

Геометрическое моделирование поверхностей земляных сооружений

Geometric modeling of surfaces of earth constructions

Сальков Н.А.

канд. техн. наук, профессор кафедры архитектуры Московского государственного академического художественного института имени В.И. Сурикова
e-mail: nikolaysalkov@mail.ru

Salkov N.A.

Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of Architecture, Moscow State Academic Art Institute named after V.I. Surikov

Аннотация

Поверхности земляных сооружений используются, в основном, как линейчатые. Значение линейчатых поверхностей в хозяйственной деятельности человека нельзя переоценить. Они используются повсеместно: в машиностроении, в самолето- и автомобилестроении, в сельском хозяйстве, в строительстве, в легкой промышленности. В данной работе рассматривается их использование в качестве земляных сооружений в горной промышленности и при строительстве и реконструкции автомобильных дорог. Приводятся геометрическая и математическая модели откосов насыпей и выемок. Предложенную математическую модель удобно использовать для компьютерного моделирования откосов, а также для определения линии пересечения откосов с поверхностью земли.

Ключевые слова: моделирование поверхностей, линейчатые поверхности, геометрия, строительство, горное производство.

Abstract

The surfaces of earthworks are mainly used as linear structures. The importance of linear surfaces in human economic activity cannot be overestimated. They are used everywhere: in mechanical engineering, in aircraft and automobile manufacturing, in agriculture, in construction, and in light industry. This paper discusses their use as earthworks in the mining industry and in the construction and reconstruction of highways. Geometric and mathematical models of embankment of slopes and recesses are presented. The proposed mathematical model is convenient to use for computer modeling of slopes, as well as for determining the line of intersection of slopes with the earth's surface.

Keywords: surface modeling, linear surfaces, geometry, construction, mining.

1. Введение

Земляные сооружения применяются довольно давно. Это плотины, каналы, дамбы (рис. 1), фортификационные сооружения; это – насыпи и выемки при строительстве и реконструкции автомобильных и железных дорог, насыпи и выемки в горнодобывающей промышленности (рис. 2, 3); откосы насыпей и выемок при возведении различных зданий и сооружений в промышленном и гражданском строительстве.



Рис. 1. Земляная насыпь плотины



Рис. 2. Карьер Южного горно-обогатительного комбината в г. Кривой Рог



Рис. 3. Карьер

Поверхностями, служащими откосами выемок и насыпей, являются линейчатые поверхности. Это хорошо видно по рис. 1–3.

Линейчатые поверхности используются в технике [2; 3; 7], в строительстве [9; 14; 15], в дизайне, в сельском хозяйстве в горнообработывающей промышленности [11]. Любая линейчатая поверхность [22; 23] может быть задана тремя направляющими (линиями и / или поверхностями) и тремя геометрическими условиями, характеризующими отношение образующей к этим направляющим. К геометрическим

условиям относятся: пересечение с направляющей линией, касание или пересечение под определенным острым углом с направляющей поверхностью.

В литературе по начертательной геометрии для строительных [1; 8; 10], транспортных, горных [6] и архитектурных вузов [4; 5; 18; 20] рассмотрение земляных сооружений находится в разделе проекций с числовыми отметками, однако там приводятся самые простые примеры [24].

В данной работе рассмотрим получение математической модели поверхности земляного сооружения на более высоком уровне: получим математическую модель линейчатой поверхности общего вида.

Имеется некоторая пространственная линия, которая принимается в качестве первой направляющей линейчатой поверхности земляного сооружения. Требуется создать математическую модель поверхности земляного сооружения.

2. Моделирование поверхности земляного сооружения

В [24] представлено моделирование поверхности откоса насыпи (выемки) при задании направляющей линии t в виде наклонной под углом ω прямой (рис. 4). В этом случае наклонную прямую t можно определить, как ∞^1 вершин T^i конусов вращения Ω^i с вертикальными осями. Огибающей поверхностью этого ∞^1 конусов вращения Ω^i будет плоскость Σ . Это ∞^1 конусов можно заменить на ∞^1 образующих прямых l^i , как показано на рис. 4. Для этого в некотором отдалении от вершины T^i проводим горизонтальную плоскость Π , которая пересекает направляющую прямую t в точке K , а сам конус вращения – по окружности m . Касательная KM к окружности m , проходящая через точку K , дает нам точку касания M^i . Тогда прямая T^iM^i с углом наклона φ будет являться искомой образующей l^i . Получающаяся в результате плоскость Σ является искомой плоскостью насыпи, а в случае, если вершина будет находиться ниже плоскости Π , – выемки проектируемого земляного сооружения.

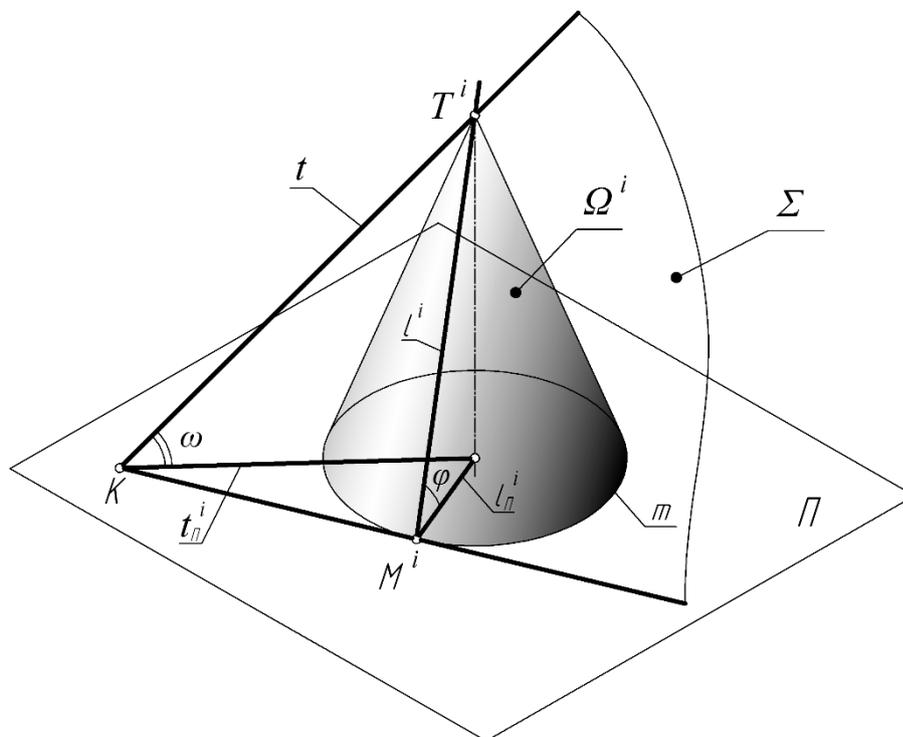


Рис. 4. Направляющая – прямая линия

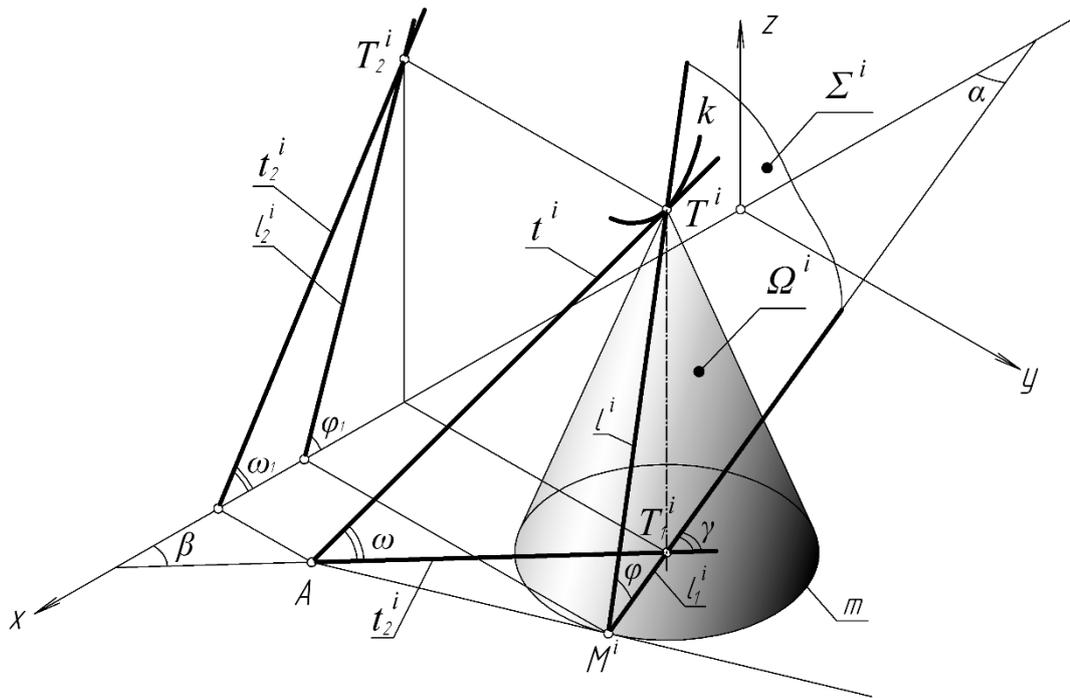


Рис. 5. Направляющая – пространственная кривая линия

Если перейти от рис. 4 к более общей картине формирования геометрической модели поверхности откоса земляного сооружения, то вместо направляющей прямой t берется направляющая пространственная кривая k (рис. 5). Конфигурация – та же самая. Только вместо направляющей прямой линии имеем кривую k , а касательная к ней прямая t^i в каждой точке T^i совместно с конусом вращения Ω^i с вершиной в той же точке T^i , имеющим угол наклона φ образующих к горизонтальной плоскости Π_1 дает нам единственную образующую $M^i T^i$. Эта образующая и будет искомой для получения поверхности земляного сооружения.

Как работает эта схема. Образующая l^i пересекает направляющую k , находится под углом φ ко второй направляющей – плоскости Π_1 и «касается» ∞^1 направляющих плоскостей Σ . Три направляющих, три геометрических условия фиксируют у ∞^4 прямых три параметра, оставляя ∞^1 прямых, т.е. линейчатую поверхность, которая и будет искомой.

Поскольку поверхность откоса является огибающей ∞^1 конусов вращения, возьмем в качестве образующей l^i одну из образующих конуса. Пусть высота конуса при этом для упрощения расчетов равняется единице ($|SS_1|=1$). Образующая конуса выбирается следующим образом. Вершина T^i конуса вращения (рис. 2) принадлежит направляющей k . Через вершину T^i проводится прямая t , касательная к направляющей k в точке T^i , и из точки A пересечения прямой t^i с плоскостью основания конуса Π_1 проводится прямая, касательная к его основанию m в точке M^i . Точка T^i и точка M^i определяют положение образующей откоса.

Пусть направляющая k является регулярной и, минимум, дважды дифференцируемой кривой и задана в R^3 в параметрическом виде:

$$\begin{cases} X_k = X_k(t); \\ Y_k = Y_k(t); \\ Z_k = Z_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

Определим обозначенные на рис. 5 углы α , β , γ и ω . Касательная к кривой (1) имеет вид:

$$\frac{X - X_k(t)}{X'_k(t)} = \frac{Y - Y_k(t)}{Y'_k(t)} = \frac{Z - Z_k(t)}{Z'_k(t)}, \quad (2)$$

поэтому углы β и ω_1 можно определить из выражений

$$\operatorname{tg} \beta = Y'_k(t)/X'_k(t); \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 = Z'_k(t)/X'_k(t). \quad (4)$$

Угол α (рис. 5) равен:

$$\alpha = \beta - \gamma. \quad (5)$$

Угол γ находим из отношения:

$$\cos \gamma = \frac{T_1^i M^i}{T_1^i A} = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Отсюда

$$\gamma = \arccos \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (6)$$

Найдем $\operatorname{tg} \omega$. Угол между прямой (5) и некоторой плоскостью (7)

$$AX + BY + CZ + D = 0 \quad (7)$$

определяется по формуле

$$\sin \omega = \frac{|AX'_k(t) + BY'_k(t) + CZ'_k(t)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{[X'_k(t)]^2 + [Y'_k(t)]^2 + [Z'_k(t)]^2}}. \quad (8)$$

В нашем случае определяем угол ω прямой t^i с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 , у которой $Z=0$, поэтому $A=0$, $B=0$, $C=0$. Тогда (8) имеет вид:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{[Z'_k(t)]^2}{[X'_k(t)]^2 + [Y'_k(t)]^2}}}. \quad (9)$$

Учитывая (3), (6) и (9) в (5), имеем:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{Y'_k(t)}{X'_k(t)} \right) - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{[Z'_k(t)]^2}{[X'_k(t)]^2 + [Y'_k(t)]^2} \operatorname{tg} \varphi}} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим математическую модель поверхности откоса. Примем систему (11) за ∞^4 прямых:

$$\begin{cases} Y=kX+l; \\ Z=mX+n. \end{cases} \quad (11)$$

Первое уравнение определяет положение горизонтальной проекции l_1^i образующей l^i или, что является тем же самым, положение вертикальной плоскости Σ^i (см. рис. 5). Второе уравнение определяет положение фронтальной проекции l_2^i образующей l^i поверхности земляного сооружения. Будем последовательно понижать параметраж множества прямых, заданного системой (11).

Определим уравнение ∞^1 плоскостей Σ^i , несущих образующие l^i и расположенных перпендикулярно к горизонтальной плоскости и под углом α к оси x :

$$Y = Y_k(t) + \operatorname{tg} \alpha [X - X_k(t)], \quad (12)$$

где

$$\alpha = f(\varphi, \omega, \beta) \quad (13)$$

Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} Y = Y_k(t) + \operatorname{tg} \alpha [X - X_k(t)], \\ Z = mX + n. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) определяет ∞^3 прямых, т.е. комплекс прямых. Параметрами в этом случае являются m , n и t .

Сравнивая системы (1) и (14), получаем $n = Z_b(t) - mX_b(t)$. Поэтому систему уравнений (14) можно записать:

$$\begin{cases} Y = Y_k(t) + \operatorname{tg} \alpha [X - X_k(t)], \\ Z = Z_k(t) + m [X - X_k(t)]. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) задает ∞^2 прямых (конгруэнцию), пересекающих направляющую k и принадлежащих ∞^1 плоскостей Σ^i (рис. 2). Параметрами множества являются m и t .

Из рис. 5 находим еще один параметр:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = m.$$

Подставляя полученное значение m в (15), имеем:

$$\begin{cases} Y = Y_k(t) + \operatorname{tg} \alpha [X - X_k(t)], \\ Z = Z_k(t) + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} [X - X_k(t)]. \end{cases} \quad (16)$$

Система уравнений (16) является математическим выражением ∞^1 прямых, т.е., моделируемой линейчатой поверхностью. Угол φ в этой системе связан с физико-механическими свойствами грунта, из которого образован откос, и изменяется по длине сооружения. Длину же сооружения в этом случае можно заменить на ее горизонтальную проекцию s_1 , поэтому, добавив в систему уравнений (16) значение (10) и выражение $\varphi = \varphi(s_1)$, где длина s_1 может быть определена по формуле (17):

$$s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2} dt, \quad (17)$$

получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = Y_k(t) + \operatorname{tg} \alpha [X - X_k(t)]; \\ Z = Z_k(t) + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} [X - X_k(t)]; \\ \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{Y'_k(t)}{X'_k(t)} \right) - \operatorname{arccos} \left(\operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \frac{[Z'_k(t)]^2}{[X'_k(t)]^2 + [Y'_k(t)]^2}} \right)^{-1}; \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\varphi = \varphi(s_1);$$

$$s_1 = \int_{t_1}^{t_n} \sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2} dt.$$

Система (18) является искомой математической моделью ∞^1 прямых – поверхности откоса.

Вывод

В результате теоретических изысканий была предложена геометрическая модель поверхности земляного сооружения, и разработана ее математическая модель, удобная для использования на компьютере.

На рассмотренном примере еще раз можно убедиться в верности предложенного закона образования линейчатых поверхностей: линейчатая поверхность задается тремя направляющими и тремя геометрическими условиями, характеризующими отношение образующей к этим направляющим [22; 23]. При этом предложенный закон образования линейчатой поверхности не противоречит общепризнанной теории параметрической геометрии.

Можно также в очередной раз убедиться в верности того, что именно начертательная геометрия является основой для аналитических выкладок [16], которые впоследствии становятся основой компьютерных программ [17], а поэтому недаром до революции 1917 г. в реальных училищах изучали начертательную геометрию в полном объеме [13; 19]. Тем более, что начертательная геометрия является, и никто этого не опроверг, теорией изображений [12; 21].

Литература

1. *Виницкий И.Г.* Начертательная геометрия [Текст] / И.Г. Виницкий. – М.: Высшая школа, 1975. – 280 с.
2. *Калашников С.Н.* Зубчатые колеса и их изготовление [Текст] / С.Н. Калашников, А.С. Калашников. — М.: Машиностроение, 1983. — 264 с.
3. *Камалов А.* Конструирование линейчатых поверхностей каркасно-параметрическим методом и их применение [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Самарканд, 1980.
4. *Климухин А.Г.* Начертательная геометрия [Текст] / А.Г. Климухин. — М.: Стройиздат, 1978. — 334 с.
5. *Короев Ю.И.* Начертательная геометрия [Текст] / Ю.И. Короев. – М.: КНОРУС, 2011. – 432 с.
6. *Ломоносов Г.Г.* Инженерная графика [Текст] / Г.Г. Ломоносов. – М.: Недра, 1984. – 287 с.
7. *Милосердов Е.П.* Расчет параметров конструкции и разработка алгоритмов реализации аналитических солнечных часов [Текст] / Е.П. Милосердов, М.А. Глебов // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 3. — С. 14–16. — DOI: 10.12737/2076.
8. *Пеклич В.А.* Начертательная геометрия [Текст] / В.А. Пеклич. – М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2007. – 272 с.
9. *Подгорный А.Л.* Конструирование поверхностей оболочек по заданным условиям на основе выделения их из конгруэнций прямых [Текст] / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. — 1969. — Вып. 8. — С. 17–28.
10. *Русскевич Н.Л.* Начертательная геометрия [Текст] / Н.Л. Русскевич. – Киев: Вища школа, 1978. – 312 с.
11. *Сальков Н.А.* Геометрическая составляющая технических инноваций [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 85–94. — DOI: 10.12737/article_5b55a5163fa053.07622109.
12. *Сальков Н.А.* Искусство и начертательная геометрия [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2013. – Т. 1. – № 3–4. – С. 3–7. – ОI: 10.12737/2123.
13. *Сальков Н.А.* Курс начертательной геометрии Гаспара Монжа [Текст] / Н.А. Сальков //

- Геометрия и графика. – 2013. – Т. 1. – № 3–4. – С. 52–57. – ОI: 10.12737/2135.
14. Сальков Н.А. Моделирование автомобильных дорог [Электронный ресурс] / Н. А. Сальков. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 120 с.
 15. Сальков Н.А. Моделирование геометрических форм автомобильных дорог: монография [Текст] / Н.А. Сальков. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 162 с.
 16. Сальков Н.А. Начертательная геометрия — база для геометрии аналитической [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 1. — С. 44–54. — DOI: 10.12737/18057.
 17. Сальков Н.А. Начертательная геометрия — база для компьютерной графики [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 2. — С. 37–47. — DOI: 10.12737/19832.
 18. Сальков Н.А. Начертательная геометрия. Базовый курс [Текст]: учеб. пособие / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2013. — 184 с.
 19. Сальков Н.А. Начертательная геометрия до 1917 года [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 2. — С. 18–20. — DOI: 10.12737/780.
 20. Сальков Н.А. Начертательная геометрия. Основной курс [Текст] / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2014. — 235 с.
 21. Сальков Н.А. Начертательная геометрия — теория изображений [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 41–47. — DOI: 10.12737/22842.
 22. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 1 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 20–31. DOI: 10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078.
 23. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 14–27. DOI: 10.12737/article_5c9201eb1c5f06.47425839.
 24. Сальков Н.А. Формирование поверхностей откосов насыпей и выемок [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 1. — С. 55–63. — DOI: 10.12737/18058.