

DOI: 10.34031/2071-7318-2020-5-2-56-61

*Юрьев А.Г., Зинькова В.А.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

*E-mail: yuriev_ag@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ НАГРУЖЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФЕРМ

Аннотация. Эффективный способ оптимизации нагружения металлических ферм имеет вариационную основу. Универсальный критерий оптимальности связан с минимумом потенциальной энергии системы (дополнительной энергии) в функциональном пространстве, расширенном за счет полей функций конфигурации и (или) модулей материала, а также нагрузки. При однородном линейно-упругом материале оптимальную ферму можно представить, как квазиравнопрочную систему с внутренними силами N_i/ϕ_i , где ϕ_i – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления металла. Величина $\sum N_i l_i$ (l_i – длина стержня) является в общем случае характеристикой степени априорной устойчивости фермы, в частном случае (нагрузка на прямой, соединяющей опоры) определяет оптимальный вариант нагружения, соответствующий минимуму объема материала. В качестве численного эксперимента рассмотрено распределение нагрузки $\sum F_i = \text{const}$ для фермы с нисходящим (восходящим) раскосом. Установлена независимость оптимального варианта нагружения от структуры решетки фермы.

Ключевые слова: нагружение фермы, вариационная постановка задачи, критерий оптимальности.

Введение. Ферма – несущая часть инженерного сооружения (пролетного строения моста, перекрытия здания и т.п.), состоящая из шарнирно соединенных в узлах стержней. Фермы имеют давнюю историю и оправдывают себя рациональным использованием материала [1–13].

Оптимизацию конструкций ферм в результате рационального расположения их элементов впервые осуществил российский инженер В.Г. Шухов в конце XIX века [14]. Решение дано прежде всего на уровне топологии, которая предусматривает расположение узлов и способ их взаимного соединения для образования геометрически неизменяемой системы. Спустя восемь десятилетий появились исследования роли фактора топологии в оптимизации стержневых систем [15]. Но оставалась в стороне сопутствующая проблема – оптимизация их нагружения.

Основная часть. Для существенного прогресса в оптимизации несущих конструкций необходимо понимание того, что искомые топология, геометрия и сечения отдельных элементов системы составляют единство в алгоритме решения проектной задачи. Технические системы и природные конструкции должны быть подчинены единым принципам структурообразования, согласованным с критерием, имеющим энергетическое содержание. Эти принципы согласуются с

распределением материала в соответствии с силовыми полями, что соблюдается естественным образом в природных конструкциях [16].

Проблема приобретает специфику в отношении конструкций, для элементов которым необходимо обеспечить устойчивость равновесия. К ним относятся рассматриваемые здесь фермы [17–21].

Качество равновесия определяет потенциальная энергия системы Π , в соответствии с которой различают:

- а) устойчивое состояние ($\Pi = \min, \delta^2 \Pi > 0$);
- б) неустойчивое состояние ($\Pi = \max, \delta^2 \Pi < 0$);
- в) безразличное состояние ($\Pi = \text{const}, \delta^2 \Pi = 0$) как граница между устойчивым и началом неустойчивого положения равновесия (критическое состояние).

Для ферм при вертикальной нагрузке некоторым эквивалентом степени априорной устойчивости может служить сумма произведений из усилий N в стержнях на их длины l . Покажем это на примере балочной фермы (рис. 1).

В табл. 1 даны размеры фермы, внутренние усилия и указанная характеристика.

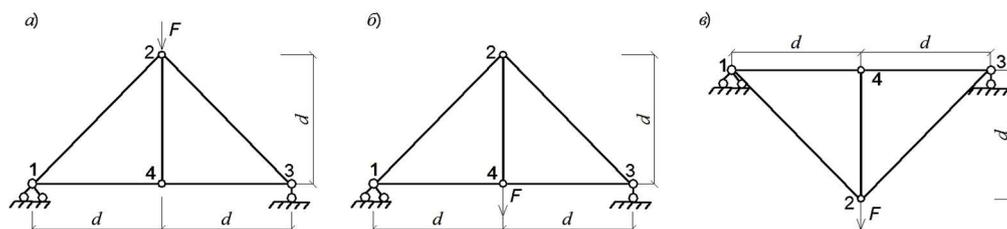


Рис. 1. Три варианта нагружения балочной фермы

Таблица 1

Сведения о фермах на рис.1

Ферма	Стержни	l	N	Nl	ΣNl
Рис. 1, а	1-2	$d\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}F$	$-Fd$	$-Fd$
	2-3	$d\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}F$	$-Fd$	
	1-4	d	$0,5F$	$0,5 Fd$	
	4-3	d	$0,5F$	$0,5 Fd$	
	2-4	d	0	0	
Рис. 1, б	1-2	$d\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}F$	$-Fd$	0
	2-3	$d\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}F$	$-Fd$	
	1-4	d	$0,5F$	$0,5 Fd$	
	4-3	d	$0,5F$	$0,5 Fd$	
	2-4	d	F	Fd	
Рис. 1, в	1-2	$d\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{2}F$	Fd	Fd
	2-3	$d\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{2}F$	Fd	
	1-4	d	$-0,5F$	$-0,5 Fd$	
	4-3	d	$-0,5F$	$-0,5 Fd$	
	2-4	d	0	0	

Приведем сначала вывод из таблицы в формулировке [8]: для балочной фермы при вертикальной нагрузке алгебраическая сумма произведений из усилий в элементах на их длины будет положительна, равная нулю, или отрицательная, в зависимости от того, приложена ли нагрузка ниже прямой, соединяющей опорные точки, на уровне ее, или выше.

Установленный вывод используется в работе [8] для проверки правильности расчета усилий в случае приложения нагрузки на уровне прямой, соединяющей опорные точки, и основано на свойстве вириала внешних сил.

Но вывод из таблицы может иметь и другую интерпретацию: для балочной фермы при вертикальной нагрузке алгебраическая сумма произведений из усилий в элементах на их длины нарастает с увеличением степени априорной устойчивости, под которой будем понимать вклад растянутых стержней в величину ΣNl .

В первом случае – это 33%, во втором – 50%, в третьем – 67%. Достигается это, как видим, соответствием расположения материала силовому полю. Во втором случае прежний «нулевой» стержень стал рабочим, в третьем растянутыми оказались длинные стержни. Однако окончательное суждение об оптимальности системы дает энергетический критерий.

Взяв за основу функционал Кастильяно, сформулируем вариационный принцип синтеза системы и нагрузки: «при заданных условиях дополнительная энергия в положении устойчивого равновесия достигает абсолютного минимума по внутренним силам в функциональном простран-

стве, расширенном за счет полей функций конфигурации и (или) модулей упругости материала, а также нагрузки.

Ограничимся рассмотрением фермы из однородного линейно-упругого материала с модулем продольной упругости E и расчетным сопротивлением растяжению и сжатию R . Представим виртуальную систему с внутренними силами N_i/ϕ_i , где ϕ_i – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления R . Для растянутых стержней он равен единице, а для сжатых принимается исходя из ограничения гибкости элементов пояса и решетки. Искомые площади поперечных сечений A_i сжатых стержней должны иметь соответствующие минимальные радиусы инерции». [17]

При линейно-упругой постановке задачи дополнительная энергия системы равна потенциальной энергии деформации U . Рассмотрим изопериметрическую задачу, в которой предполагается заданным объем материала $\sum_{i=1}^n A_i l_i = V_0$, с функционалом

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E\phi_i^2 A_i} + \mu \sum_{i=1}^n A_i l_i \quad (1)$$

где n – число стержней, μ – множитель Лагранжа, имеющий постоянную величину.

Следствием стационарности функционала (1) являются уравнение объема материала и n уравнений из условий $\partial U_1 / \partial A_i = 0$:

$$-\frac{N_i^2}{2E\phi_i^2 A_i^2} + \mu = 0 \quad (2)$$

или

$$\frac{1}{2E} \frac{N_i^2}{\phi_i^2 A_i^2} = \mu (= \text{const}) \quad (3)$$

Это свидетельствует о квазиравнонапряженности фермы. В работе [22] говорится о равнонапряженности, поскольку не рассматривается устойчивость сжатых стержней.

Исходя из условия квазиравнопрочности, можно записать:

$$A_i = \frac{|N_i|}{\varphi_i R}, \quad (4)$$

и выражение U принимает вид:

$$U = \frac{R}{2E} \sum_{i=1}^n \frac{|N_i| l_i}{\varphi_i}, \quad (5)$$

Найдя из (4) представим (5) как $|N_i|/\varphi_i = A_i R$

$$U = \frac{R^2}{2E} \sum_{i=1}^n A_i l_i, \quad (6)$$

Значит минимуму энергии U соответствует минимум объема материала.

В то же время, как видно из формулы (5) при $\varphi_i = \text{const}$ минимуму энергии U соответствует минимум $\sum_{i=1}^n |N_i| l_i$, что может служить альтернативной характеристикой оптимальности конструкции фермы.

Для фермы на рис. 1 величина U составляет (коэффициент φ_i принимается равным 0,5):

a) $2,5 \frac{R}{E} Fd$;

б) $3 \frac{R}{E} Fd$;

в) $2 \frac{R}{E} Fd$.

В варианте б включение стержня 2-4 увеличило степень априорной устойчивости и в то же время повысило потенциальную энергию деформации по сравнению с вариантом а. Вариант в подтвердил свою оптимальность с позиции минимума величины U .

Рассмотрим оптимизацию расположения нагрузки $\Sigma F_i = \text{const}$ на примере балочной фермы (рис. 2).

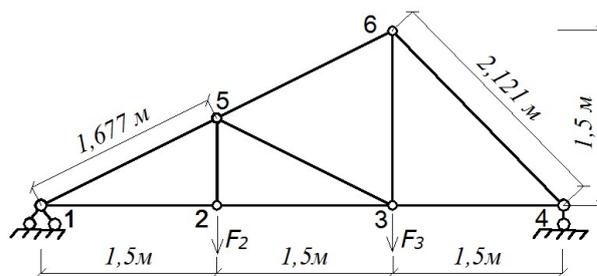


Рис. 2. Ферма с нисходящим раскосом

В табл. 2 приведены усилия в стержнях фермы при 5 вариантах нагрузки, составляющей в сумме 20 кН.

Таблица 2

Усилия (кН) в стержнях фермы (рис. 2) при 5 вариантах нагрузки

Стержень	F ₂ =10кН, F ₃ =10кН	F ₂ =20кН, F ₃ =0кН	F ₂ =0кН, F ₃ =20кН	F ₂ =15кН, F ₃ =5кН	F ₂ =5кН, F ₃ =15кН
1-2	20,00	26,67	13,33	23,33	16,67
2-3	20,00	26,67	13,33	23,33	16,67
3-4	10,00	6,67	13,33	8,33	11,67
4-6	-14,14	-9,43	-18,86	-11,79	-16,50
3-6	15,00	10,00	20,00	12,50	17,50
1-5	-22,36	-29,81	-14,91	-26,09	-18,63
5-6	-11,18	-7,45	-14,91	-9,32	-13,04
2-5	10,00	20,00	0,00	15,00	5,00
3-5	-11,18	-22,36	0,00	-16,77	-5,59

В табл. 3 даны величины $\sum |N_i| l_i$ и потенциальная энергия деформации U , соответствующие

5 вариантам нагрузки (табл. 2), при $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа и $R=240$ МПа.

Таблица 3

Величины $\sum |N_i| l_i$ и потенциальная энергия деформации для 5 вариантов нагрузки

Величины	F ₂ =0кН, F ₃ =20кН	F ₂ =5кН, F ₃ =15кН	F ₂ =10кН, F ₃ =10кН	F ₂ =15кН, F ₃ =5кН	F ₂ =20кН, F ₃ =0кН
$\sum N_i l_i$, кН·м	180	195	210	225	240
U , Дж	154,3	167,1	180	192,8	205,7

Из табл. 3 видно, что оптимальным вариантом нагрузки, по энергетическому критерию, обеспечивающему минимальный расход материала, является расположение ее суммарной величины в узле 3, в котором сходятся три растянутых и одна «нулевой» стержень. Минимальной величине U соответствует минимум $\sum |N_i| l_i$, свидетельствующий, как говорилось выше, о степени

априорной устойчивости системы. Эта характеристика может быть альтернативной минимуму величины U при выборе оптимального варианта рассмотренного типа нагрузки.

Для сравнения рассмотрим 5 вариантов нагружения фермы (рис. 3) с теми же геометрическими параметрами.

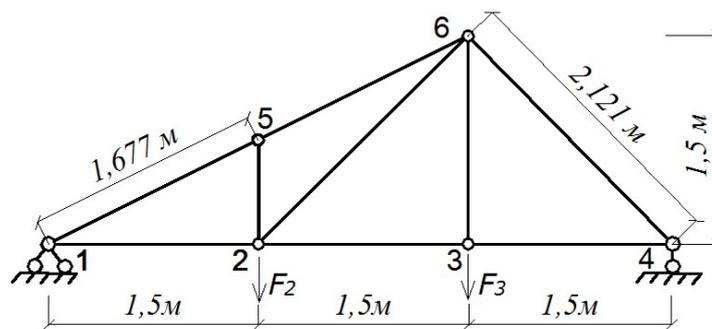


Рис. 3. Ферма с восходящим раскосом

В табл. 4 приведены усилия в стержнях фермы при 5 вариантах нагрузки, составляющей в сумме 20 кН.

Несмотря на изменение величин усилий по сравнению с табл. 2 в связи с изменением топологии фермы данные табл. 3 сохраняются. Это

свидетельствует о замечательном свойстве ферм с вертикальной нагрузкой по горизонтальному нижнему поясу – независимости потенциальной энергии деформации от структуры решетки.

Таблица 4

Усилия (кН) в стержнях фермы (рис. 3) при 5 вариантах нагрузки

Стержень	$F_2=10\text{кН},$ $F_3=10\text{кН}$	$F_2=20\text{кН},$ $F_3=0\text{кН}$	$F_2=0\text{кН},$ $F_3=20\text{кН}$	$F_2=15\text{кН},$ $F_3=5\text{кН}$	$F_2=5\text{кН},$ $F_3=15\text{кН}$
1-2	20,00	26,67	13,33	23,33	16,67
2-3	10,00	6,67	13,33	8,33	11,67
3-4	10,00	6,67	13,33	8,33	11,67
4-6	-14,14	-9,43	-18,86	-11,79	-16,50
3-6	10,00	0,00	20,00	5,00	15,00
1-5	-22,36	-29,81	-14,91	-26,09	-18,63
5-6	-22,36	-29,81	-14,91	-26,09	-18,63
2-5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2-6	14,14	28,28	0,00	21,21	7,07

Выводы. В заключение можно сказать, что оптимизация нагрузки на ферму решается сравнением приемлемых вариантов ее распределения. Определяющим фактором является критерий оптимальности для несущей конструкции, вытекающий из вариационного принципа проектной задачи и приводящий к минимуму расхода материала. В частном случае расположения нагрузки на уровне прямой, соединяющей опорные точки, альтернативным фактором может быть минимум сумм произведений из модулей усилий в элементах на их длины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Maxwell J.C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. 1890. Vol. 2. Pp. 175–177.
2. Michell A.G.M. The limits of economy of material in framestructures // Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904. Vol. 8. sixth Series. No 47.
3. Pippard A.I.S. On a method for the direct design of framed structures having redundant bracing //

Tech. Rep. Aero. Res. Comn. London, for Year 1922–1923.

4. Подольский И.С. Пространственные фермы. М.: Гостехиздат, 1931. 351с.
5. Безухов Н.И. Внутренние силы и деформации ферм. М.-Л.: Госстройиздат, 1933. 164 с.
6. Рабинович И.М. К теории статически неопределимых ферм. М.: Транспечать, 1933. 120 с.
7. Хуберян К.М. К расчету статически неопределимых ферм. Тбилиси: НИСоор, 1938. 82 с.
8. Уманский А.А. Статика и кинематика ферм. М.: ГИТТЛ, 1957. 342 с.
9. Киселев В.А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1976. 511 с.
10. Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Совершенствование структуры плоской фермы // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2015. Т. 1. № 1. С. 71–76.
11. Марутян А.С., Оробинская В.Н. Оптимизация конструкций с решетками из круглых и овальных труб // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С.45-57.
12. Марутян А.С., Оробинская В.Н. Трех-

гранные фермы покрытий (перекрытий) и оптимизация их высот // Вестник МГСУ. 2017. Т.12. № 2. С. 172–183.

13. Дегтярь А.Н., Серых И.Р., Панченко Л.А., Чернышева Е.В. Остаточный ресурс конструкций зданий и сооружений // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 10. С. 94–97.

14. Шухов В.Г. Строительная механика. Избранные труды. М.: Наука, 1977. 193 с.

15. Majid K.I. Optimum design of structures. London: Newnes Butterworths, 1979. 238 p.

16. Roux W. Gesammelte Abhandlungen über Entwicklungsmechanik der Organismen. Bd. 1-2. Leipzig, 1985

17. Юрьев А.Г. Оптимизация топологии и геометрии конструкций. Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. 96 с.

18. Зинькова В.А. Оптимизация топологии металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2015. № 2. С.37–40.

19. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of tube trusses without gusset plate with joint connections // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. No. 5. Vol. 10. Pp. 12391-12398.

20. Юрьев А.Г., Зинькова В.А., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Оптимизация структуры металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 7. С.41–45.

21. Юрьев А.Г., Зинькова В.А., Ата Эль-Карим Солиман. Проектировочный расчет фермы // Строительные материалы и изделия. 2019. Т.2. №1. С.37–44.

22. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength // Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Techniques, 1960. Vol. 8. No. 6. Pp. 259–268.

Информация об авторах

Юрьев Александр Гаврилович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: yuriev_ag@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Зинькова Виктория Анатольевна, начальник отдела создания и оценки объектов интеллектуальной собственности, старший преподаватель кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: vikzinkova@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Поступила в ноябре 2019 г.

© Юрьев А.Г., Зинькова В.А., 2020

***Yuriev A.G., Zinkova V.A.**

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov

**E-mail:yuriev_ag@mail.ru*

LOADING OPTIMIZATION OF THE METAL TRUSSES

Abstract. Loading optimization of the metal trusses has a variational basis. The universal criterion of optimization is the minimum of potential energy of the system (additional energy) in functional space expanded at the expense of functions fields of configuration and (or) material modules, and load. Under the condition of homogeneous linear elastic material optimal truss represents as quasiuniresistant virtual system with internal forces N_i/ω_i (ω_i – decrease coefficient of designed metal resistance of to tension and compression. The value $\sum N_i l_i$ (l_i is pivot length) is in general case the characteristic of the degree of a priori stability of truss, in special case (the load at the line, connecting supports) determines optimal variant of loading. As numerical experiment was consider the distribution of load $\sum F_i = \text{const}$ for the truss with descending (ascending) pivot. It is established the independence of optimal loading variant from truss grating structure.

Keywords: truss loading, variational statement of problem, optimization criterion.

REFERENCES

1. Maxwell J.C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. 1890. Vol. 2. Pp. 175–177.
2. Michell A.G.M. The limits of economy of material in framestructures. Philosophical Magazine

and Journal of Science. 1904. Vol. 8. sixth Series. No. 47.

3. Pippard A.I.S. On a method for the direct design of framed structures having redundant bracing. Tech. Rep. Aero. Res. Comn. London, for Year 1922–1923.

4. Podolsky I.S. Space trusses [Prostranstvennye fermy]. M.: Gostekhizdat, 1931. 351 p. (rus)
5. Bezukhov N.I. Interior forces and strains of trusses [Vnutrennie sily i deformacii ferm]. M.-L.: Gosstroyizdat, 1933. 164 p. (rus)
6. Rabinovich I.M. On the theory of statically undefinable trusses [K teorii staticheskii neopredelimiym ferm]. M.: Transpechat, 1933. 120 p. (rus)
7. Khuberyan K.M. On calculation of statically undefinable trusses [K raschetu staticheskii neopredelimiym ferm]. Tbilisi: NISoor, 1938. 82 p. (rus)
8. Umansky A.A. The statics and the kinematics of trusses [Statika i kinematika ferm]. M.: GITTL, 1957. 342 p. (rus)
9. Kiselyov V.A. Mechanics structure [Stroitel'naya mekhanika]. M.: Stroyizdat, 1976. 511 p. (rus)
10. Smolyago N.A., Yakovlev O.A. The structure perfecting of plane truss [Sovershenstvovanie struktury ploskoj fermy]. Journal of Science and Education of North-West Russia. 2015. Vol. 1. No. 1. Pp. 71–76. (rus)
11. Marutyanyan A.S., Orobinskaya V.N. Constructions optimization with the lattice from circle and oval tubes [Optimizaciya konstrukcij s reshetkami iz kruglyh i oval'nyh trub]. Vestnik MGSU. 2016. No. 10. Pp. 45–57. (rus)
12. Marutyanyan A.S., Orobinskaya V.N. Three-edged trusses of covering (overlapping) and the optimization of their heights [Trekhgrannnye fermy pokrytij (perekrytij) i optimizaciya ih vysot]. Vestnik MGSU. 2017. Vol. 12. No. 2. Pp. 172–183. (rus)
13. Degtyar A.N., Serykh I.R., Panchenko L.A., Chernysheva E.V. Residual resource of buildings and structures constructions [Ostatocnyj resurs konstrukcij zdaniy i sooruzhenij]. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2017. No. 10. Pp. 94–97. (rus)
14. Shukhov V.G. Mechanics structure [Stroitel'naya mekhanika]. Selected works. M.: Science, 1977. 193 p. (rus)
15. Majid K.I. Optimum design of structures. London: Newnes Butterworths, 1979. 238 p.
16. Roux W. General consideration of organisms development mechanics. Vol. 1-2. Leipzig, 1985.
17. Yuriev A.G. The optimization of constructions topology and geometry [Optimizaciya topologii i geometrii konstrukcij]. Belgorod: BSTU Publisher, 2018. 96 p. (rus)
18. Zinkova V.A. Optimization of metallic trusses topology [Optimizaciya topologii metallicheskih ferm]. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2015. No. 2. Pp. 37–40. (rus)
19. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of tube trusses without gusset plate with joint connections. International Journal of Applied Engineering Research. 2015. No. 5. Vol. 10. Pp. 12391–12398.
20. Yuriev A.G., Zinkova V.A., Smolyago N.A., Yakovlev O.A. Structure optimization of metallic trusses [Optimizaciya struktury metallicheskih ferm]. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2017. No. 7. Pp. 41–45. (rus)
21. Yuriev A.G., Zinkova V.A., Ata El-Carim Soliman. Designing calculation of the truss [Proektirovochnyj raschet fermy]. Construction materials and products. 2019. Vol. 2. No. 1. Pp. 37–44. (rus)
22. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Techniques, 1960. Vol. 8. No. 6. Pp. 259–268.

Information about the authors

Yuriev, Alexandr G. DSc, Professor. E-mail: alfimovan@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Zinkova, Viktoriya A. Senior lecturer. E-mail: olga.koalchenko@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Received in November 2019

Для цитирования:

Юрьев А.Г., Зинькова В.А. Оптимизация нагружения металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2020. № 2. С. 56–61. DOI: 10.34031/2071-7318-2020-5-2-56-61

For citation:

Yuriev A.G., Zinkova V.A. Loading optimization of the metal trusses. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2020. No. 2. Pp. 56–61. DOI: 10.34031/2071-7318-2020-5-2-56-61