alina MarieHasbi, Asnawi Husin, Baharuddin Yatim. Large-scale traveling ionospheric disturbances observed using GPS receivers over high-latitude and equatorial regions // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 2013. V. 102. P. 321–328. DOI: 10.1016/j.jastp.2013.06.014.

Fesen C.G. Tidal effects on the thermosphere // Surveys in Geophys. 1995. V. 13, iss. 3. P. 269–295. DOI: 10.1007/BF02125771.

Forbes J.M., Garrett H.B. Theoretical studies of atmospheric tides // Rev. Geophys. Space Phys. 1979. V. 17, Nov. P. 1951–1981. DOI: 10.1029/RG017i008p01951.

Francis S.H. Acoustic-gravity modes and large-scale traveling ionospheric disturbances of a realistic, dissipative atmosphere // J. Geophys. Res. 1973a. V. 78. P. 2278.

Francis S.H. Lower-atmospheric gravity modes and their relation to medium-scale traveling ionospheric disturbances // J. Geophys. Res. 1973b. V. 78. P. 8289–8295.

Heale C.J., Snively J.B., Hickey M.P., Ali C.J. Thermospheric dissipation of upward propagating gravity wave packets // J. Geophys. Res. Space Phys. 2014. V. 119, iss. 5. P. 3857–3872. DOI: 10.1002/2013JA019387.

Hedlin M.A.H., Drob D.P. Statistical characterization of atmospheric gravity waves by seismoacoustic observations // J. Geophys. Res. Atmosph. 2014. V. 119, iss. 9. P. 5345–5363. DOI: 10.1002/2013JD021304.

Hickey M.P., Walterscheid R.L., Taylor M.J., et al. Numerical simulations of gravity waves imaged over Arecibo during the 10-day January 1993 campaign // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102 (A6). P. 11475–11490.

Hickey M.P., Taylor M.J., Gardner C.S., Gibbons C.R. Full-wave modeling of small-scale gravity waves using airborne lidar and observations of the Hawaiian airglow (ALOHA-93) O(1S) images and coincident Na wind/temperature lidar measurements // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103 (D6). P. 6439–6454.

Hines C.O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights // *Can. J. Phys.* 1960. V. 38. P. 1441–1481.

Kshevetskii S.P., Gavrilov N.M. Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2005. V. 67. P. 1014–1030.

Lindzen R.S. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part I. Mathematical development and propagation of waves into the thermosphere // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. V. 1, iss. 3. P. 303–355.

Lindzen R.S., Blake D. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part II. Thermal tides excited below the mesopause // *Geophys. Fluid Dynamics*. 1971. V. 2:1. P. 31–61. DOI: 10.1080/03091927108236051.

Lindzen R.S. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part III. Daily variations in the thermosphere // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1971. V. 2, Iss. 1. P. 89–121.

Lindzen R.S. Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown // *J. Geophys. Res.* 1981. V. 86. P. 9707–9714.

Luke Y.L. *Mathematical functions and their approximations*. New York: Academic Press, 1975. 584 p.

Lyons P., Yanowitch M. Vertical oscillations in a viscous and thermally conducting isothermal atmosphere // *J. Fluid. Mech.* 1974. V. 66. P. 273–288.

Pierce A.D., Posey J.W. Theoretical predictions of acoustic-gravity pressure waveforms generated by large explosions in the atmosphere. Air Force Camb. Res. Lab. AFCRL-70-0134. 1970.

Pierce A.D., Posey J.W., Illiff E.F. Variation of nuclear explosion generated acoustic-gravity wave forms with burst height and with energy yield // *J. Geophys. Res.* 1971. V. 76(21). P. 5025–5041.

Rudenko G.V. Linear oscillations in a viscous and heat-conducting isothermal atmosphere: Part 1 // *Atmos. Oceanic Phys.* 1994a. V. 30, N 2. P. 134–143.

Rudenko G.V. Linear oscillations in a viscous and heat-conducting isothermal atmosphere: Part 2 // *Atmos. Oceanic Phys.* 1994b. V. 30, N 2. P. 144–152.

Shibata T., Okuzawa T. Horizontal velocity dispersion of medium-scale travelling ionospheric disturbances in the F-region // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1983. V. 45. P. 149–159.

Snively J.B., Pasko V.P. Breaking of thunderstorm-generated gravity waves as a source of short-period ducted waves at mesopause altitudes // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30, N 24. P. 2254. DOI: 10.1029/2003GL018436.

Snively J.B., Pasko V.P. Antiphase OH and OI airglow emissions induced by a short-period ducted gravity wave // *Geophys. Res. Lett.* 2005. V. 32, L08808. DOI: 10.1029/2004GL022221.

Snively J.B., Pasko V.P., Taylor M.J., Hocking W.K. Doppler ducting of short-period gravity waves by midlatitude tidal wind structure // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112, A03304. DOI: 10.1029/2006JA011895.

Vadas S.L., Fritts D.C. Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110, D15103. DOI: 10.1029/2004JD005574.

Vadas S.L., Nicolls M.J. The phases and amplitudes of gravity waves propagating and dissipating in the thermosphere: Theory // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117, iss. A5, CiteID A05322. DOI: 10.1029/2011JA017426.

Vadas S.L., Liu Han-li. Generation of large-scale gravity waves and neutral winds in the thermosphere from the dissipation of convectively generated gravity waves // *J. Geophys. Res.* 2009. V. 114, Iss. A10, CiteID A10310, DOI: 10.1029/2009JA014108.

Walterscheid R.L., Schubert G. Nonlinear evolution of an upward propagating gravity wave: Overturning, convection, transience and turbulence // *J. Atmos. Sci.* 1990. V. 47, N 1. P. 101–125.

Walterscheid R.L., Schubert G., Brinkman D.G. Small-scale gravity waves in the upper mesosphere and lower thermosphere generated by deep tropical convection // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106, N D23. P. 31825–31832.

Yanowitch M. Effect of viscosity on oscillations of an isothermal atmosphere // *Can. J. Phys.* 1967a. V. 45. P. 2003–2008.

Yanowitch M. Effect of viscosity on gravity waves and upper boundary conditions // *J. Fluid. Mech.* 1967b. V. 29, Part 2. P. 209–231.

Yu Y., Hickey M.P. Time-resolved ducting of atmospheric acoustic gravity waves by analysis of the vertical energy flux // *Geophys. Res. Lett.* 2007a. V. 34, L02821. DOI: 10.1029/2006GL028299.

Yu Y., Hickey M.P. Numerical modeling of a gravity wave packet ducted by the thermal structure of the atmosphere // *J. Geophys. Res.* 2007b. V. 112, A06308. DOI: 10.1029/2006JA012092.

Yu Y., Hickey M.P. Simulated ducting of high-frequency atmospheric gravity waves in the presence of background winds // *Geophys. Res. Lett.* 2007c. V. 34, L11103. DOI: 10.1029/2007GL029591.

Yu Y., Hickey M.P., Liu Y. A numerical model characterizing internal gravity wave propagation into the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* 2009. V. 44, iss. 7. P. 836–846. DOI: 10.1016/j.asr.2009.05.014.

## REFERENCES

Gavrilov N.M., Kshevetsky S.P. Numerical modeling of propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the middle and upper atmosphere. *Izvestiya RAN [Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics]*. 2014, vol. 50, no. 1, pp. 76–82 (in Russian).

Gossard E., Khuk U. *Waves in the Atmosphere*. Moscow, Mir Publ., 1978, 532 p. (in Russian).

Kamke E. *Ordinary Differential Equations*. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2003. 576 p. (in Russian).

Afraimovich E.L., Kosogorov E.A., Lesyuta O.S., Ushakov I.I., Yakovets A.F. Geomagnetic control of the spectrum of traveling ionospheric disturbances based on data from a global GPS network. *Annales Geophysicae*. 2001, vol. 19, iss. 7, pp. 723–731. DOI: 10.5194/angeo-19-723-2001.

Akmaev R.A. Simulation of large-scale dynamics in the mesosphere and lower thermosphere with the Doppler-spread parameterization of gravity waves: 2. Eddy mixing and the diurnal tide. *J. Geophys. Res. Atmosph.* 2001. vol. 106, iss. D1, pp. 1205–1213. DOI: 10.1029/2000JD900519.

Angelats i Coll M., Forbes J.M. Nonlinear interactions in the upper atmosphere: The s=1 and s=3 nonmigrating semidiurnal tides. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2002, vol. 107, iss. A8, pp. SIA 3–1. CiteID 1157. DOI: 10.1029/2001JA900179.

Gavrilov N.M. Distributions of the intensity of ion temperature perturbations in the thermosphere. *J. Geophys. Res.* 1995, vol. 100, iss. A12, pp. 23835–23844. DOI: 10.1029/95JA01927.

Grigor'ev G.I. Acoustic-gravity waves in the Earth's atmosphere (review). *Radiophys. Quantum Electronics*. 1999, vol. 42, iss. 1, pp. 1–21. DOI: 10.1007/BF02677636.

Idrus Intan Izafina, Mardina Abdullah, Alina MarieHasbi, Asnawi Husin, Baharuddin Yatim. Large-scale traveling ionospheric disturbances observed using GPS receivers over high-latitude and equatorial regions. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2013, vol. 102, pp. 321–328. DOI: 10.1016/j.jastp.2013.06.014.

Fesen C.G. Tidal effects on the thermosphere. *Surveys in Geophys.* 1995, vol. 13, iss. 3, pp. 269–295. DOI: 10.1007/BF02125771.

Forbes J.M., Garrett H.B. Theoretical studies of atmospheric tides. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1979, vol. 17, Nov, pp. 1951–1981. DOI: 10.1029/RG017i008p01951.

Francis S.H. Acoustic-gravity modes and large-scale traveling ionospheric disturbances of a realistic, dissipative atmosphere. *J. Geophys. Res.* 1973a, vol. 78, p. 2278.

Francis S.H. Lower-atmospheric gravity modes and their relation to medium-scale traveling ionospheric disturbances. *J. Geophys. Res.* 1973b, vol. 78, pp. 8289–8295.

Heale C.J., Snively J.B., Hickey M.P., Ali C.J. Thermospheric dissipation of upward propagating gravity wave packets. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2014, vol. 119, iss. 5, pp. 3857–3872. DOI: 10.1002/2013JA019387.

Hedlin Michael A.H., Drob Douglas P. Statistical characterization of atmospheric gravity waves by seismoacoustic observations. *J. Geophys. Res. Atmos.* 2014, vol. 119, iss. 9, pp. 5345–5363. DOI: 10.1002/2013JD021304.

Hickey M.P., Walterscheid R.L., Taylor M.J., et al. Numerical simulations of gravity waves imaged over Arecibo during the 10-day January 1993 campaign. *J. Geophys. Res.* 1997, vol. 102 (A6), pp. 11475–11490.

Hickey M.P., Taylor M.J., Gardner C.S., Gibbons C.R. Full-wave modeling of small-scale gravity waves using airborne lidar and observations of the Hawaiian airglow (ALOHA-93) O(1S) images and coincident Na wind/temperature lidar measurements. *J. Geophys. Res.* 1998, vol. 103 (D6), pp. 6439–6454.

Hines C.O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960, vol. 38, pp. 1441–1481.

Kshevetskii S.P., Gavrilov N.M. Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2005, vol. 67, pp. 1014–1030.

Lindzen R.S. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part I. Mathematical development and propagation of waves into the thermosphere. *Geophys. Fluid Dynamics.* 1971, vol. 1, iss. 3, pp. 303–355.

Lindzen R.S., Blake D. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part II. Thermal tides excited below the mesopause. *Geophys. Fluid Dynamics.* 1971, vol. 2:1, pp. 31–61. DOI: 10.1080/03091927108236051.

Lindzen R.S. Internal gravity waves in atmospheres with realistic dissipation and temperature. Part III. Daily variations in the thermosphere. *Geophys. Fluid Dynamics.* 1971, vol. 2, iss. 1, pp. 89–121.

Lindzen R.S. Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.* 1981, vol. 86, pp. 9707–9714.

Luke Y.L. Mathematical functions and their approximations. Academic Press, New York, 1975. 584 p.

Lyons P., Yanowitch M. Vertical oscillations in a viscous and thermally conducting isothermal atmosphere. *J. Fluid. Mech.* 1974, vol. 66, pp. 273–288.

Pierce A.D., Posey J.W. Theoretical predictions of acoustic-gravity pressure waveforms generated by large explosions in the atmosphere. Air Force Camb. Res. Lab. AFCRL-70-0134. 1970.

Pierce A.D., Posey J.W., Illiff E.F. Variation of nuclear explosion generated acoustic-gravity wave forms with burst height and with energy yield. *J. Geophys. Res.* 1971, vol. 76(21), pp. 5025–5041.

Rudenko G.V. Linear oscillations in a viscous and heat-conducting isothermal atmosphere: Part 1. *Atmos. Oceanic Phys.* 1994a, vol. 30, no. 2, pp. 134–143.

Rudenko G.V. Linear oscillations in a viscous and heat-conducting isothermal atmosphere: Part 2. *Atmos. Oceanic Phys.* 1994b, vol. 30, no. 2, pp. 144–152.

Shibata T., Okuzawa T. Horizontal velocity dispersion of medium-scale travelling ionospheric disturbances in the F-region. *J. Atmos. Terr. Phys.* 1983, vol. 45, pp. 149–159.

Snively J.B., Pasko V.P. Breaking of thunderstorm-generated gravity waves as a source of short-period ducted waves at mesopause altitudes. *Geophys. Res. Lett.* 2003, vol. 30, no. 24, p. 2254. DOI: 10.1029/2003GL018436.

Snively J.B., Pasko V.P. Antiphase OH and OI airglow emissions induced by a short-period ducted gravity wave. *Geophys. Res. Lett.* 2005, vol. 32, L08808. DOI: 10.1029/2004GL022221.

Snively J.B., Pasko V.P., Taylor M.J., Hocking W.K. Doppler ducting of short-period gravity waves by midlatitude tidal wind structure. *J. Geophys. Res.* 2007, vol. 112, A03304. DOI: 10.1029/2006JA011895.

Vadas S.L., Fritts D.C. Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 2005, vol. 110, D15103. DOI: 10.1029/2004JD005574.

Vadas S.L., Nicolls M.J. The phases and amplitudes of gravity waves propagating and dissipating in the thermosphere: Theory. *J. Geophys. Res.* 2012, vol. 117, iss. A5, CiteID A05322. DOI: 10.1029/2011JA017426.

Vadas S.L., Liu Han-li. Generation of large-scale gravity waves and neutral winds in the thermosphere from the dissipation of convectively generated gravity waves. *J. Geophys. Res.* 2009, vol. 114, iss. A10, CiteID A10310, DOI: 10.1029/2009JA014108.

Walterscheid R.L., Schubert G. Nonlinear evolution of an upward propagating gravity wave: Overturning, convection, transience and turbulence. *J. Atmos. Sci.* 1990, vol. 47, no. 1, pp. 101–125.

Walterscheid R.L., Schubert G., Brinkman D.G. Small-scale gravity waves in the upper mesosphere and lower thermosphere generated by deep tropical convection. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, no. D23, pp. 31825–31832.

Yanowitch M. Effect of viscosity on oscillations of an isothermal atmosphere. *Can. J. Phys.* 1967a, vol. 45, pp. 2003–2008.

Yanowitch M. Effect of viscosity on gravity waves and upper boundary conditions. *J. Fluid. Mech.* 1967b, vol. 29, Part 2, pp. 209–231.

Yu Y., Hickey M.P. Time-resolved ducting of atmospheric acoustic gravity waves by analysis of the vertical energy flux. *Geophys. Res. Lett.* 2007a, vol. 34, L02821. DOI: 10.1029/2006GL028299.

Yu Y., Hickey M.P. Numerical modeling of a gravity wave packet ducted by the thermal structure of the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 2007b, vol. 112, A06308. DOI: 10.1029/2006JA012092.

Yu Y., Hickey M.P. Simulated ducting of high-frequency atmospheric gravity waves in the presence of background winds. *Geophys. Res. Lett.* 2007c, vol. 34, L11103. DOI: 10.1029/2007GL029591.

Yu Y., Hickey M.P., Liu Y. A numerical model characterizing internal gravity wave propagation into the upper atmosphere. *Adv. Space Res.* 2009, vol. 44, iss. 7, pp. 836–846. DOI: 10.1016/j.asr.2009.05.014.