Разбиение сферы на равномерные участки

Splitting a sphere into uniform sections

Милосердов Е.П.
канд. техн. наук, доцент кафедры Конструирования и графики Ивановского государственного энергетического университета имена В.И. Ленина
e-mail: mepal@mail.ru

Miloserdov E.P.
PhD of Engineering, Associate Professor at the Chair of Construction and Graphics, Ivanovo State Power University
e-mail: mepal@mail.ru

Баранов А.Ю.
студент Ивановского государственного энергетического университета имена В.И. Ленина
e-mail: tom.9997@mail.ru

Baranov A. Yu.
student of Ivanovo State Power University
e-mail: tom.9997@mail.ru

Горохов Д.И.
студент Ивановского государственного энергетического университета имена В.И. Ленина
e-mail: 18444@gapps.ispu.ru

Gorokhov D.I.
student of Ivanovo State Power University
e-mail: 18444@gapps.ispu.ru

Аннотация
В статье рассмотрена методика разбиения сферы на равномерные участки, полученных на основе вписанных в сферу правильных и полуправильных многогранников, построении сферических треугольников и построении точек с использованием картографических проекций.
Ключевые слова: разбиение сферы, многогранники, сферические треугольники, картографические проекции.

Abstract
The article considers the method of dividing a sphere into uniform sections obtained on the basis of regular and semi-regular polyhedra inscribed in the sphere, the construction of spherical triangles, and the construction of points using map projections.
Keywords: the breaking of the sphere, polyhedrons, spherical triangles, map projection

Задача равномерного распределения точек на сфере имеет очень долгую историю. Она имеет критическую важность во многих областях математики, физики, геодезии и картографии, в том числе в вычислительных методах, теории приближений, кристаллографии, электростатике, компьютерной графике и мн. др. Точное решение задачи разбиения сферы на равномерные участки можно получить, если вписать в сферу правильный многогранник. Правильные многогранники привлекают пристальный интерес ученых с древности по настоящее время [1, 2], и рассматриваемая в данной работе задача – лишнее тому подтверждение.

В первую очередь, рассмотрим правильные многогранники – Платоновы тела: из таких многогранников представляют интерес икосаэдр и додекаэдр.

Если рассмотреть другие перспективные многогранники, то имеет смысл использовать так называемые полуправильные многогранники (Архимедовы и Каталановые тела) [3].

Полуправильные многогранники относятся к трем различным группам. Первая группа состоит из 13 полиэдров (тела Архимеда), получаемых из правильных тел усечением их вершин (кроме ромбокубоктаэдра); из них первые пять представляют существенный интерес применительно к кристаллическим решеткам атомов в периодических неорганических кристаллах; тогда как остальные восемь имеют меньшее значение.

Другие две группы полуправильных многогранников представлены призмами и антипризмами. Призмы имеют в качестве верхнего и нижнего основания пару параллельных граней в форме правильных n-угольников (в идеальном случае – правильных) и, кроме того, n вертикальных квадратных граней. Таким образом, гексаэдр может быть также отнесен и к этому классу. У антипризм, которые могут быть получены из соответствующих n-гональных призм вращением верхнего основания относительно нижнего на угол , n квадратных граней заменяются на $2n$ треугольных граней. Из правильных многогранников к антипризмам можно отнести октаэдр (используя одну из треугольных граней в качестве нижнего основания).

Известен также ряд полиэдров, которые дуальны по отношению к архимедовым телам, призмам и антипризмам и соответствуют полуправильным полиэдрам. Эти многогранники называют телами Каталана, который описал их в 1865 г. (хотя первым в 1830 г. вывел дуальные к телам Архимеда многогранники И. Гессель, но, как и многие его другие труды, эта работа оказалась в то время не востребована).

С точки зрения аппроксимации сферы из Каталановых многогранников особую роль играют симметричные многогранники – ромбододекаэдр (многогранник, дуальный кубоктаэдру) и бипирамиды (многогранники, дуальные n-гональным призмам).

Можно предложить критерий, по которому можно оценить качество аппроксимации поверхности сферы: отношение диаметров вписанной и описанной вокруг многогранника сферы. В соответствии с этим критерием рассмотрим разные виды многогранников, наиболее подходящие для аппроксимации сферы [3]. Для икосаэдра отношение радиусов вписанной и описанной сферы: 0,94 для додекаэдра 0,78.

Если рассмотреть другие перспективные многогранники и использовать так называемые полуправильные многогранники (Архимедовы и Каталановы тела), то из них, прежде всего, следует рассмотреть тетракисгексаэдр и усеченный додекаэдр (рис. 1).

Для тетракисгексаэдра отношение радиусов вписанной и описанной сфер примерно совпадает с икосаэдром: 0,94, для усеченного додекаэдра – 0,835.

Результаты расчетов показывают, что использование икосаэдра дает наилучший результат аппроксимации при моделировании поверхности сферы.

Рис. 1. Выпуклые многогранники для аппроксимации сферы

20-ти-гранная аппроксимация сферы не слишком точна и ее изображение напоминает сферу только при небольшом размере. Есть простой путь для увеличения точности аппроксимации. Допустим, имеется вписанный в сферу икосаэдр. Разобьем каждую грань икосаэдра на 4 равносторонних треугольника. Новые вершины будут лежать внутри сферы, поэтому их надо «приподнять» на поверхность (умножить на такое число, чтобы их радиус-векторы стали равны 1 – это достигается при переходе от декартовых координат точек к сферическим при заданном радиусе сферы). Этот процесс разбиения можно продолжать до достижения требуемой точности. На рис. 2 показаны поверхности из 20, 80 и 320 треугольников.

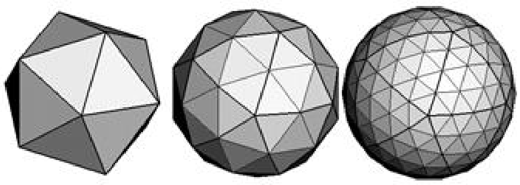

Рис. 2. Выпуклые многогранники для аппроксимации сферы, полученные из икосаэдра

В ходе исследований для многогранников рис. 1 разработаны твердотельные модели, а для многогранников рис. 2 разработаны визуализации.

К сожалению, за исключением нескольких особых случаев (а именно Платоновых тел) невозможно идеально ровно распределить точки на сфере.

Существует методика разбиения сферы на совокупность практически одинаковых участков, основанная на разделении правильного многоугольника, полученного в результате точного решения на одинаковые части, для которых могут быть построены соответствующие сферические многоугольники на поверхности сферы [4]. Для многих случаев затруднительно найти точки на сфере, позволяющие построить такие сферические многоугольники. Предлагается методика разбиения поверхности, основанная на простом рекурсивном алгоритме, позволяющем получить необходимое число точек разбиения сферы. В качестве конкретного примера целесообразно взять точное решение на основе икосаэдра, грань которого является правильным треугольником. Будем считать, что вершины одной из граней нам известны с точностью до произвольного заданного угла поворота икосаэдра относительно заданной системы координат в декартовой системе координат.

Постановка задачи

Требуется создать регулярное покрытие сферы треугольниками, близкими по размеру и форме. В качестве эталона примем сетку, образованную на плоскости равносторонними треугольниками. Вначале рассмотрим алгоритм построения сетки в базовом сферическом треугольнике. Затем уделим внимание различным способам разделения сферы на базовые сферические треугольники. Наконец, представим пример создания треугольной сетки на основе икосаэдра.

По приведенным значениям определяется средняя точка, которая разделяет треугольник точного решения на четыре треугольника. На следующем этапе находятся координаты еще трех точек, которые хотя и не являются точным разбиением сферы, однако достаточно близки к нему. При дальнейшем продолжении разбиения равномерность существенно ухудшается, хотя если продолжать рекурсивную процедуру только с новым поколением точек, она остается, сравнимая с другими алгоритмами.

Генерация сетки в сферическом треугольнике

Процедуру создания на некоторой поверхности сетки треугольников обычно называют триангуляцией. В качестве базы для создания сетки используем некоторый сферический треугольник, заданный координатами своих вершин.

Метод бисекции

Назовём бисекцией операцию деления исходного треугольника на четыре треугольника нового поколения (рис. 3). Собственно, термин «бисекция» относится к делению сторон пополам.

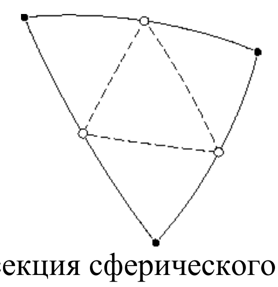

Рис. 3. Бисекция сферического треугольника

В середины рёбер вставляются новые вершины (белые точки на рисунках), которые соединяются новыми рёбрами (пунктирные линии), образующими новые треугольники. Следующее поколение получается очередной бисекцией.

Метод трисекции

Можно сразу провести разделение сферического треугольника на 9 треугольников, применяя трисекцию (рис. 4).

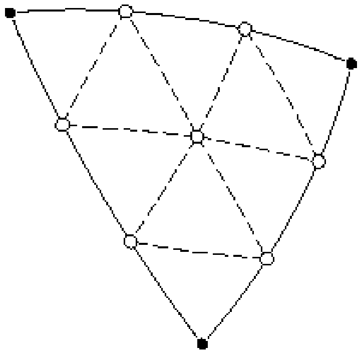

Рис. 4. Трисекция сферического треугольника

В терминах геометрии на сфере задача вставки точек в стороны треугольников решается последовательным решением обратной и прямой геодезических задач [5]. Однако в данном случае гораздо проще использовать векторную алгебру [6]. Пусть концы стороны заданы векторами a и b; тогда средняя точка f вычисляется как их нормированная сумма:

$$f = \frac{a + b}{|a + b|}$$

Для получения значений координат точек следует использовать соотношения:

– Преобразования сферических координат в декартовы:

$$x = \cos\varphi\cos\lambda$$

$$y = \cos\varphi\sin\lambda$$

$$z = \sin\varphi$$

– Преобразования декартовых координат в сферические:

$$\lambda = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Для разбиения сферы был использован вписанный в сферу икосаэдр. Одна из граней икосаэдра была разбита на 36 равносторонних треугольников. Новые вершины будут лежать внутри сферы, поэтому их надо «приподнять» на поверхность (см. выше). Этот процесс разбиения можно продолжать до достижения требуемой точности. На рис. 5 показано разбиение поверхности сферы с помощью вписанного в сферу икосаэдра.

Была построена модель разбиения сферы в соответствии с рассмотренной методикой.

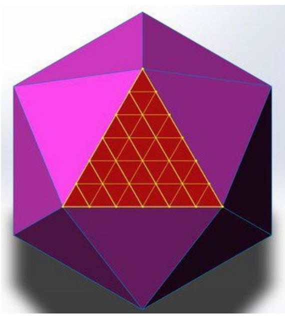

Рис. 5. Построение треугольников на грани вписанного в сферу икосаэдра

Особый класс задач разбиения сферы на равные участки – это задачи геодезии и картографии применительно к поверхности Земли. Эти задачи можно разделить на глобальные, когда поверхность разбивается на крупные участки – океаны, острова и континенты, и локальные, например, для установки вышек сотовой связи. При наличии карты с подходящей картографической проекцией можно получить точки разбиения участков земной поверхности прямо на карте.

Для глобальных задач наиболее подходят картографические проекции [7], которые дают равновеликие изображения земной поверхности при больших масштабах уменьшения, например, проекция Меркатора (за исключением приполярных областей) (рис. 6), которая имеет код *EPSG/WKID:3857*, иногда на нее также ссылаются, как на *EPSG:900913*. Принцип ее построения – это проекция на цилиндр, чья ось совпадает с географической осью Земли, проецирование происходит линиями, выходящими из центра планеты, от чего ошибка растяжения приполярных областей по горизонтали оказывается скомпенсирована пропорциональным растяжением по вертикали. Проблема с этим только в том, что карта получится слишком большой по вертикали, если попытаться отобразить и север Гренландии. Потому обычно отбрасывают 16° полярных областей (в равной пропорции или больше — с юга).

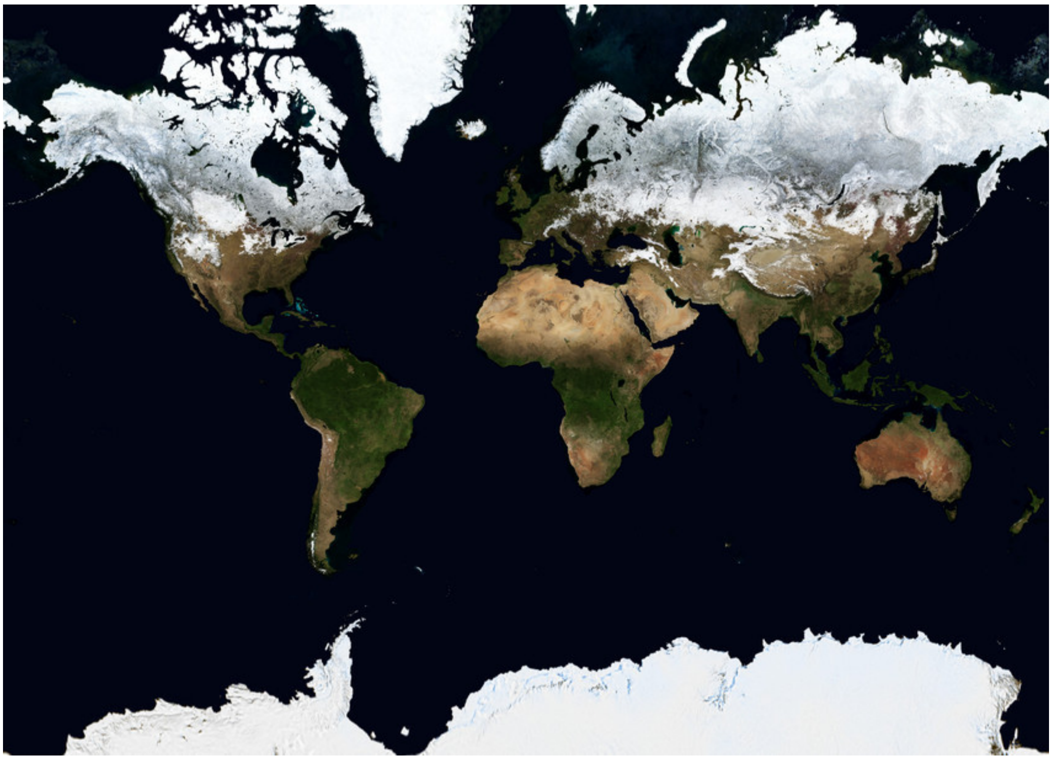

Рис. 6. Цилиндрическая проекция Меркатора (*Mercator*)

Может ли быть получена проекция, лучше сохраняющая такие свойства объектов, как форма, площадь, расстояния и углы? Законы геометрии не дают нам сохранить все эти свойства сразу, развернув круглую поверхность Земли на плоскость. Однако, для визуализации данных более всего важна эстетика и восприятие, а не сохранение свойств, как для навигационных или измерительных задач. Потому становится возможным подобрать такую проекцию, искажения в которой были бы равномерно распределены по свойствам. И таких проекций существует довольно много. Три самых известных, обладающих сходными свойствами, – это «Тройная проекция Винкеля» *Winkel Tripel WKID:54042 PROJ.4:wintri* (рис. 7), «проекция Робинсона» *Robinson projection WKID:54030 PROJ.4:robin*, «проекция Каврайского» (*Kavrayskiy projection*). Первая и последняя имеют визуально минимальные искажения, а неспециалисту, не видя градусной сетки, вообще весьма сложно различить их.

Как легко видеть, хотя искажение контуров и некоторое увеличение площади стран к полюсам здесь также наблюдаются, но это нельзя даже сравнивать с пропорциональным увеличением проекции Меркатора.

Самым молодым конкурентом этих проекций является проекция *Natural Earth* (рис. 8) – она представляет из себя гибрид проекций Каврайского и Робинсона, а ее параметры были подобраны группой американских, швейцарских и словенских специалистов в 2007 г., тогда как возраст большинства картографических проекций − не менее полувека.

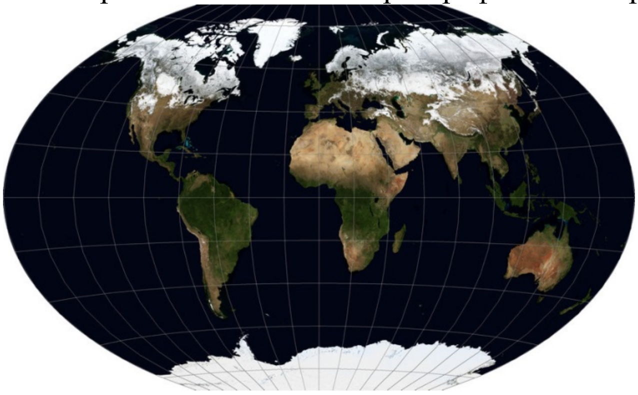

Рис. 7. Тройная проекция Винкеля

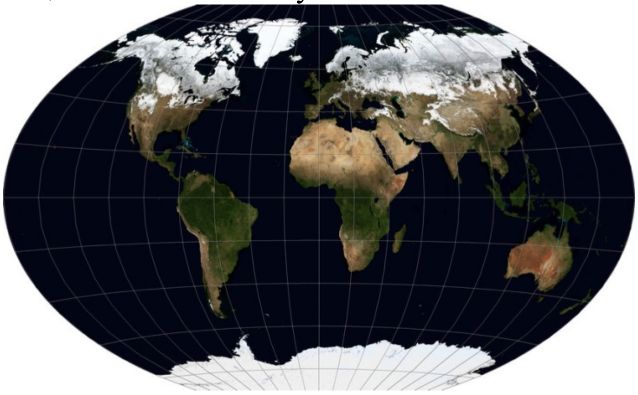

Рис. 8. Natural Earth PROJ.4:natearth

При решении локальных задач для небольших по площади районов задача выбора картографических проекций теряет актуальность, можно использовать разные равноугольные проекции, поскольку искажения площадей на малых территориях малоощутимы. Топографические карты России создают в поперечно-цилиндрической проекции Гаусса–Крюгера, поэтому лучше всего использовать именно эту проекцию (рис. 9).

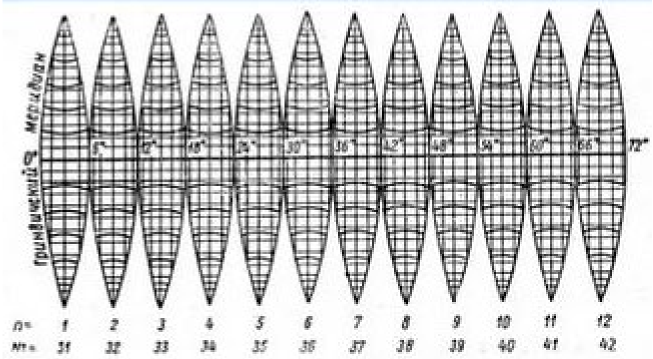

Рис. 9. Зоны проекций Гаусса – Крюгера

Выводы

1. Точное решение задачи разбиения поверхности сферы возможно на основе вписанных в сферу правильных многогранников – Платоновых тел, из которых, прежде всего, следует выделить икосаэдр. Для решения этой задачи с приемлемой точностью можно использовать и другие многогранники, например Архимедовы тела и тела Каталана.

2. Вписанные в сферу вершины икосаэдра являются опорными точками для дальнейшего разделения поверхности сферы. Для этого любую грань икосаэдра можно разделить на равносторонние треугольники, определить декартовы координаты точек и перейти к сферическим координатам.

3. На поверхности Земли для небольших по площади районов задачу разбиения можно решать непосредственно на картографической проекции. Для решения этой задачи с наибольшей точностью рекомендуется использовать наиболее распространенную проекцию Гаусса–Крюгера.

Литература

1. *Романова В.А.* Визуализация правильных многогранников в процессе их построения // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7, №1. – С. 55–67. – DOI: 10.12737/article_5c91ffd0916d52.90296375
2. *Васильева В.Н.* Золотые сечения и золотые прямоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. – 2019. – Т.7, №2. – С. 47–55. – DOI: 10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054

3. *Веннинджер М.* Модели многогранников. – Москва: Мир, 1974. – 240 с.
4. *Коксетер Г.С.М.* Введение в геометрию. – Москва: Наука,1966. – 648 с.
5. *Степанов Н.Н.* Сферическая тригонометрия. – М.–Л.: ОГИЗ, 1948. – 154 с.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – Москва: Наука, 1979. – 760 с.
7. *Вахрамеева Л.А., Бугаевский Л.М., Казакова З.Л.* Математическая картография. – Москва: Недра, 1986. – 286 с.