

**ДРЕЙФОВО-КОМПРЕССИОННЫЕ ВОЛНЫ,  
РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ В НАПРАВЛЕНИИ ДРЕЙФА  
ЭНЕРГИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТОСФЕРЕ**

**DRIFT-COMPRESSSION WAVES PROPAGATING IN THE DIRECTION  
OF ENERGETIC ELECTRON DRIFT IN THE MAGNETOSPHERE**

**Д.В. Костарев**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, kostarev@iszf.irk.ru*

**П.Н. Магер**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, p.mager@iszf.irk.ru*

**D.V. Kostarev**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, kostarev@iszf.irk.ru*

**P.N. Mager**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, p.mager@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** В рамках гирокинетики показана возможность существования в магнитосфере дрейфово-компрессионных волн, распространяющихся в направлении дрейфа энергичных электронов. Предполагается, что плазма состоит в основном из холодных частиц с примесью горячих: протонов с распределением Максвелла и электронов с инверсным распределением по энергиям. Найдены условия существования этих волн и их усиления за счет резонансного взаимодействия с энергичными электронами с инверсным распределением по энергиям (дрейфовая неустойчивость). Результаты работы могут быть полезны при интерпретации наблюдений волновых явлений в магнитосфере с частотами в диапазоне геомагнитных пульсаций Pc5 и ниже.

**Ключевые слова:** магнитосфера, УНЧ-волны, взаимодействие волна—частица.

**Abstract.** As shown within the limits of gyrokinetics, drift-compression waves can propagate in the magnetosphere in the direction of energetic electron drift. Plasma is assumed to be composed of cold particles with hot additives such as protons with Maxwell distribution and electrons with inverse distribution. We have determined conditions of existence of such waves and their intensification due to resonance interaction with energetic electrons (drift instability). The results can be helpful for interpretation of observation of wave phenomena in the magnetosphere with frequencies in the range of geomagnetic pulsations Pc5 and below.

**Keywords:** magnetosphere, ULF waves, wave—particle interaction.

## ВВЕДЕНИЕ

В магнитосферной плазме наблюдается широкий спектр ультранизкочастотных (УНЧ) колебаний, называемых также геомагнитными пульсациями. Их отождествляют с магнитогидродинамическими (МГД) волнами. Как с наблюдательной, так и с теоретической точки зрения их можно разделить на две большие группы: волны с малыми значениями азимутального волнового числа  $m$  и волны с большими значениями  $m$  [Yeoman et al., 1992; Leonovich, Mazur, 1993; Fenrich et al., 1995].

Волны с малыми значениями азимутального волнового числа имеют преимущественно тороидальную поляризацию, т. е. силовые линии магнитного поля волны осциллируют в азимутальном направлении. Они имеют большие азимутальные размеры и могут наблюдаться при помощи наземных магнитометров. Их иногда называют поперечно-крупномасштабными колебаниями. Обычно их отождествляют с альфвеновскими модами, источники которых находятся во внешней магнитосфере. Предполагается, что быстрая магнитозвуковая (БМЗ) волна, рожденная на магнитопаузе или в солнечном ветре, распространяется во внутреннюю магнитосферу, где генерирует альфвеновскую моду

на резонансной L-оболочке, на которой частота БМЗ-волны совпадает с локальной собственной частотой альфвеновского резонанса [Chen, Hasegawa, 1974; Southwood, 1974].

Волны с большими значениями азимутального волнового числа имеют преимущественно полоидальную поляризацию, т. е. силовые линии магнитного поля волны осциллируют в радиальном направлении. Они имеют малые азимутальные размеры и представляют собой более локальные события, чем осцилляции с малыми  $m$ . Их можно назвать поперечно-мелкомасштабными. Эти волны обычно отождествляют с полоидальными альфвеновскими модами. Считается, что они возникают в результате процессов во внутренней магнитосфере. Из-за экранировки ионосферой экспериментальное изучение геомагнитных колебаний с большими азимутальными волновыми числами возможно только посредством искусственных спутников Земли или радарных установок.

Среди волн с большими  $m$  в диапазоне Pc5 можно выделить группу буревых компрессионных колебаний, частоты которых могут быть существенно ниже основной частоты альфвеновского резонанса на данной L-оболочке. Подобные колебания регистрируются как при наблюдении со

спутников [Barfield, McPherron, 1972], так и при наземных радарных исследованиях [Allan et al., 1982].

По поводу физической природы буревых компрессионных колебаний в диапазоне Pc5 пока нет единого мнения. С точки зрения магнитогидродинамической теории это должна быть самая низкочастотная мода — медленная магнитозвуковая (ММЗ) мода. Однако не вполне очевидно, будет ли справедливо МГД-приближение для описания колебаний с частотами значительно ниже альфвеновского диапазона в бесстолкновительной плазме, поскольку в этом случае необходимо учитывать баунс-частоты, а корректно это сделать можно только при кинетическом подходе [Hurricane et al., 1994]. Иногда буревые Pc5-колебания ассоциируют с дрейфовыми зеркальными модами, которые имеют кинетическую природу [Kremser et al., 1981, Pokhotelov et al., 2001]. Однако, чтобы удовлетворять условиям зеркальной неустойчивости, необходима сильная температурная анизотропия в магнитосферной плазме.

На наш взгляд, наиболее подходящими для интерпретации большинства буревых компрессионных пульсаций Pc5 являются дрейфово-компрессионные моды. Они являются наиболее общими компрессионными модами в кинетике, поскольку для их существования достаточно только конечного давления плазмы и ее неоднородности поперек магнитных оболочек. При этом неустойчивость дрейфово-компрессионных мод может возникнуть из-за пространственных градиентов концентрации горячей плазмы [Stabtree et al., 2003; Klimushkin, Mager, 2011], инверсности распределения горячих протонов по энергиям [Mager et al., 2013] или сцепления с альфвеновской модой вследствие кривизны линий магнитного поля [Klimushkin et al., 2012]. Инверсным мы называем немонотонное распределение по скоростям с максимумом в высокоэнергичной части, по аналогии с [Hughes et al., 1978]. Характерной особенностью дрейфово-компрессионных волн является зависимость их частоты от азимутального волнового числа. Подобное поведение было обнаружено в данных радарных исследований [Mager et al., 2015; Chelpanov et al., 2016].

Ранее было показано, что дрейфово-компрессионные моды, распространяющиеся в направлении дрейфа высокоэнергичных протонов, резонансно взаимодействуют с ними. При росте температуры и падении концентрации частиц с удалением от Земли это может приводить к неустойчивости и самопроизвольной раскраске волн, направление фазовой скорости которых совпадает с направлением дрейфа протонов [Mager et al., 2013]. Порог неустойчивости снижается, если функция распределения протонов имеет инверсный характер. Однако, как показано в работе [James et al., 2013], в некоторых случаях наблюдались волны, распространяющиеся и в обратном направлении, т. е. в направлении дрейфа электронов. Поэтому в статье рассмотрена ситуация, когда волна распространяется в одном направлении с дрейфом электронов. При этом мы предположили, что в плазме присутствуют горячие протоны и

электроны, причем последние имеют инверсное распределение по энергиям.

## МОДЕЛЬ СРЕДЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы будем использовать аксиально-симметричную модель магнитосферы, которая учитывает кривизну силовых линий и неоднородность фоновой плазмы поперек магнитных оболочек и вдоль силовых линий. Для этого введем ортогональную систему координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , в которой координата  $x^1$  совпадает с магнитными оболочками, координата  $x^2$  отмечает силовую линию на магнитной поверхности (азимутальная координата), а координата  $x^3$  — точку силовой линии,  $g_1, g_2, g_3$  — соответствующие координаты метрического тензора,  $dl = \sqrt{g_3} dx^3$  — элемент длины вдоль силовой линии [Leonovich, Mazur, 1989]. Учет кривизны и продольной неоднородности магнитного поля делает частицы запертыми в магнитосфере.

Будем рассматривать плазму с примесью горячих протонов и электронов. Поскольку вклад холодных частиц в общее давление плазмы невелик, будем учитывать вклад только горячих частиц. При этом будем полагать, что протоны имеют распределение Максвелла по энергиям:

$$F_p = \frac{n_p}{(2\pi\epsilon_{0p})^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_{0p}}\right), \quad (1)$$

а горячие электроны имеют инверсное распределение и моделируются следующей функцией:

$$F_e = \frac{n_e}{4\sqrt{2}\pi\Gamma(S+3/2)(\epsilon_{0e})^{S+\frac{3}{2}}} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{0e}}\right)^S \times \exp\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_{0e}}\right). \quad (2)$$

Здесь  $n_p$  и  $n_e$  — концентрации протонов и электронов соответственно;  $\epsilon = v^2/2$  — нормированная на массу энергия частиц;  $v$  — скорость частиц;  $S$  — положительное целое число;  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция;  $\epsilon_{0p}$  и  $\epsilon_{0e}$  — параметры, пропорциональные квадрату тепловой скорости частиц. Здесь и далее индексы «р» и «е» обозначают принадлежность переменной к протонам или электронам соответственно.

Отметим, что при  $S=0$  функция распределения для электронов (2) становится распределением Максвелла. Для  $S>0$  электроны имеют среднюю энергию частиц  $\bar{\epsilon}_e = (S+3/2)\epsilon_{0e}$  и энергию в максимуме  $\epsilon_{e_{\max}} = S\epsilon_{0e}$ .

Мы использовали аксиально-симметричную модель магнитосферы. Зависимость возмущенных параметров от времени и координат представляется в виде

$$\exp[-i\omega t + i \int k_1(x^1) dx^1 + ik_2 x^2],$$

где  $\omega$  — частота волны;  $k_1$  и  $k_2$  — радиальная и азимутальная компоненты волнового вектора соответственно.

Колебания плазмы с частотой меньше гирочастоты частиц плазмы могут быть рассмотрены в рамках гирокинетики в ВКБ-приближении [Chen, Hasegawa, 1991]. В приближении, когда частота волны много меньше баунс-частоты частиц, из уравнений гирокинетики, представленных в работе [Chen, Hasegawa, 1991], можно получить уравнение, описывающее дрейфово-компрессионную моду. Однако, в отличие от предыдущих работ [Crabtree et al., 2003, Klimushkin, Mager, 2011; Mager et al., 2013], где рассматривалась волна, направление распространения которой совпадало с направлением движения протонов  $k_2 < 0$ , т. е. на запад, мы рассмотрим случай, когда волна распространяется на восток, в направлении дрейфа электронов  $k_2 > 0$ . Таким образом, мы будем рассматривать резонанс волна—частица с электронами: в уравнении для дрейфово-компрессионной моды знак в резонансном знаменателе члена, описывающего вклад горячих протонов, изменится на положительный, т. е. для протонов резонанса волна—частица не будет, но будет такой резонанс для электронов, и знак в их резонансном знаменателе, напротив, станет отрицательным:

$$b_{\parallel}(l) = 4\pi m_p \left\langle \frac{\hat{Q}_p F_p}{\omega + \bar{\omega}_{dp}} \mu(\overline{\mu b_{\parallel}(l)}) \right\rangle + 4\pi m_e \left\langle \frac{\hat{Q}_e F_e}{\omega - \omega_{de}} \mu(\overline{\mu b_{\parallel}(l)}) \right\rangle. \quad (3)$$

Здесь  $b_{\parallel}$  — продольная компонента магнитного поля волны;  $|l|$  — расстояние вдоль силовой линии от магнитного экватора до заданной точки;  $\langle \dots \rangle$  — интеграл по пространству скоростей:

$$\langle \dots \rangle = 4\pi \int (\dots) \frac{B}{|v_{\parallel}|} d\mu d\varepsilon;$$

$\overline{(\dots)}$  — среднее по баунс-периоду  $\tau_b$ :

$$\overline{(\dots)} = \frac{2}{\tau_b} \int_{-l_0}^{l_0} (\dots) |v_{\parallel}|^{-1} dl;$$

$$\tau_b = 2 \int_{-l_0}^{l_0} |v_{\parallel}|^{-1} dl,$$

где  $\pm l_0$  — точки отражения на ионосфере для частиц с энергией  $\varepsilon$  и магнитным моментом  $\mu = v_{\perp}^2 / (2B)$ ;  $m_p$  и  $m_e$  — массы протонов и электронов соответственно;  $\omega_{dp,e}$  — дрейфовая частота:

$$\omega_{dp,e} = \left| \vec{k}_{\perp} \vec{V}_{dp,e} \right| = \left| \frac{k_2}{\omega_{cp,e} \sqrt{g_2}} \left( \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{B'}{2B} v_{\perp}^2 - \frac{v_{\parallel}^2}{R} \right) \right|,$$

где  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — продольная и поперечная скорости частиц;  $\vec{V}_d$  — скорость магнитного дрейфа частиц;

$\omega_{cp,e} = eB / m_{p,e}$  — гирочастота;  $R$  — радиус кривизны магнитного поля. Оператор  $\hat{Q}$  определяется следующим образом:

$$\hat{Q}_{p,e} = \omega \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \pm \frac{k_2}{\omega_{cp,e} \sqrt{g_2}} \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Здесь знак «+» соответствует протонам, знак «-» — электронам.

Сделав замену переменных  $\varepsilon, \mu \rightarrow \xi, \lambda$ , где  $\lambda = \sin^2 \alpha = \mu B_0 / \varepsilon$ ,  $\alpha$  — питч-угол,  $B_0$  — магнитное поле на экваторе,  $\xi = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$ , уравнение (3) можно представить в виде

$$b_{\parallel}(l) = \int_0^{B(l)} d\lambda \int_0^{l_0(\lambda)} dl' \frac{B(l)}{B_0} \frac{\lambda^2 \Lambda(\omega, \lambda)}{u(l, \lambda) u(l', \lambda)} b(l'), \quad (4)$$

где

$$u(l, \lambda) = \sqrt{1 - \lambda B(l) / B_0},$$

$$\Lambda(\omega, \lambda) = \frac{\beta_{0p}}{L_{bp}} I_p(\omega, \lambda) + \frac{3 \beta_{0e}}{2 L_{be}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(S + 5/2)} I_e(\omega, \lambda), \quad (5)$$

$$I_p(\omega, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} d\xi_p^2 \frac{\xi_p^5 e^{-\xi_p^2}}{\xi_p^2 + \omega / \Omega_{dp}} \times \left[ \frac{\omega_{np}^*}{\Omega_{dp}} - \frac{\omega}{\Omega_{dp}} - \left( \frac{3}{2} - \xi_p^2 \right) \frac{\omega_{ep}^*}{\Omega_{dp}} \right], \quad (6)$$

$$I_e(\omega, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_e \frac{\xi_e^{5+2S} e^{-\xi_e^2}}{\xi_e - \sqrt{\omega / \Omega_{de}}} \times \left[ \frac{\omega}{\Omega_{de}} \left( 1 - \frac{S}{\xi_e^2} \right) - \frac{\omega_{ne}^*}{\Omega_{de}} + \left( S + \frac{3}{2} - \xi_e^2 \right) \frac{\omega_{ee}^*}{\Omega_{de}} \right]. \quad (7)$$

Переменные

$$\omega_{np}^* = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{k_2 \varepsilon_0}{\omega_{cp}} \frac{n'_p}{n_p},$$

$$\omega_{ne}^* = -\frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{k_2 \varepsilon_0}{\omega_{ce}} \frac{n'_e}{n_e}$$

и

$$\omega_{ep}^* = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{k_2 \varepsilon_0}{\omega_{cp}} \frac{\varepsilon'_{0p}}{\varepsilon_{0e}},$$

$$\omega_{ee}^* = -\frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{k_2 \varepsilon_0}{\omega_{ce}} \frac{\varepsilon'_{0e}}{\varepsilon_{0e}}$$

соответствуют диамагнитным частотам  $\omega^* = \vec{k}_{\perp} \vec{V}^*$ , где  $\vec{V}^*$  — скорость диамагнитного дрейфа частиц, обусловленного радиальным градиентом плотности или температуры плазмы;  $\Omega_d = \bar{\omega}_d \varepsilon_0 / \varepsilon$  — усредненная по баунс-периоду дрейфовая частота частиц

с энергией  $\epsilon_0$ ;  $\beta_0$  — параметр, показывающий отношение плазменного давления к магнитному на экваторе;  $L_b$  — длина пути частицы за баунс-период:

$$L_b = v\tau_b = 4 \int_0^{\lambda_0} u(l, \lambda)^{-1} dl.$$

В дипольном магнитном поле величины  $L_b$  и  $\Omega_d$  слабо зависят от  $\lambda$ :  $L_b \sim 1.3 - 0.56\sqrt{\lambda}$  и  $\Omega_d \sim 0.35 + 0.15\sqrt{\lambda}$  [Hamlet et al., 1961]. Поэтому мы предполагаем, что  $\Lambda$  не зависит от  $\lambda$ . Тогда в уравнении (4)  $\Lambda$  можно вынести из-под интегралов. Далее можно выполнить ряд преобразований, как в [Mager et al., 2013], и получить однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром. Это уравнение можно решить численно. При этом получатся наборы собственных функций  $b_N$  и собственных значений  $\Lambda_N$  интегрального уравнения, которые определяют продольную структуру и собственные частоты дрейфово-компрессионных мод. Как показано в [Mager et al., 2013], дрейфово-компрессионные моды локализованы вблизи геомагнитного экватора. Это соответствует данным спутниковых исследований компрессионных пульсаций Pc5 [Higuchi, Kokubun, 1988].

### СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Собственные частоты определяются из дисперсионного соотношения  $\Lambda(\omega) = \Lambda_N$ , т. е.

$$\Lambda_N = \frac{\beta_{0p}}{L_{bp}} I_p(\omega) + \frac{3\beta_{0e}}{2L_{be}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(S+5/2)} I_e(\omega).$$

После взятия интегралов получим

$$\Lambda_N = \frac{\beta_p}{L_{bp}} f_p(\omega) + \frac{3\beta_e}{2L_{be}} f_e(\omega). \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_e(\omega) = & \frac{\omega}{\Omega_{de}} \left( 1 - \frac{\omega_{se}^*}{\Omega_{de}} \right) - \left( \frac{\omega_{ne}^*}{\Omega_{de}} + \frac{\omega_{se}^*}{\Omega_{de}} \right) + \\ & + \frac{\omega}{\Omega_{de}} \left[ \left( \frac{\omega}{\Omega_{de}} - S \right) \left( 1 - \frac{\omega_{ce}^*}{\Omega_{de}} \right) - \frac{\omega_{ne}^*}{\Omega_{de}} + \frac{3\omega_{ce}^*}{2\Omega_{de}} \right] \times \\ & \times \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(S+5/2)} \left[ \sum_{m=0}^{S+1} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\omega}{\Omega_{de}} \right)^{S+1-m} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\omega}{\Omega_{de}} \right)^{S+\frac{3}{2}} Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{de}}} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{de}}} \right)$  — функция плазменной дисперсии [Walker, 2005],

$$Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{de}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \sqrt{\omega/\Omega_{de}}} dt.$$

$$\begin{aligned} f_p(\omega) = & \frac{15\omega_{ep}^*}{8\Omega_{dp}} + \\ & + \left( \frac{\omega_{np}^*}{\Omega_{dp}} - \frac{3\omega_{ep}^*}{2\Omega_{dp}} - \frac{\omega}{\Omega_{dp}} - \frac{\omega_{ep}^*}{\Omega_{dp}} \frac{\omega}{\Omega_{dp}} \right) \times \end{aligned} \quad (10)$$

$$\times \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega_{dp}} + \left( \frac{\omega}{\Omega_{dp}} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\Omega_{dp}} \right)^3 Z^+ \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} Z^+ \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \right) = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + \omega/\Omega_{dp}} dt = \\ = & \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Omega_{dp}}{\omega}} e^{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \operatorname{Erfc} \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \right), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Erfc} \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \right)$  — дополнительная функция ошибки:

$$\operatorname{Erfc} \left( \sqrt{\frac{\omega}{\Omega_{dp}}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\omega/\Omega_{dp}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Теперь, чтобы найти собственные частоты и возможные инкременты неустойчивости, мы представим частоту волны в виде  $\omega = \omega_0 + i\gamma$ . Будем считать, что действительная часть частоты много больше мнимой:  $\omega_0 \gg \gamma$ .

Пусть  $\alpha = \Omega_{dc} / \Omega_{dp}$ , тогда, сделав замену переменных в выражении (8), дисперсионное соотношение можно переписать в виде

$$\frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N = f_p \left( \alpha \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \right) + \frac{3\beta_e}{2\beta_p} f_e \left( \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \right). \quad (11)$$

Параметр  $\alpha$  отражает отношение энергии электронов к энергии протонов:  $\alpha = m_e \epsilon_{0e} / m_p \epsilon_{0p}$ . Для упрощения мы будем считать концентрации горячих протонов и электронов, которые вносят вклад в давление плазмы, равными. Тогда параметр  $\alpha$  можно представить как

$$\alpha = \frac{3\beta_e}{2\beta_p} \frac{1}{(S+3/2)}.$$

Если рассматривать случай, приближенный к условиям кольцевого тока, то можно сказать, что энергия протонов много больше энергии электронов, т. е.  $\alpha \ll 1$  и, соответственно,  $\beta_e / \beta_p \ll 1$ . Тогда мы можем выполнить разложение функции  $f_p(\alpha\omega/\Omega_{dc})$  в выражении (11) по малому параметру  $\alpha$ . Пренебрегая всеми членами, где степень  $\alpha$  больше 1, получим

$$f_p \left( \alpha \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \right) = \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{sp}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{np}^*}{\Omega_{dp}} \right) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega}{\Omega_{dc}}. \quad (12)$$

Для нахождения аналитического решения выполним разложение функции  $f_e(\omega/\Omega_{dc})$  по малому параметру для двух предельных случаев: когда собственная частота много меньше ( $\omega/\Omega_{dc} \ll 1$ ) и много больше ( $\omega/\Omega_{dc} \gg 1$ ) дрейфовой частоты электронов.

### СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА МНОГО МЕНЬШЕ ДРЕЙФОВОЙ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОНОВ: $\omega/\Omega_{dc} = 1$

Если выражение  $Z(\sqrt{\omega/\Omega_{dc}})$  разложить по малому параметру  $\omega/\Omega_{dc} \ll 1$  в функции  $f_e(\omega/\Omega_{dc})$  и пренебречь всеми членами, где степень  $\omega/\Omega_{dc}$  равна 2 и более, считая их малыми, то получится выражение

$$f_e\left(\frac{\omega}{\Omega_{dc}}\right) = -\left(\frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}}\right) + \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left[ \frac{3 - \frac{\omega_{dc}^*}{2}}{S + \frac{3}{2}} \right].$$

Тогда для случая, когда собственная частота волны много меньше частоты магнитного дрейфа электронов, а энергия протонов много больше энергии электронов, дисперсионное соотношение примет вид

$$\frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N = \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left( \frac{3}{2} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) - \frac{3\beta_e}{2\beta_p} \left[ \left( \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left( \frac{3 - \frac{\omega_{dc}^*}{2}}{S + \frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (13)$$

Из (13) найдем выражение для собственной частоты:

$$\omega_0 = \Omega_{dp} \times \frac{\frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3\beta_e}{2\beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} \right)}{\frac{3}{4} - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}}}. \quad (14)$$

Для нахождения инкремента вычислим мнимую часть дисперсионного соотношения (11), применим разложение по малому параметру для функции плазменной дисперсии и пренебрежем членами в знаменателе, где степень  $\omega/\Omega_{dc}$  равна 2 и более:

$$\gamma = -\Omega_{dc} \frac{\pi \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} \right)^{S+5/2} e^{-\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}}}}{\Gamma(S+3/2)} \times$$

$$\times \frac{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} \right]}{\frac{3}{4} - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}}}. \quad (15)$$

Из выражения для собственной частоты (14) следует, что волна может существовать в плазме без градиентов температуры и концентрации частиц. Также из (14) и (15) видно, что в отсутствие этих градиентов неустойчивость может существовать только при инверсном распределении  $S \neq 0$ . В этом случае  $\omega/\Omega_{dc} - S < 0$ , откуда  $V_{ph} < V_d$  ( $\varepsilon = \varepsilon_{\varepsilon_{max}}$ ). Следовательно, в отсутствие градиентов плазмы неустойчивость возможна, если фазовая скорость волны меньше средней скорости магнитного дрейфа частиц в пучке инверсного распределения.

Условия существования волны для случая  $\omega/\Omega_{dc} \ll 1$  из (14) следующие:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} > 0, \\ \frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3\beta_e}{2\beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) > 0 \end{cases} \quad (16.1)$$

или

$$\begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} < 0, \\ \frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3\beta_e}{2\beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) < 0. \end{cases} \quad (16.2)$$

Неустойчивость  $\gamma > 0$  имеет место для (16.1) при выполнении условия

$$\left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} < 0 \quad (17.1)$$

и для (16.2) при

$$\left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \frac{\omega_{n_c}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\varepsilon_c}^*}{\Omega_{dc}} > 0. \quad (17.2)$$

В приэкваториальном параболическом приближении для дипольного магнитного поля для первой гармоники  $N=1$  можно считать  $\Lambda_1 \approx 0.5/L$  и  $L_{bp,c} = 2\pi\sqrt{2}L$ , где  $L$  — расстояние до магнитной оболочки в экваториальной плоскости [Mager et al., 2013]. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{n_p}^* &= \frac{k_2 \varepsilon_{0p} n'_p}{\omega_{c_p} L n_p}, \quad \omega_{\varepsilon_p}^* = \frac{k_2 \varepsilon_{0p} \varepsilon'_{0p}}{\omega_{c_p} L \varepsilon_{0p}}, \\ \Omega_{dp} &\sim \frac{3k_2 \varepsilon_{0p}}{\omega_{c_p} L^2}, \quad \omega_{n_c}^* = -\frac{k_2 \varepsilon_{0c} n'_c}{\omega_{c_c} L n_c}, \\ \omega_{\varepsilon_c}^* &= -\frac{k_2 \varepsilon_{0c} \varepsilon'_{0c}}{\omega_{c_c} L \varepsilon_{0c}}, \quad \Omega_{dc} \sim \frac{3k_2 \varepsilon_{0c}}{\omega_{c_c} L^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Условия существования волны (16) для первой гармоники в параболическом приближении для магнитного поля можно записать как

$$\begin{cases} \frac{9}{2L} + 2 \frac{n'_e}{n_e} - \frac{n'_p}{n_p} > 0, \\ \frac{4 \pi \sqrt{2}}{L \beta_p} - \left( \frac{\varepsilon'_{0p}}{\varepsilon_{0p}} + \frac{n'_p}{n_p} \right) - 2 \frac{\beta_e}{\beta_p} \left( \frac{\varepsilon'_{0e}}{\varepsilon_{0e}} + \frac{n'_e}{n_e} \right) > 0 \end{cases} \quad (19.1)$$

и

$$\begin{cases} \frac{9}{2L} + 2 \frac{n'_e}{n_e} - \frac{n'_p}{n_p} < 0, \\ \frac{4 \pi \sqrt{2}}{L \beta_p} - \left( \frac{\varepsilon'_{0p}}{\varepsilon_{0p}} + \frac{n'_p}{n_p} \right) - 2 \frac{\beta_e}{\beta_p} \left( \frac{\varepsilon'_{0e}}{\varepsilon_{0e}} + \frac{n'_e}{n_e} \right) < 0. \end{cases} \quad (19.2)$$

Условие возникновения неустойчивости (17) в этом приближении будет для (19.1)

$$\left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( \frac{3}{L} + \frac{\varepsilon'_{0e}}{\varepsilon_{0e}} \right) + \frac{n'_e}{n_e} - \frac{3 \varepsilon'_{0e}}{2 \varepsilon_{0e}} < 0 \quad (20.1)$$

и для (19.2)

$$\left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( \frac{3}{L} + \frac{\varepsilon'_{0e}}{\varepsilon_{0e}} \right) + \frac{n'_e}{n_e} - \frac{3 \varepsilon_{0e}}{2 \varepsilon_{0e}} > 0. \quad (20.2)$$

Таким образом, волны с частотами, много меньшими частоты магнитного дрейфа электронов, могут распространяться в направлении дрейфа электронов при выполнении условия (19.1) или (19.2). Это возможно даже в отсутствие градиентов температуры или концентрации плазмы, т. е. только за счет неоднородности магнитного поля. В то же время возможна раскачка этих волн, если градиенты температуры и концентрации электронов соответствуют условию (20.1) для (19.1) и (20.2) для (19.2).

Неустойчивость может существовать при распределении Максвелла электронов по энергии за счет градиентов температуры и концентрации  $S=0$ ,  $n'_e/n_e=0$ ,  $\varepsilon'_{0e}/\varepsilon_{0e} \neq 0$ . В отсутствие градиентов температуры и концентрации причиной неустойчивости может быть инверсное распределение электронов по энергии  $S \neq 0$ ,  $n'_e/n_e=0$ ,  $\varepsilon'_{0e}/\varepsilon_{0e}=0$ ,  $n'_p/n_p=0$ ,  $\varepsilon'_{0p}/\varepsilon_{0p}=0$ . Наибольшая раскачка волны имеет место при разнонаправленных радиальных градиентах температуры и концентрации электронов.

### СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА МНОГО БОЛЬШЕ ДРЕЙФОВОЙ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОНОВ: $\omega/\Omega_{dc} \gg 1$

Если выражение  $Z(\sqrt{\omega/\Omega_{dc}})$  разложить по малому параметру  $\Omega_{dc}/\omega \ll 1$  в функции  $f_e(\omega/\Omega_{dc})$  и пренебречь всеми членами, где степень  $\Omega_{dc}/\omega$  равна 2 и более, считая их малыми, то получится выражение

$$f_e \left( \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \right) = \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \left( \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} \right).$$

Таким образом, в случае, когда собственная частота волны много больше дрейфовой частоты электронов, а энергия протонов много больше энергии электронов, получаем следующее выражение для дисперсионного соотношения:

$$\frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N = \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) - \frac{1}{2} a \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left( \frac{3}{2} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3 \beta_e}{2 \beta_p} \left[ \frac{\omega}{\Omega_{dc}} \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \left( \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) \right]. \quad (21)$$

Из (21) найдем выражение для собственной частоты:

$$\omega_0 = \Omega_{dp} \times \frac{\frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3 \beta_e}{2 \beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} \right)}{S + \frac{3}{4} - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \left( S + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}}}. \quad (22)$$

Для нахождения инкремента опять применим разложение по малому параметру и пренебрежем членами в знаменателе, где степень  $\Omega_{dc}/\omega$  равна 2 и более:

$$\gamma = -\Omega_{dc} \frac{\pi \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} \right)^{S+5/2} e^{-\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}}}}{\Gamma(S+3/2)} \times \frac{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S \right) \left( 1 - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) - \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3 \omega_{\varepsilon_e}^*}{2 \Omega_{dc}} \right]}{S + \frac{3}{4} - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \left( S + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}}}. \quad (23)$$

Из выражения (22) видно, что волна, так же как и в случае  $\omega/\Omega_{dc} \ll 1$ , может существовать в отсутствие градиентов.

Для существования волны должны выполняться условия

$$\begin{cases} S + \frac{3}{4} - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \left( S + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} > 0, \\ \frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3 \beta_e}{2 \beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) > 0 \end{cases} \quad (24.1)$$

или

$$\begin{cases} S + \frac{3}{4} - \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} \left( S + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} < 0, \\ \frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N - \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_p}^*}{\Omega_{dp}} + \frac{\omega_{n_p}^*}{\Omega_{dp}} \right) + \frac{3 \beta_e}{2 \beta_p} \left( \frac{\omega_{\varepsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} \right) < 0. \end{cases} \quad (24.2)$$

Условие неустойчивости из (23) для (24.1) будет

$$\left(\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S\right) \left(1 - \frac{\omega_{\epsilon_e}^*}{\Omega_{dc}}\right) - \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\epsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} < 0 \quad (25.1)$$

и для (24.2), соответственно,

$$\left(\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S\right) \left(1 - \frac{\omega_{\epsilon_e}^*}{\Omega_{dc}}\right) - \frac{\omega_{n_e}^*}{\Omega_{dc}} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\epsilon_e}^*}{\Omega_{dc}} > 0. \quad (25.2)$$

В параболическом приближении магнитного поля для первой гармоники  $N=1$  условия существования волны можно записать как

$$\begin{cases} \frac{3}{L} \left(S + \frac{3}{4}\right) + \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} \left(S + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{n'_p}{n_p} > 0, \\ \frac{4}{L} \frac{\pi\sqrt{2}}{\beta_p} - \left(\frac{\epsilon'_{0p}}{\epsilon_{0p}} + \frac{n'_p}{n_p}\right) - 2 \frac{\beta_e}{\beta_p} \left(\frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} + \frac{n'_e}{n_e}\right) > 0 \end{cases} \quad (26.1)$$

или

$$\begin{cases} \frac{3}{L} \left(S + \frac{3}{4}\right) + \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} \left(S + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{n'_p}{n_p} < 0, \\ \frac{4}{L} \frac{\pi\sqrt{2}}{\beta_p} - \left(\frac{\epsilon'_{0p}}{\epsilon_{0p}} + \frac{n'_p}{n_p}\right) - 2 \frac{\beta_e}{\beta_p} \left(\frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} + \frac{n'_e}{n_e}\right) < 0. \end{cases} \quad (26.2)$$

Условие неустойчивости имеет вид для (26.1)

$$\left(\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S\right) \left(\frac{3}{L} + \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}}\right) + \frac{n'_e}{n_e} - \frac{3}{2} \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} < 0 \quad (27.1)$$

и для (26.2)

$$\left(\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} - S\right) \left(\frac{3}{L} + \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}}\right) + \frac{n'_e}{n_e} - \frac{3}{2} \frac{\epsilon'_{0e}}{\epsilon_{0e}} > 0. \quad (27.2)$$

Волны с частотами, много большими частоты магнитного дрейфа электронов  $\omega/\Omega_{dc} \gg 1$ , существуют, когда значения градиентов температуры и концентрации протонов соответствуют условию (26.1) или (26.2). Так же, как и в случае  $\omega/\Omega_{dc} \ll 1$ , волна может существовать в отсутствие таких градиентов. Неустойчивость будет развиваться, если градиенты температуры и концентрации электронов соответствуют условию (27.1) для (26.1) и (27.2) для (26.2).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для проведения численных расчетов мы приняли  $\beta_e/\beta_p=0.1$ . Нами были построены (рис. 1, 2) точные решения дисперсионного соотношения (11), представленного в виде

$$f(\omega_N) \equiv f_p(a\omega_N) + \frac{3}{2} \frac{\beta_e}{\beta_p} f_e(\omega_N) = \frac{L_{bp}}{\beta_p} \Lambda_N, \quad (28)$$

при различных параметрах градиентов плазмы и ее инверсности. Волна может существовать при значениях  $\omega_N$ , когда  $\text{Re}f(\omega_N) > 0$  и  $\text{Im}f(\omega_N) = 0$ , поскольку  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$  — положительная и действительная величина. На графиках положительным значениям

$\text{Re}f(\omega)$  соответствует красный цвет, отрицательным, при которых нет решений, — синий. Изолинии в области положительных значений соответствуют  $\text{Re}f(\omega) = L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$ . Жирная линия соответствует  $\text{Im}f(\omega) = 0$ . Таким образом, решениям дисперсионного соотношения (28) соответствуют точки пересечения изолиний  $\text{Re}f(\omega)$  в области положительных значений с линией  $\text{Im}f(\omega) = 0$ .

На рис. 1, а видно, что линия  $\text{Im}f(\omega) = 0$  пересекает изолинии  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$  в области, где

$\text{Im}(\omega/\Omega_{dc}) < 0$ . Можно сделать вывод, что в отсутствие градиентов и инверсности распределения электронов по энергиям неустойчивость существовать не может. Такой же вывод можно сделать, если подставить соответствующие значения  $\epsilon'_{0p}/\epsilon_{0p} = 0$ ,

$n'_p/n_p = 0$ ,  $\epsilon'_{0e}/\epsilon_{0e} = 0$ ,  $n'_e/n_e = 0$ ,  $S=0$  и проанализировать выражения (19.1), (26.1) и (20.1), (27.1).

Как видно из (19.1), (26.1), волна существовать может, однако из (20.1), (27.1) следует, что неустойчивость не реализуется, поскольку неравенства (20.1), (27.1) не выполняются. Если же добавить инверсность распределения (рис. 1, б), то получим ситуацию, при которой линия  $\text{Im}f(\omega) = 0$  пересекает изолинии  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$  в области, где  $\text{Im}(\omega/\Omega_{dc}) > 0$  и

$\text{Re}f(\omega_N) > 0$ , т. е. выполняются все условия, при которых может существовать неустойчивость плазмы.

Если подставить соответствующие значения  $\epsilon'_{0p}/\epsilon_{0p} = 0$ ,  $n'_p/n_p = 0$ ,  $\epsilon'_{0e}/\epsilon_{0e} = 0$ ,  $n'_e/n_e = 0$ ,  $S=1$  в (19.1) и (20.1), видно, что неравенства выполняются, а значит, возможна раскачка волны.

Неустойчивость может существовать также при распределении Максвелла электронов по энергиям (рис. 2, а), но при наличии градиентов температуры и концентрации частиц, при этом инверсность распределения (рис. 2, б) усиливает неустойчивость.

Заметим, что для численных расчетов мы использовали формулу без приближения относительно  $\omega/\Omega_{dc}$ . Из рисунков видно, что неустойчивость имеет максимальный инкремент, когда собственная частота дрейфово-компрессионной моды близка к дрейфовой частоте электронов.

Заметим также, что полученные выше результаты служат только иллюстрацией возможности существования неустойчивости, поскольку в приведенных примерах рассмотрена горячая плазма с  $\beta > 1$ , в то время как в магнитосфере Земли обычно  $\beta < 1$ .

При малых  $\beta$  даже для фундаментальной гармоники  $L_{bp} \Lambda_N \approx 4.4$  при  $N=1$  величина  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p \gg 1$ , поэтому к реальным параметрам магнитосферной плазмы ближе всего случай  $\omega_0/\Omega_{dc} \gg 1$ , (асимптотические выражения (22) и (23)).

Для примера найдем основную частоту дрейфово-компрессионной моды для магнитной оболочки  $L=6.6R_E$ , считая для простоты градиенты концентрации и температуры малыми. Предположим, что энергия электронов в максимуме инверсного распределения  $\epsilon_{e\max} = 10$  кэВ, азимутальное волновое число  $k_2=70$  и параметры

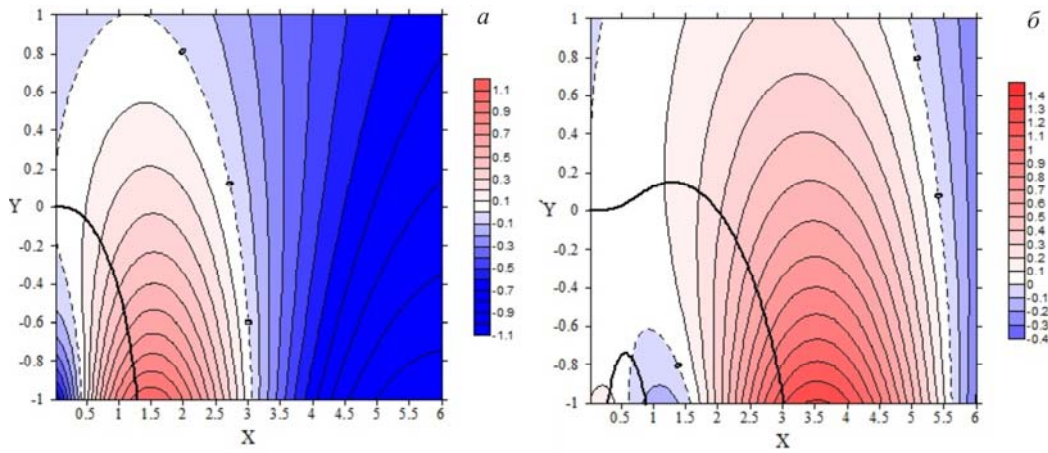


Рис. 1. Решения дисперсионного соотношения (28) при различных параметрах плазмы (в параболическом приближении для магнитного поля):  $\epsilon'_{0p} / \epsilon_{0p} = 0$ ,  $n'_p / n_p = 0$ ,  $\epsilon'_{0c} / \epsilon_{0c} = 0$ ,  $n'_c / n_c = 0$ ,  $S=0$  (а);  $\epsilon'_{0p} / \epsilon_{0p} = 0$ ,  $n'_p / n_p = 0$ ,  $\epsilon'_{0c} / \epsilon_{0c} = 0$ ,  $n'_c / n_c = 0$ ,  $S=1$  (б). Здесь  $X = \text{Re}(\omega / \Omega_{dc})$ ,  $Y = \text{Im}(\omega / \Omega_{dc})$ , изолинии в области положительных значений соответствуют значениям  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$ , точки их пересечения с жирной линией — решениям  $\omega_N / \Omega_{dc}$ . Шаг изменения  $L_{bp} \Lambda_N / \beta_p$  указан справа от каждого графика

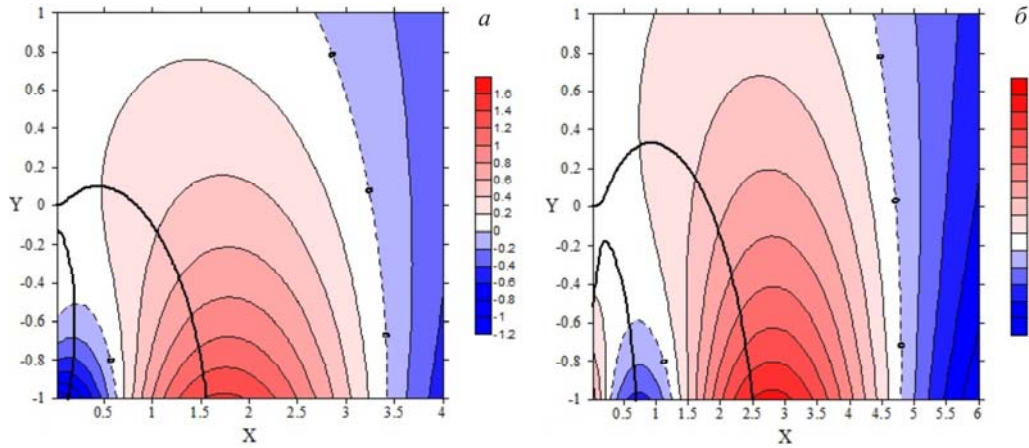


Рис. 2. То же, что и рис. 1, для следующих параметров плазмы:  $\epsilon'_{0p} / \epsilon_{0p} = 0.3L^{-1}$ ,  $n'_p / n_p = 0.3L^{-1}$ ,  $\epsilon'_{0c} / \epsilon_{0c} = 1.5L^{-1}$ ,  $n'_c / n_c = -1.5L^{-1}$ ,  $S=0$  (а);  $\epsilon'_{0p} / \epsilon_{0p} = 0.3L^{-1}$ ,  $n'_p / n_p = 0.3L^{-1}$ ,  $\epsilon'_{0c} / \epsilon_{0c} = 1.5L^{-1}$ ,  $n'_c / n_c = -1.5L^{-1}$ ,  $S=1$  (б)

$\beta_c / \beta_p = 0.1$ ,  $\beta_p = 0.5$ . Пренебрегая градиентами, получаем, что неустойчивость возникает при  $S > \omega_0 / \Omega_{dc}$ . Для выбранных параметров плазмы нетрудно показать, что  $\omega_0 / \Omega_{dc} \gg 1$ , поэтому частоту  $\omega_0$  и инкремент неустойчивости  $\gamma$  будем определять с помощью выражений (22) и (23) соответственно. При малых градиентах получим

$$\omega_0 = \Omega_{dp} \frac{L_{bp} \Lambda_N}{\beta_p S + \frac{3}{4}},$$

$$\gamma = \Omega_{dc} \frac{\pi \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} \right)^{S+5/2} e^{-\frac{\omega_0}{\Omega_{dc}}} \left( S - \frac{\omega_0}{\Omega_{dc}} \right)}{\Gamma(S+3/2) \left( S + \frac{3}{4} \right)}.$$

Неустойчивость возможна, если у модельного инверсного распределения электронов (2) параметр  $S > 59$ . Для расчетов мы выбрали значение  $S=60$  (рис. 3). В этом случае частота волны  $f_0 = 1.6$  МГц, инкремент  $\gamma = 4.8 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ , значение отношения  $\gamma / f_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ . Отметим, что на данной L-оболочке при значении альфеновской скорости  $V_A = 1000$  км/с основная частота альфеновского резонанса будет приблизительно 7.7 МГц. Таким образом, частота дрейфово-компрессионной волны оказывается ниже частоты альфеновского резонанса. При меньших значениях азимутального волнового числа  $k_2$  частота дрейфово-компрессионной волны будет еще меньше, поскольку она прямо пропорциональна  $k_2$ . Полученное отношение инкремента к собственной частоте близко к значениям, полученным в [Hughes et al., 1978] для альфеновских волн, генерируемых баунс-дрейфовой неустойчивостью, и декременту затухания на ионосфере.



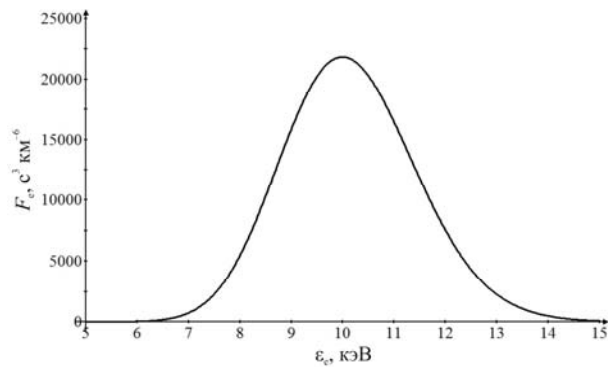


Рис. 3. Модельная функция распределения горячих электронов (2) при  $\varepsilon_{e,\max} = 10$  кэВ,  $\beta_e = 0.05$ ,  $S = 60$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что дрейфово-компрессионные волны могут распространяться не только в направлении дрейфа протонов (на запад) [Crabtree et al., 2003, Klimushkin, Mager, 2011, Mager et al., 2013], но и в обратную сторону, в направлении дрейфа электронов (на восток). Эти волны могут существовать и в отсутствие градиентов температуры и концентрации плазмы. В этом случае фазовая скорость волны должна быть меньше средней скорости магнитного дрейфа частиц в пучке. При своем распространении в направлении дрейфа электронов эти волны могут раскачиваться из-за резонансного взаимодействия с электронами, т. е. за счет дрейфовой неустойчивости. Развитие такой неустойчивости возможно при определенных градиентах температуры и концентрации электронов и протонов или из-за инверсности распределения электронов по энергиям.

Для магнитной оболочки  $L = 6.6 R_E$  показано, что частоты дрейфово-компрессионных волн могут быть ниже собственных частот колебаний магнитной трубки: при альфеновской скорости  $V_A = 1000$  км/с основная частота альфеновского резонанса равна 7.7 мГц, а частота дрейфово-компрессионной волны с азимутальным волновым числом  $k_2 = 70$  равна 1.6 мГц. Из-за резонансного взаимодействия волны с горячими электронами ее амплитуда растет с инкрементом 0.03 частоты.

Результаты работы могут быть полезны при интерпретации наблюдений волновых явлений с частотами в диапазоне геомагнитных пульсаций Pc5 и ниже. Например, в работе [James et al., 2013] на основе радарных данных сети SuperDARN проведен статистический анализ УНЧ-колебаний, возникающих во время суббулевой активности, и показано, что кроме волн, распространяющихся в направлении дрейфа протонов (на запад), есть волны, бегущие в направлении дрейфа электронов (на восток). При этом периоды некоторых из этих волн значительно превышают периоды пульсаций Pc5. Скорее всего, эти волны не являются альфеновскими и, возможно, являются дрейфово-компрессионными, бегущими в направлении дрейфа электронов и раскачиваемыми за счет резонансного взаимодействия с инжектируемыми в магнитосферу во время суббуль энергии электронами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-05-00254а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Allan W., Poulter E.M., Nielsen E. STARE observations of a Pc5 pulsation with large azimuthal wave number // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. P. 6163–6172. DOI: 10.1029/JA087iA08p06163.
- Barfield J.N., McPherron R.L. Statistical characteristics of storm-associated Pc5 micropulsations observed at the synchronous equatorial orbit // *J. Geophys. Res.* 1972. V. 77. P. 4720–4733. DOI: 10.1029/JA077i02Sp04720.
- Chelpanov M.A., Mager P.N., Klimushkin D.Y., et al. Experimental evidence of drift compressional waves in the magnetosphere: an Ekaterinburg coherent decameter radar case study // *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2016. V. 121. P. 1315–1326. DOI: 10.1002/2015JA022155.
- Chen L., Hasegawa A. A theory of long period magnetic pulsation. 1. Steady state excitation of a field line resonance // *J. Geophys. Res.* 1974. V. 79. P. 1024–1032. DOI: 10.1029/JA079i007p01024.
- Chen L., Hasegawa A. Kinetic theory of geomagnetic pulsations. 1. Internal excitations by energetic particles // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96. P. 1503–1512. DOI: 10.1029/90JA02346.
- Crabtree C., Horton W., Wong H.V., van Dam J.W. Bounce-averaged stability of compressional modes in geotail flux tubes // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. P. 1084. DOI: 10.1029/2002JA009555.
- Fenrich F.R., Samson J.C., Sofko G., Greenwald R.A. ULF high- and low-m field line resonances observed with the Super Dual Auroral Radar Network // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100. P. 21,535–21,548. DOI: 10.1029/95JA02024.
- Hamlin D.A., Karplus R., Vik R.C., Watson K.M. Mirror and azimuthal drift frequencies for geomagnetically trapped particles // *J. Geophys. Res.* 1961. V. 66, N 1. P. 1–4. DOI: 10.1029/JZ066i001p00001.
- Higuchi T., Kokubun S. Waveform and polarization of compressional Pc 5 waves at geosynchronous orbit // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P. 14,433–14,443. DOI: 10.1029/JA093iA12p14433.
- Hughes W.J., Southwood D.J., Mauk B., et al. Alfvén waves generated by an inverted plasma energy distribution // *Nature.* 1978. V. 275. P. 43–45. DOI: 10.1038/275043a0.
- Hurricane O.A., Pellat R., Coroniti F. V. The kinetic response of a stochastic plasma to low frequency perturbations // *Geophys. Res.* 1994. V. 21, N 4. P. 253–256. DOI: 10.1029/93GL03533.
- James M.K., Yeoman T.K., Mager P.N., Klimushkin D.Y. The spatio-temporal characteristics of ULF waves driven by substorm injected particles // *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2013. V. 118. P. 1737–1749. DOI: 10.1002/jgra.50131.
- Klimushkin D.Y., Mager P.N. Spatial structure and stability of coupled Alfvén and drift compressional modes in non-uniform magnetosphere: gyrokinetic treatment // *Planet. Space Sci.* 2011. V. 59. P. 1613–1620. DOI: 10.1016/j.pss.2011.07.010.
- Klimushkin D.Y., Mager P.N., Pilipenko V.A. On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes // *Earth, Planets and Space.* 2012. V. 64. P. 777–781. DOI: 10.5047/eps.2012.04.002.
- Kremser G., Korth A., Fejer J.A., et al. Observations of quasi-periodic flux variations of energetic ions and electrons associated with Pc5 geomagnetic pulsations // *J. Geophys. Res.* 1981. V. 86. P. 3345–3356. DOI: 10.1029/JA086iA05p03345.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (Monochromatic oscillations) // *Planet. Space Sci.* 1989. V. 37. P. 1095–1108.

Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // *Planet. Space Sci.* 1993. V. 41. P. 697–717. DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.

Mager P.N., Bergardt O.I., Klimushkin D.Y., et al. First results of the high-resolution multibeam ULF wave experiment at the Ekaterinburg SuperDARN radar: ionospheric signatures of coupled poloidal Alfvén and drift-compressional modes // *J. Atmos. Solar. Terr. Phys.* 2015. V. 130–131. P. 112–126. DOI: 10.1016/j.jastp.2015.05.017.

Mager P.N., Klimushkin D.Y., Kostarev D.V. Drift-compressional modes generated by inverted plasma distributions in the magnetosphere // *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2013. V. 118. P. 4915–4923. DOI: 10.1002/jgra.50471.

Pokhotelov O.A., Onishchenko O.G., Balikhin M.A., et al. Drift mirror instability in space plasmas. 2. Nonzero electron temperature effects // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 13,237–13,246.

Southwood D.J. Some features of field line resonances in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* 1974. V. 22. P. 483–491. DOI: 10.1016/0032-0633(74)90078-6.

Walker A.D.M. Magnetohydrodynamic Waves in Geospace. The Theory of ULF Waves and their Interaction with Energetic Particles in the Solar–Terrestrial Environment. 2005. P. 503–506.

Yeoman T.K., Tian M., Lester M., Jones T.B. A study of Pc5 hydromagnetic waves with equatorward phase propagation // *Planet. Space Sci.* 1992. V. 40. P. 797–810. DOI: 10.1016/0032-0633(92)90108-Z.

## REFERENCES

Allan W., Poulter E.M., Nielsen E. STARE observations of a Pc5 pulsation with large azimuthal wave number. *J. Geophys. Res.* 1982, vol. 87, pp. 6163–6172. DOI: 10.1029/JA087iA08p06163.

Barfield J.N., McPherron R.L. Statistical characteristics of storm-associated Pc5 micropulsations observed at the synchronous equatorial orbit. *J. Geophys. Res.* 1972, vol. 77, pp. 4720–4733. DOI: 10.1029/JA077i025p04720.

Chelpanov M.A., Mager P.N., Klimushkin D.Y., Bergardt O.I., Mager O.V. Experimental evidence of drift compressional waves in the magnetosphere: an Ekaterinburg coherent decameter radar case study. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2016, vol. 121, pp. 1315–1326. DOI: 10.1002/2015JA022155.

Chen L., Hasegawa A. A theory of long period magnetic pulsation. 1. Steady state excitation of a field line resonance. *J. Geophys. Res.* 1974, vol. 79, pp. 1024–1032. DOI: 10.1029/JA079i007p01024.

Chen L., Hasegawa A. Kinetic theory of geomagnetic pulsations. 1. Internal excitations by energetic particles. *J. Geophys. Res.* 1991, vol. 96, pp. 1503–1512. DOI: 10.1029/90JA02346.

Crabtree C., Horton W., Wong H.V., van Dam J.W. Bounce-averaged stability of compressional modes in geotail flux tubes. *J. Geophys. Res.* 2003, vol. 108, p. 1084. DOI: 10.1029/2002JA009555.

Fenrich F.R., Samson J.C., Sofko G., Greenwald R.A. ULF high- and low-m field line resonances observed with the Super Dual Auroral Radar Network. *J. Geophys. Res.* 1995, vol. 100, pp. 21,535–21,548. DOI: 10.1029/95JA02024.

Hamlin D.A., Karplus R., Vik R.C., Watson K.M. Mirror and azimuthal drift frequencies for geomagnetically trapped particles. *J. Geophys. Res.* 1961, vol. 66, no. 1, pp. 1–4. DOI: 10.1029/JZ066i001p00001.

Higuchi T., Kokubun S. Waveform and polarization of compressional Pc5 waves at geosynchronous orbit. *J. Geophys. Res.* 1988, vol. 93, pp. 14,433–14,443. DOI: 10.1029/JA093iA12p14433.

Hughes W.J., Southwood D.J., Mauk B., McPherron R.L., Barfield J.N. Alfvén waves generated by an inverted plasma energy distribution. *Nature.* 1978, vol. 275, pp. 43–45. DOI: 10.1038/275043a0.

Hurricane O.A., Pellat R., Coroniti F.V. The kinetic response of a stochastic plasma to low frequency perturbations. *J. Geophys. Res.* 1994, vol. 21, no. 4, pp. 253–256. DOI: 10.1029/93GL03533.

James M.K., Yeoman T.K., Mager P.N., Klimushkin D.Y. The spatio-temporal characteristics of ULF waves driven by substorm injected particles. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2013, vol. 118, pp. 1737–1749. DOI: 10.1002/jgra.50131.

Klimushkin D.Y., Mager P.N. Spatial structure and stability of coupled Alfvén and drift compressional modes in non-uniform magnetosphere: gyrokinetic treatment. *Planet. Space Sci.* 2011, vol. 59, pp. 1613–1620. DOI: 10.1016/j.pss.2011.07.010.

Klimushkin D.Y., Mager P.N., Pilipenko V.A. On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes. *Earth, Planets and Space.* 2012, vol. 64, pp. 777–781. DOI: 10.5047/eps.2012.04.002.

Kremser G., Korth A., Fejer J.A., Wilken B., Gurevich A.V., Amata E. Observations of quasi-periodic flux variations of energetic ions and electrons associated with Pc5 geomagnetic pulsations. *J. Geophys. Res.* 1981, vol. 86, pp. 3345–3356. DOI: 10.1029/JA086iA05p03345.

Leonovich A.S., Mazur V.A. Resonance excitation of standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere (Monochromatic oscillations). *Planet. Space Sci.* 1989, vol. 37, pp. 1095–1108.

Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1993, vol. 41, pp. 697–717. DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.

Mager P.N., Bergardt O.I., Klimushkin D.Y., Zolotukhina N.A., Mager O.V. First results of the high-resolution multibeam ULF wave experiment at the Ekaterinburg SuperDARN radar: ionospheric signatures of coupled poloidal Alfvén and drift-compressional modes. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2015, vol. 130–131, pp. 112–126. DOI: 10.1016/j.jastp.2015.05.017.

Mager P.N., Klimushkin D.Y., Kostarev D.V. Drift-compressional modes generated by inverted plasma distributions in the magnetosphere. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2013, vol. 118, pp. 4915–4923. DOI: 10.1002/jgra.50471.

Pokhotelov O.A., Onishchenko O.G., Balikhin M.A., Treumann R.A., Pavlenko V. Drift mirror instability in space plasmas. 2. Nonzero electron temperature effects. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, pp. 13,237–13,246.

Southwood D.J. Some features of field line resonances in the magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1974, vol. 22, pp. 483–491. DOI: 10.1016/0032-0633(74)90078-6.

Walker A.D.M. *Magnetohydrodynamic Waves in Geospace. The Theory of ULF Waves and Their Interaction with Energetic Particles in the Solar–Terrestrial Environment.* 2005, pp. 503–506.

Yeoman T.K., Tian M., Lester M., Jones T.B. A study of Pc5 hydromagnetic waves with equatorward phase propagation. *Planet. Space Sci.* 1992, vol. 40, pp. 797–810. DOI: 10.1016/0032-0633(92)90108-Z.

### Как цитировать эту статью

Костарев Д.В., Магер П.Н. Дрейфово-компрессионные волны, распространяющиеся в направлении дрейфа энергичных электронов в магнитосфере. *Солнечно-земная физика.* 2017. Т. 3, № 3. С. 20–29.

### How to cite this article

Kostarev D.V., Mager P.N. Drift-compression waves propagating in the drift direction of energetic electrons in the magnetosphere. *Solar–Terrestrial Physics.* 2017. Vol. 3, iss. 3. P. 20–29.