

УДК 532.5-1/-9
DOI: 10.12737/23186

М.А. Гурьянов, А.А. Кожухов

ВЫБОР ФУНКЦИИ ЯДРА ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ СТАЛИ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ В СОСУДЕ С ОТКРЫТОЙ СТЕНКОЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА SPH

Проведен анализ применения различных функций ядра к расчету величины плотности для решения проблемы отрыва частицы от основной массы жидкости и увлечения окружающих частиц за собой при построении модели течения жидкости методом сглаженных частиц. Для проверки резуль-

татов использована модель колебания жидкой стали в стальковше.

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, вязкость, функция ядра, длина сглаживания, жидкая фаза, плотность.

М.А. Guriyanov, A.A. Kozhukhov

CHOICE OF NUCLEUS FUNCTION FOR PROBLEM COMPUTATION OF STEEL MOTION IN LIQUID PHASE IN VESSEL WITH OPEN WALL THROUGH SPH METHOD

Recently the method of smoothed particle hydrodynamics developed rapidly and was already used for the solution of a wide spectrum of scientific-engineering problems in the fields of astrophysics, hydrodynamics, gasdynamics and so on. Besides, there were solved many problems on liquid motion in a vessel with an open wall. But at the solution of specific problems typical for the field of metallurgy, simulators created with the aid of the method shown may behave unstably.

Models instability is characterized with an uneven distribution of liquid in a vessel and particles penetration through rigid walls and with the isolation of particles from a basic mass of liquid. The particles isolation from the mass of liquid and the entrainment of

surrounding particles with it results in non-physical behavior of liquid and, as a consequence, in wrong results of computation.

This paper reports the analysis of the application of nucleus different functions to the computation of a density value for the problem solution of particle isolation from the basic mass of liquid and their entrainment of surrounding particles with them. For results check a model of liquid steel oscillation in a steel-ladle on the basis of the method of particles smoothing was used.

Key words: smoothed particles hydrodynamics, viscosity, nucleus function, smoothing length, liquid phase, density.

Введение

Математическое моделирование внутреннего течения жидкостей получило широкое применение в различных прикладных областях науки и техники, так как позволило более детально изучить процессы, проходящие внутри жидкости, с минимальными затратами. Одной из областей широкого применения методов математического моделирования является область металлургии. В настоящее время в металлургии существует широкий спектр производственных задач, ориентированных на изучение поведения металла в жидкой фазе.

На текущий момент для построения математических моделей течения металла

в жидкой фазе широко применяется эйлеров подход и сеточные методы. Однако не все задачи можно эффективно решать, используя данный подход. По этой причине возникает необходимость в использовании лагранжева подхода и безсеточных методов, одним из которых является метод гидродинамики сглаженных частиц.

В последнее время метод гидродинамики сглаженных частиц [1] стремительно развивался и уже был использован для решения огромного спектра научно-технических задач в областях астрофизики, гидродинамики, газодинамики и т.д. Кроме того, было решено немало задач движения жидкости в сосуде с открытой

стенкой. Но при решении специфических задач, характерных для области металлургии, математические модели, построенные с помощью приведенного метода, могут вести себя нестабильно. Нестабильность моделей характеризуется неравномерным распределением жидкости в сосуде, прохождением частиц сквозь жесткие стенки и отрывом частиц от основной массы жидкости. Отрыв частиц от основной массы жидкости и увлечение за собой окружающих частиц приводит к нефизическому поведению жидкости и, как следствие, к неверным результатам расчета.

Описание SPH

Метод гидродинамики сглаженных частиц представляет собой бессеточный лагранжьев метод, суть которого заключается в дискретизации объема изучаемой жидкости с помощью совокупности частиц, расположенных друг относительно друга на определенном расстоянии. Для каждой частицы жидкости производится расчет физических характеристик: плотности, вязкости, скорости, перемещения и т.д.

Для осуществления перехода от сплошной среды к ее дискретному представлению необходимо заменить непрерывную функцию $f(\vec{r}_i)$, описывающую какую-либо величину (скорость, давление и т.д.), ее дискретным аналогом f_i . Величина f_i для рассматриваемой частицы i рассчитывается с помощью N частиц, находящихся в опорной области на расстоянии длины сглаживания от рассматриваемой частицы. Итоговое значение f_i получается как сумма произведений f_j окружающих частиц на объем опорной области и функцию ядра(1) [1].

$$f_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{i,j},$$

где m_j – масса частицы j ; ρ_j – плотность частицы j ; $W_{i,j}$ – функция ядра.

В данном уравнении функция ядра $W_{i,j}$ представляет собой функцию двух переменных: расстояния между двумя частицами и длины сглаживания.

$$W_{i,j} = W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h),$$

В данной работе будет проведен анализ применения различных функций ядра к расчету величины плотности для решения проблемы отрыва частицы от основной массы жидкости и увлечения окружающих частиц за собой. Для проверки результатов будет использована модель колебания жидкой стали в стальковше на основе метода сглаженных частиц.

По результатам будут выбраны подходящие функции ядра для расчета физических величин и повышения стабильности расчета модели течения жидкой стали в стальковше.

где h – длина сглаживания.

Функция ядра служит для определения степени влияния окружающих N частиц на рассматриваемую частицу i в пределах опорной области, которая ограничивается длиной сглаживания. Очень важно при построении математических моделей с помощью метода сглаженных частиц выбрать функции ядра, так как от этого зависит точность, стабильность и скорость проводимых расчетов [3; 4]. По вопросу конструирования и критериев выбора функции ядра проведено немало исследований. Способы конструирования функции ядра были приведены в работе Монагана [5]. Критерии выбора функции ядра были приведены в работах Ли [1], Джина и Динга [4].

Тремя важными критериями выбора функции ядра являются [1]:

- 1) критерий нормализации;
- 2) критерий конечности;
- 3) критерий неотрицательности.

Условие нормализации подразумевает согласованность функции и выглядит следующим образом:

$$\int W(x - x', h) dx' = 1,$$

где dx – бесконечно малый объем.

Данное условие позволяет сохранить значение вычисляемой физической величины, если в пределах опорной области нет частиц.

Условие конечности позволяет ограничить функцию ядра в пределах опорной области, которая задается величиной длины сглаживания. Данное условие записывается следующим образом:

$$W(x - x') = 0, \text{ при } |x - x'| > k \cdot h,$$

где k - масштабирующий фактор.

Заключительным важным условием является то, что функция ядра не должна быть отрицательной. Данное условие поз-

Постановка задачи

Рассматривается задача колебания ньютоновской жидкости в сосуде с открытой стенкой. Сосуд имеет прямоугольную форму. В качестве стенок сосуда были использованы частицы с заданными физическими свойствами, что обусловлено гипотезой прилипания. Использование частиц в качестве стенки позволяет более точно рассчитывать взаимодействие частиц жид-

$$\frac{du_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n m \cdot \left(\frac{P_i + P_j}{2\rho_j} \right) \cdot \nabla W_{ij} + \sum_{j=1}^n m \cdot \frac{\mu \varepsilon_i^{\alpha\beta} + \mu \varepsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \Delta W_{ij} + g$$

где m - масса частицы; P - давление на частицу; ρ - плотность частицы; μ - вязкость частицы; W - функция ядра; g - ускорение свободного падения.

Выполнение условия неразрывности при моделировании течения жидкости методом сглаженных частиц гарантируется фиксированным количеством частиц и, как следствие, фиксированной массой жидкости.

Аппроксимация уравнения неразрывности в форме метода сглаженных частиц приведена ниже:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^n m \cdot u_{i,j} \cdot \nabla W_{i,j}$$

где $u_{i,j}$ - вектор скорости между частицами.

Выбор функции ядра

Прежде чем выбрать функцию ядра для расчета плотности, рассмотрим ограничения, которые накладывает на выбор расчет величины плотности жидкости. В первую очередь необходимо обеспечить максимальную гладкость функции ядра, чтобы исключить резкие изменения плотности жидкости внутри опорной области. Кроме того, необходимо обеспечить попадание как можно большего числа частиц в

область предотвратить появление отрицательных физических величин и, как следствие, ошибок при расчете движения жидкости.

кости со стенкой сосуда. Колебание частиц происходит вследствие движения контейнера вдоль горизонтальной плоскости и последующей его остановки.

Построение модели колебания жидкости в сосуде с открытой стенкой осуществлялось на основе уравнения Навье – Стокса, переведенного в форму метода сглаженных частиц [1]:

Начальные параметры расчетной модели:

Количество частиц	256
Диаметр частицы, мм	0,25
Время процесса, с	1000
Количество расчетных шагов	100000
Длина сглаживания, мм	0,55
Плотность, кг/м ³	7850
Динамическая вязкость, Па·с	0,0045

Расчет модели проводился для каждой выбранной функции ядра. Для расчета величин давления, вязкости и плотности использовались разные функции ядра. Основной акцент был направлен на изучение поведения жидкости при использовании различных функций ядра для расчета величины плотности. В результате каждого расчета фиксировался график функции ядра и поведение жидкости.

область расчета функции ядра при постоянном значении длины сглаживания. Данное ограничение позволит сохранить значение плотности даже в ситуациях низкого скопления частиц в области длины сглаживания и предотвратить отрыв частиц от основной массы жидкости в результате всплеска после остановки контейнера.

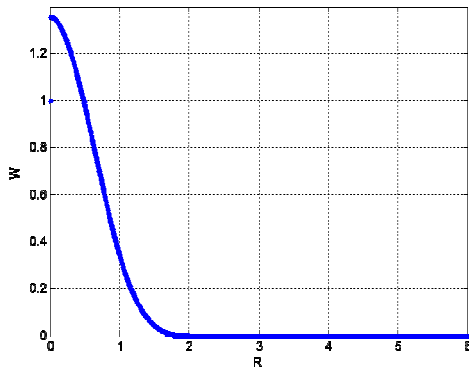
Оценка функций ядра проводилась исходя из графика функции, скорости про-

ведения расчета, количества частиц, попавших в расчетную область функции ядра, и поведения жидкости для приведенной выше задачи.

В качестве начальной функции ядра была взята функция В-сплайн.

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3; & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3; & 1 \leq R < 2 \\ 0; & R \geq 2 \end{cases}$$

$$\alpha_d = \frac{5}{\pi h^2}$$



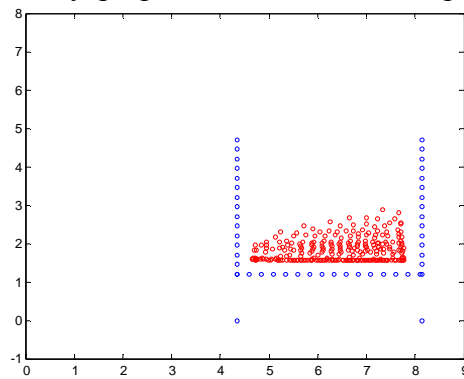
а)

$$R = \frac{|x - x'|}{h}$$

где α_d - параметр, определяющий мерность пространства.

Данная функция ядра пришла на смену стандартной гаусовой функции, по сравнению с которой В-сплайн проще в реализации и обладает достаточной гладкостью. Кроме того, скорость расчета В-сплайна выше, так как он не содержит экспоненциальных компонентов.

В результате расчета математической модели был получен график зависимости величины функции ядра от величины, характеризующей распределение частиц внутри расчетной области R (рис. 1).



б)

Рис. 1. График вычисления В-сплайна (а) и процесс расчета (б)

Проанализировав приведенный выше график, можно заметить, что использованная функция ядра является достаточно гладкой и не имеет разрывов. Максимальное значение R, при котором W принимает ненулевое значение, равно 2, что соответствует максимальному расстоянию между частицами, равному 1,1. В результате данная функция ядра покрывает от 20 до 24 частиц при диаметре частиц, равном 0,25.

Далее была использована полиномиальная функция ядра, приведенная в рабо-

те Монагана [5]. Полиномиальная функция ядра в отличие от В-сплайна имеет параметрические ограничения интервалов в виде величины длины сглаживания:

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (h(t)^2 - r^2)^5; & 0 \leq R < h \\ 0; & h < R \end{cases}$$

В результате расчета математической модели был получен график зависимости величины функции ядра от величины, характеризующей распределение частиц внутри расчетной области R (рис. 2).

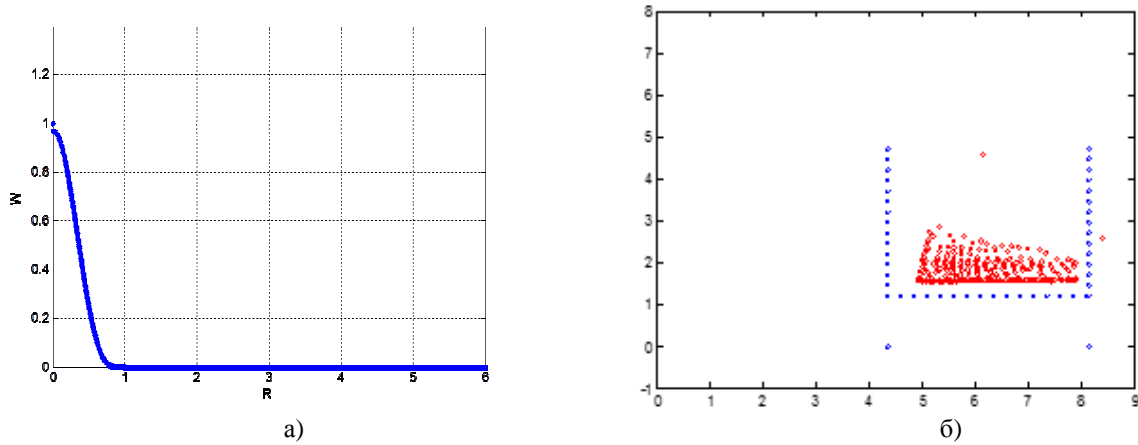


Рис. 2. График вычисления полиномиальной функции (а) и процесс расчета (б)

По полученному графику можно сказать, что данная функция ядра является достаточно гладкой для проведения расчета, но покрытие меньше, чем у В-сплайна. В данном случае максимальное значение R, при котором величина функции ядра больше нуля, составляет 0,55. Количество покрываемых функцией ядра частиц составляет от 10 до 14. В процессе расчета движения жидкости был замечен отрыв частиц от массы жидкости. Отрыв произошел в момент остановки сосуда. Выле-

тевшие частицы приобретали высокую скорость по сравнению с основной массой жидкости, что дополнительно привело к прохождению некоторых частиц сквозь стенку. В целом расчет проходил нестабильно.

Последней была протестирована одна из вариаций Q-сплайна [5]. Данная функция ядра пришла на смену В-сплайну. Она имеет большее количество интервалов и отличается более плавными переходами между интервалами.

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 + 15(1 - R)^5; & 0 \leq R \leq 1 \\ (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5; & 1 \leq R \leq 2 \\ (3 - R)^5; & 2 \leq R < 3 \\ 0; & R > 3 \end{cases}$$

В результате расчета величины плотности был получен график зависимости

величины функции ядра от параметра R (рис. 3).

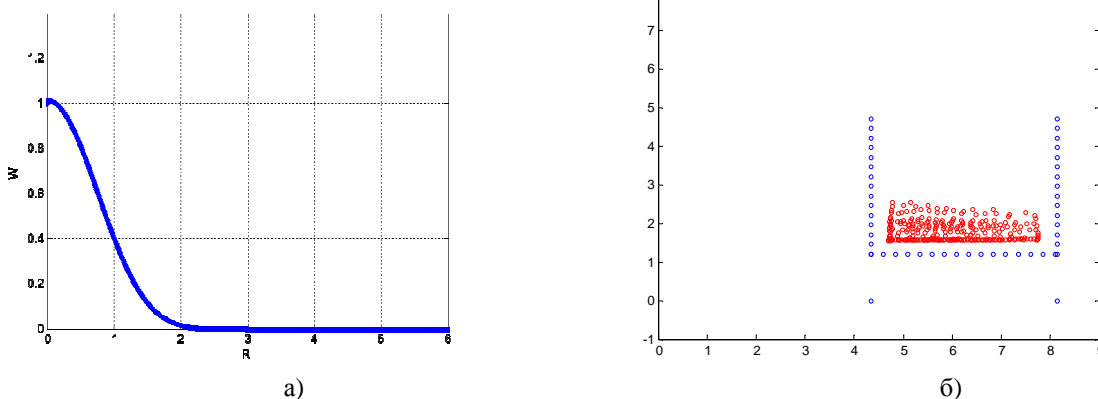


Рис. 3. График вычисления Q-сплайна (а) и процесс расчета (б)

Исходя из результатов расчета, можно сказать, что данная функция ядра является наиболее гладкой и покрывает большее количество частиц, чем предыдущие две. По результатам расчета данная функ-

ция ядра смогла покрыть от 30 до 35 частиц. В целом процесс расчета прошел стабильно, без отрыва частиц от основной массы жидкости.

Количественные результаты тестов | функций ядра приведены в таблице.

Таблица

Результаты эксперимента

Функция ядра	Показатель	Значение
В-сплайн	Максимальная величина R, при которой $W > 0$	2
	Количество частиц в расчетной области, шт.	20-24
	Время вычисления 1 расчетного шага, с	14,2053
Полиномиальная	Максимальная величина R, при которой $W > 0$	0,55
	Количество частиц в расчетной области, шт.	10-14
	Время вычисления 1 расчетного шага, с	12,8545
Q-сплайн	Максимальная величина R, при которой $W > 0$	3
	Количество частиц в расчетной области, шт.	30-35
	Время вычисления 1 расчетного шага, с	15,1633

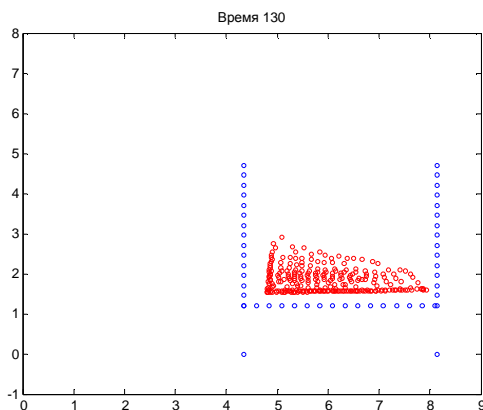
Обсуждение результатов

По итогам проведенных экспериментов было выявлено влияние использования различных функций ядра на стабильность расчета задачи колебания жидкости в сосуде с открытой стенкой. Из представленных функций ядра Q-сплайн и В-сплайн показали наивысшую стабильность расчета. Но по графику В-сплайна можно заметить, что условие нормализации не выполняется. Исходя из этого было решено использовать Q-сплайн для расчета плотности в данной модели.

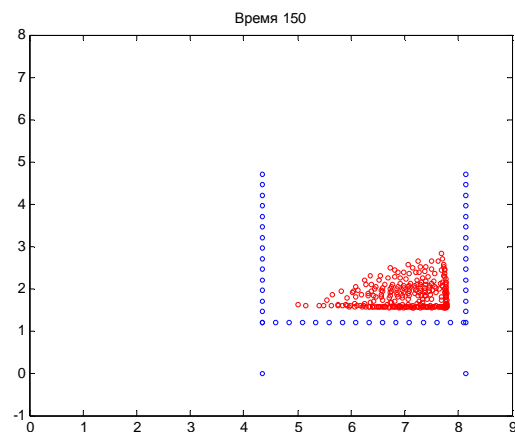
Помимо рассмотренных функций ядра для расчета плотности, были использованы другие функции ядра для расчета

давления и плотности. Выбор функции ядра для этих величин по большей части основан на поведении функции ядра при дифференцировании первого и второго порядка. Условие попадания большего числа частиц в расчетную область в данном случае не критично, вследствие чего было принято решение взять для расчета величины давления В-сплайн, а для расчета величины вязкости - Q-сплайн, так как он дает наилучшие результаты при дифференцировании второго порядка.

Результаты расчета модели приведены на рис. 4.



а)



б)

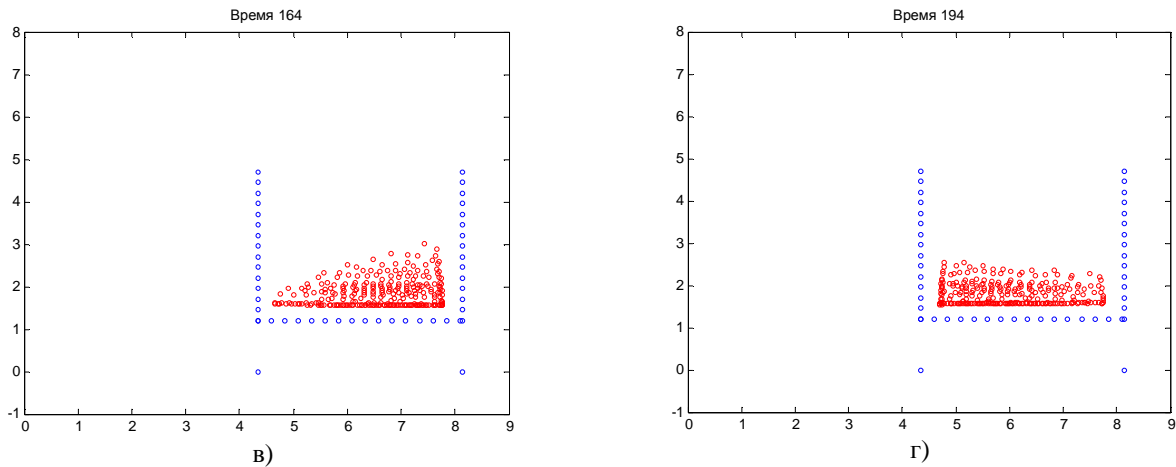


Рис. 4. Процесс расчета модели

Исходя из приведенных скриншотов, можно заметить, что разрывов в структуре жидкости и отрыва частиц нет. Использование различных функций ядра для вычисления величин плотности, вязкости и давления помогло достигнуть наилучшего результата. Хотя можно также заметить вы-

Вывод

Анализируя результаты проведенных расчетов, можно сделать вывод, что наиболее ресурсоемкой функцией ядра является полиномиальная функция. К сожалению, в данных видах задач ее использовать нецелесообразно в силу возможного появления отрыва частиц жидкости от основной массы. Кроме того, данная функция ядра отличается меньшей покрывающей способностью в сравнении с другими двумя функциями. В-сплайн и Q-сплайн показали отличную стабильность расчетов наравне с покрывающей способностью. Функция в виде Q-сплайна также отвечает

сокую плотность частиц на дне сосуда. Это может быть обусловлено слабым взаимодействием между частицами жидкости, что заставляет задуматься об изменении схемы взаимодействия между частицами в дальнейших исследованиях.

всем критериям выбора функции ядра. Исходя из проведенных экспериментов, можно понять, что при проведении расчетов течения жидкости в сосуде с открытой стенкой для расчета величин плотности и вязкости лучше всего использовать функцию в виде Q-сплайна, так как она является достаточно гладкой и способна покрыть большее количество частиц, а для расчета давления - В-сплайн. Использование данных параметров модели позволит обеспечить высокую стабильность и точность результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu, G.R. Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method / G.R.Liu, M.B.Liu. - USA, 2003. - 216 p.
2. Swegle, J.W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis / J.W.Swegle, D.L.Hicks, S.W.Attaway // J. Comput. Phys. - 1995. - № 116. - P. 123-134.
3. Morris, J.P. Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics With Applications / J.P.Morris. - Monash University, 1996.
4. Jin, H. On criterions for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field / H. Jin, X. Ding // J. Comput. Phys. - 2005. - № 202. - P. 699-709.
5. Monaghan, J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics / J.J. Monaghan // Rep. Prog. - 2005. - 57 p.
6. Паршиков, А. Н. Численный метод SPH, использующий соотношения распада разрывов, и его применение в механике деформируемых гетерогенных сред: дис.... д-ра физ.-мат. наук / А.Н. Паршиков. - М., 2014. - С. 1-50.
7. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. - М.: Гостехиздат, 1955. - 519 с.
8. Kelager, M. Lagrangian Fluid Dynamics using smoothed particle hydrodynamics / M. Kelager. - Copenhagen, 2006. - P. 14-49.

9. Vijaykumar, A. Smoothed particle hydrodynamics simulation for continuous casting / A. Vijaykumar. - Sweden, 2012. - 44 p.
1. Liu, G.R. Smoothed particle hydrodynamics a meshfree particle method/ G.R.Liu, M.B.Liu. - USA, 2003. - 216 p.
2. Swegle, J.W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis/ J.W.Swegle, D.L.Hicks, S.W.Attaway// J. Comput. Phys. - 1995. - № 116. - P. 123-134.
3. Morris, J.P. Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications/ J.P.Morris. - Monash University, 1996.
4. Jin, H. On criteria for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field/ H.Jin, X.Ding// J. Comput. Phys. - 2005. - № 202. - P. 699-709.
5. Monaghan, J.J. Smoothed particle hydrodynamics/ J.J.Monaghan// Rep. Prog. - 2005. - 57 P.
6. Parshikov, A.N. SPH numerical method using correlations of breaches disintegrations and its use in mechanics of deformed heterogeneous environments: *Thesis for D. Physic-Math degree*/ A.N.Parshikov. - M., 2014. - pp. 1-50.
7. Slezkin, N.A. *Dynamics of Viscous Incompressible Fluid* / N.A.Slezkin. - M.: Gostechizdat, 1955. - pp. 519.
8. Kelager, M. Lagrangian Fluid Dynamics using smoothed particle hydrodynamics/ M. Kelager. - Copenhagen, 2006. - P. 14-49.
9. Vijaykumar, A. Smoothed particle hydrodynamics simulation for continuous casting/ A.Vijaykumar. - Sweden, 2012. - 44 p.

*Статья поступила в редколлегию 18.10.2016.
Рецензент: д.т.н., профессор ОГУ им. И.С.Тургенева
Чернышев В.И..*

Сведения об авторах:

Гурьянов Максим Алексеевич, аспирант кафедры металлургии Старооскольского технологического института (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», e-mail: xt_max@mail.ru.

Guriyanov Maxim Alexeevich, Post graduate student, Dep. of Metallurgy Stary Oskol Technological Institute (Branch) of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Vocational Training "National Research Technological University" "MISaA". E-mail: xt_max@mail.ru.

Кожухов Алексей Александрович, к.т.н., зав. кафедрой металлургии Старооскольского технологического института (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», e-mail: [e-mail: koshuhov@yandex.ru](mailto:koshuhov@yandex.ru).

Kozhukhov Alexey Alexandrovich, Can. Eng., Head of the Dep. of Metallurgy, Dep. of Metallurgy, Stary Oskol Technological Institute (Branch) of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Vocational Training "National Research Technological University" "MISaA", E-mail: koshuhov@yandex.ru.