УДК 629.76/78.018.4:004.02
DOI: 10.12737/article_59353e29ed4b00.30059568

С.И. Досько, В.В. Киренков, В.Г. Микитенко

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

С точки зрения возможности использования принципа двойственности рассмотрена типовая обратная задача, часто возникающая при оценке состояния динамических систем по результатам их испытаний в режимах пассивного эксперимента, в частности при их штатной эксплуатации. Показано, что при решении типовых обратных задач оценки результатов испытаний возможно и целесообразно использование методологии двойственности с аналогичными задачами теории оптимального управления.

**Ключевые слова**: двойственность, квадратичный критерий, обратная задача, динамическая система, автоматическое регулирование.

S.I. Dosko, V.V. Kirenkov, V.G. Mikitenko

# DUALITY PRINCIPLE USE AT SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS OF TEST RESULT ASSESSMENT

The purpose of this work was a consideration of one of possible ways to improve methodologies for the solution of standard inverse problems on the basis of dual method attraction in the solution of the other applied problem considered in the theory of optimum management. As a reason for such an approach, according to the authors, is that both problems (identification and management) possess reciprocal duplicity as pursue an end object identical from the mathematical point of view - definition of the extremum of a certain functional. When such a functional is accepted in a quadratic form appears a possibility to pass from numerical approximate methods of solution to analytical ones. From the stand point of the possibility to use this principle in this paper there is considered a standard inverse problem often arising at the assessment of dynamic systems states according to the results of their tests in modes of a passive experiment, in particular, at their normal operation. It is shown that at the solution of standard inverse problems of the assessment of test results it should be possible to use purposefully the methodologies of duality with analogous problems of the theory of optimum management. The approaches considered in the paper passed practical realization at the solution of some inverse problems.

**Key words**: duplicity, quadratic criterion, inverse problem, dynamic system, automatic control.

## Введение

Термин «двойственность» уже давно употребляется для подчеркивания идентичности каких-либо задач и проблем в смежных научно-технических задачах. Возможно, наиболее ярким примером огромного научно-технического эффекта от обращения к этому принципу является решение следующей классической задачи механики, поставленной еще во времена Ньютона. Речь идет о проблеме инертной и гравитационной массы, двойственность которой, как показал А.Эйнштейн, следует из эквивалентности гравитации и ускорения, что и легло в основу созданной им общей теории относительности.

Принцип двойственности может использоваться и при обработке и интерпретации опытных данных, в частности при решении возникающих при этом обратных некорректно поставленных задач. Таким задачам всегда уделялось большое внимание как в теоретическом, так и в практическом плане. Раздел прикладной математики, посвященный их решению, появился сравнительно недавно (в середине прошлого века). Это направление, основоположником которого является школа академика

А.Н.Тихонова, на сегодняшний день считается незаконченным и требующим дальнейшего совершенствования, о чем свидетельствует постоянно увеличивающийся поток литературы по данным вопросам [1; 2; 5].

Одним из возможных путей совершенствования методологии решения типовых обратных задач и является привлечение для этого двойственных методов решения другой прикладной задачи, рассматриваемой в теории оптимального управления. Основанием для такого подхода является то, что обе задачи (идентификации и управления) обладают взаимной двойственностью, ибо преследуют идентичную с математической точки зрения конечную цель - нахождение экстремума (min или max) функционала от каких-то характеристик (обычно невязок) решаемой задачи. Когда такой функционал принимается в квадратичном виде, появляется возможность перейти от численных приближенных методов решения к аналитическим.

В настоящей статье рассматривается с этой точки зрения типовая обратная задача, часто возникающая при интерпретации результатов испытаний динамических систем.

## 1. Математическая модель контролируемой системы

Традиционная форма математических моделей объектов или процессов, подлежащих испытаниям и последующей идентификации их параметров, обычно представляется в следующем виде (форма Коши):

$$\dot{X} = f(X,U,F), \tag{1}$$

где *X(t)* – *n*-мерный вектор состояния; *U(t)* – *m*-мерный вектор управления; *F(t)* – *p*-мерный вектор возмущений.

Весьма желательной, если возможно, является линеаризация этой модели посредством ее представления в отклонениях от опорного программного движения. Тогда соотношение (1) может быть записано в следующем стандартном, в частности для теории оптимальных процессов, виде:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X + B(t)\cdot U + D(t)\cdot F, \tag{2}$$

где $A(n \times n)$ - квадратная матрица, определяющая изменение состояния нестационарной линейной системы; $B(n \times m)$, $D(n \times p)$ - матрицы управляющих *U* и возмущающих *F* воздействий соответственно.

Целесообразность перехода от формы (1) к форме (2) обусловлена тем, что к настоящему времени для линейных динамических систем разработаны методы решения задач оптимального управления [2-4], охватывающие различные критерии качества. Этого, к сожалению, нельзя сказать о нелинейных системах.

## 2. Классический метод решения задачи идентификации

Одной из основных задач идентификации состояния динамической системы является определение действующих на неё возмущений (внешних воздействий). Остановимся сначала на методологии решения подобной задачи, прибегая к классическому методу решения обратных задач. В общем случае такие задачи ставятся в форме операторных уравнений $AF=X$ , где *F* – подлежащее оценке входное воздействие, *X* – вектор выходных параметров.

Подобное соотношение для стационарной линейной системы имеет в общем случае следующий вид [2; 3]:

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}DF(\tau)d\tau \text{ или } \int_0^t e^{A(t-\tau)}DF(\tau)d\tau = X(t) - e^{At}X(0). \tag{3}$$

Таким образом, оператор *A* соотношения (3), связывающий текущие значения координат системы *X(t)* и возмущающее воздействие *F(t)*, является интегральным, т.е. принадлежит к так называемым вполне непрерывным операторам. Обратные задачи такого типа в общем случае являются существенно некорректно поставленными, решение которых (когда не представляется возможным использовать метод квазирешений) требует применения численных методов последовательных приближений.

Рассмотрим, как можно преодолеть эти трудности, используя методы решения одной из задач теории оптимального управления.

## 3. Методы теории оптимального управления и возможность их применения для решения обратных задач

Среди разработанных методов теории оптимальных процессов с квадратичным критерием качества есть решение так называемой задачи слежения [2; 3]. Математическая модель нестационарной линейной системы и измерений при решении этой задачи задается в форме, идентичной приведенной в первом разделе:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X + B(t)\cdot U, \tag{4}$$

$$Y(t) = C(t)\cdot X\ .$$

Задачей слежения является определение и реализация вектора управления *U(t)*, который обеспечит отслеживание системой желаемого выходного сигнала *Z(t)*. Такая задача имеет аналитическое решение при использовании следующего квадратичного критерия качества относительно невязки (вектора рассогласования) $e(t) = Z(t) - Y(t)$:

$$I = \frac{1}{2}\cdot\int_0^T [e(t)^T\cdot Q(t)\cdot e(t) + U(t)^T\cdot R(t)\cdot U(t)]dt,$$

где $Q(t), R(t)$ - положительно определенные матрицы размерности $n\times n$ и $m\times m$.

Показано [2; 3] , что исходя из классического принципа Л.С.Понтрягина (принципа максимума) оптимальное управление при таком критерии качества должно формироваться в виде суммы двух составляющих, первая из которых линейно зависит только от текущего состояния системы (вектора $X$ ), а вторая - только от значения желаемого выхода системы *Z(t)* как в текущий момент времени, так и в будущем, т.е:

$$U(t) = -H(t)\cdot X + \omega(t). \tag{5}$$

Оптимальный закон управления, следовательно, является синтезом законов управления двух систем: следящей системы с отрицательной обратной связью (первый член) и программного управления, зависящего только от *Z(t)* (второй член).

Остановимся теперь на том, как методология решения такой задачи оптимального управления может быть использована для решения рассматриваемой здесь обратной задачи - идентификации входных воздействий *F(t)*. Прежде всего отметим, что для большинства динамических систем с обратными связями, если последние можно считать линейными, деление параметров на фазовые координаты и управляющие воздействия является условным. Перенося с учетом этого управляющие воздействия *U(t)* в соотношениях (1) и (2) в состав фазовых координат и формируя таким образом расширенный вектор состояния $X(n{+}m,1)$ с расширенной матрицей $A(n{+}m\times n{+}m)$, придем к соотношению вида (4), а именно:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X + D(t)\cdot F,$$

$$Y(t) = C(t)\cdot X. \tag{6}$$

Здесь под $F$ нужно понимать не вектор возмущений, а вектор управления, подлежащий определению. Вектор измерений *Y(t)*, в который входят и управляющие воздействия *U(t)*, может теперь пониматься как желаемый выход системы *Z(t)*, и задача идентификации входного воздействия сводится, таким образом, к рассмотренной выше и решенной в теории оптимального управления задаче слежения.

Предполагается, что сформированная таким образом расширенная нестационарная линейная система, как и исходная система (4), является вполне наблюдаемой. Для многих технических систем, в частности бортовых систем РКТ, это предположение может считаться оправданным. Значения коэффициентов соотношения (5) для вектора $F$ - матрицы $H(t)$ и вектора $\omega(t)$ с размерностями $n+m\times n+m$ и $n+m\times 1$ соответственно - определяются с учетом этого решением следующих сопряженных относительно исходных (6) матричных дифференциальных уравнений [2; 3]:

$$\begin{aligned}
&H = R^{-1}D^T S, \omega = -R^{-1}D^T g;\\
&\dot{S} = -SA - A^T S + SDR^{-1}D^T S - C^T QC,\\
&\dot{g} = -(A^T - SDR^{-1}D^T)g + C^T QY,\\
&S(t_k) = 0, g(t_k) = 0;\\
&F = -R^{-1}D^T(SX + g),\\
&X(t_0) = -S^{-1}(t_0)g(t_0).
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $S(t)$ - матрица размерности $n+m\times n+m$; $g(t)$ - вектор размерности $n+m\times 1$.

Система (7) совместно с исходной системой (6) полностью определяет решение задачи. Процедура состоит в интегрировании сопряженных уравнений для $S$ и $g$ в обращенном времени ($t$ =-$\tau$) и последующем интегрировании в прямом времени исходной системы с одновременным вычислением $F(t)$ по пятому соотношению из (7).

Рассмотренная методология, основанная не на численных методах, а на прямой и обратной прогонке уравнений (6) и (7), имеет несомненные преимущества по сравнению с классическими методами решения такого типа обратных задач. На её основе разработано универсальное математическое обеспечение для определения входных воздействий, действующих на динамическую систему [6].

## 4. Модельный пример

Приведем пример решения задачи идентификации динамической системы управления рассмотренным методом. В качестве модели динамической системы взята система третьего порядка, описывающая работу типового автомата угловой стабилизации (АС) ракетного блока по каналу вращения [7]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi} = -C_{\varphi\delta}\delta + M_{\hat{a}}\\
&\tau\dot{\delta} + \delta = a_0\varphi + a_1\dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{8}$$

где $C_{\varphi\delta}$ ($гр/с^2$) - эффективность управляющих органов; $\varphi(гр)$ - угол отклонения изделия по вращению; τ(с) - приведенное запаздывание АС; $M_в(гр/с^2)$ - подлежащий оценке возмущающий момент. В соответствии с (4) приведем эту систему к канонической форме, обозначив

$$\varphi = X_1; \dot{\varphi} = X_2; \delta = X_3; M_{\hat{a}} = X_4. \tag{9}$$

Дополнив систему (9) соотношением $\dot{X}_4 = U$, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
&\dot{X}_1 = X_2\\
&\dot{X}_2 = -C_{\varphi\delta}X_3 + X_4\\
&\dot{X}_3 = \frac{1}{\tau}(a_0X_1 + a_1X_2 - X_3)\\
&\dot{X}_4 = U.
\end{aligned}$$

В матрично-векторной форме, соответствующей (6), будем иметь:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{\varphi\delta} & 1 \\ \frac{a_0}{\tau} & \frac{a_1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Результаты расчетов для варианта единичного ступенчатого воздействия приведены на рисунке.

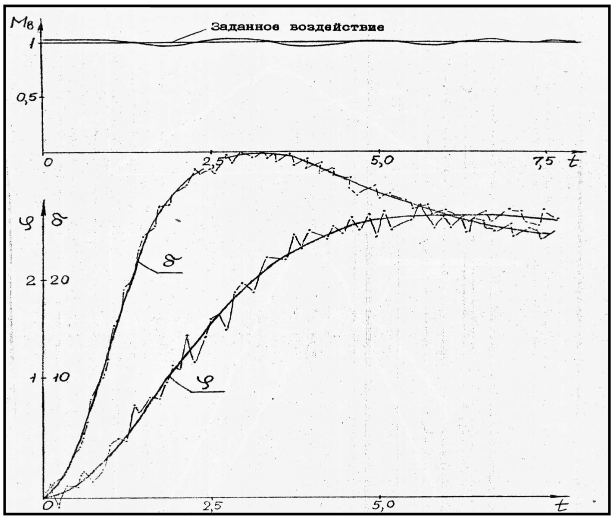


Рис. Восстановление входного воздействия АС

При моделировании системы (8) было принято, что имеются только традиционные для такой системы измерения по координатам $X_1=\varphi$ и $X_3=\delta$, т.е.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

По данным моделирования для различных вариантов воздействия $M_в$ формировался зашумленный вектор $Y(t)=CX+V$, где в качестве $V$ принимался гауссовский шум с корреляционной матрицей $K_v=\sigma^2 I$ ($I$ - единичная матрица).

Можно отметить практическое совпадение заданных (модельных) и восстановленных значений как внешнего воздействия $М_в$, так и параметров модели $\varphi$ и $\delta$.

## Заключение

Итак, показано, что при решении типовых обратных задач оценки результатов испытаний возможно и целесообразно использование методологии двойственности с аналогичными задачами теории оптимального управления. Рассмотренные в статье подходы прошли практическую реализацию при решении некоторых обратных задач. Не исключено, что помимо рассмотренных в статье примеров найдутся и другие обратные задачи, где окажется возможным эффективное использование таких подходов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1974.
2. Брайсон, А. Прикладная теория оптимальных процессов / А. Брайсон, Хо Ю-ши. - М.: Мир, 1972.
3. Ройтенберг, Я.И. Автоматическое управление / Я.И. Ройтенберг. - М.: Наука, 1978.
4. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. - М.: Физматгиз, 1961.
5. 5. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибир. науч. изд-во, 2009.
6. Киренков, В.В. Типовые обратные задачи и методы их решения при оценке результатов испытаний изделий ракетно-космической техники / В.В. Киренков, С.И. Досько // Сборник научных трудов РКК «Энергия» им. С.П. Королева. Сер. XII. - 2014. - Вып. 3.
7. Колесников, К.С. Динамика ракет / К.С. Колесников. - М.: Машиностроение, 1980.

1. Tikhonov, A.N. *Methods for Incorrect Problem Solution* / A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. - M.: Science, 1974.
2. Braison, A. *Applied Theory of Optimum Processes* / A. Braison, Ho Yu-Shi. - M.: World, 1972.
3. Toitenberg, Ya.I. *Automatic Management* / Ya.I. Roitenberg. - M.: Science, 1978.
4. Pontryagin, L.S. *Mathematical Theory of Optimal Processes* / L.S. Pontryagin [et al.]. - M.: Physmathgiz, 1961.
5. Kabanikhin, S.I. *Inverse and Ill-posed Problems* / S.I. Kabanikhin. - Novosibirsk: Siberian Scientific publishing House, 2009.
6. Kirenkov, V.V. Standard inverse problems and methods for their solution at assessment of product test results of aerospace engineering / V.V. Kirenkov, S.I. Dosko // *Proceedings of Korolyov ASC "Energy". Set XII.* - 2014. - Ed. 3.
7. Kolesnikov, K.S. *Rocket Dynamics* / K.S. Kolesnikov. - M.: Mechanical Engineering, 1980.



*Статья поступила в редколлегию 23.03.17.*
*Рецензент: д.т.н., профессор*
*Шептунов С.А.*


**Сведения об авторах:**


**Досько Сергей Иванович,** с.н.с. Института конструкторско-технологической информатики РАН, e-mail: dosko@mail.ru.
**Киренков Вениамин Васильевич,** к.т.н., в.н.с. РКК «Энергия» им. С.П. Королева, e-mail: post@rsce.ru.

**Микитенко Валериан Григорьевич**, зам. нач. отдела РКК «Энергия» им. С.П. Королева, e-mail: valerian.mikitenko@rsce.ru.

**Dosko Sergey Ivanovich,** s.s.r. Institute of Design-Technological Informatics of the RAS, e-mail: dosko@mail.ru.
**Kirenkov Veniamin Vasilievich,** Can. Eng., l.r. Korolyov ASC "Energy", e-mail: post@rsce.ru.

**Mikitenko Valerian Grigorievich**, Deputy-chief of the Dep., Korolyov ASC "Energy", e-mail: valerian.mikitenko@rsce.ru.