Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2022. № 2 (16). С. 61-71.
ISSN 2658-3488 print, ISSN 2658-6436 online
Automation and modeling in design and management. 2022. № 2 (16). P. 61-71.

Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 004.94
doi:10.30987/2658-6436-2022-2-61-71

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

Евгений Викторович Конопацкий [1], Оксана Александровна Шевчук [2]
[1, 2] Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
[1] e.v.konopatskiy@mail.ru
[2] o.a.shevchuk@donnasa.ru

Аннотация. *Работа посвящена развитию методов многомерной интерполяции и аппроксимации для численного решения дифференциальных уравнений и разработки компьютерных моделей напряжённо-деформированного состояния металлических конструкций. Её ядром служит принципиальный вычислительный алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов на регулярных и нерегулярных сетях. На его основе проведены вычислительные эксперименты по численному моделированию напряжённо-деформированного состояния эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов, формирующие комплекс программного обеспечения, реализованного в интерпретаторе Maple. При этом усовершенствовано дифференциальное уравнение моделирования напряжённо-деформированного состояния упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа напряжённо-деформированного состояния цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и предложен новый подход к учёту начальных условий дифференциального уравнения, который заключается в параллельном переносе численного решения в точку, координаты которой соответствуют начальным условиям. Преимуществом предложенного подхода численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов является то, что он позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами по аналогии с изогеометрическим методом.*

Ключевые слова: компьютерная модель, геометрический интерполянт, дифференциальное уравнение, численное решение, напряжённо-деформированное состояние, металлоконструкции

Для цитирования: Конопацкий Е.В., Шевчук О.А. Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния металлоконструкций с помощью геометрических интерполянтов // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2022. №2 (16). С. 61-71. doi: 10.30987/2658-6436-2022-2-61-71.

Original article
Open Access Article

NUMERICAL SIMULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF METAL STRUCTURES USING GEOMETRIC INTERPOLANTS

Evgeny V. Konopatskiy[1], Oksana A. Shevchuk[2]
[1, 2] The Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture
[1] e.v.konopatskiy@mail.ru
[2] o.a.shevchuk@donnasa.ru

Abstract. *The work is devoted to carrying out multidimensional interpolation and approximation methods for the numerical solution of differential equations and computer model development of the stress-strain state of metal structures. The core of the work is a fundamental computational algorithm for the numerical solution of differential* *equations using geometric interpolants on regular and irregular networks. On its basis, computational experiments are carried out on numerical simulation of the stress-strain state of operated reservoirs for storing petroleum products, which form a software package implemented in the Maple interpreter. At the same time, the differential equation for modelling the stress-strain state of an elastic cylindrical shell under axisymmetric loading is improved for the numerical analysis of the stress-strain state of a cylindrical reservoir with geometric imperfections. Also a new approach is proposed to take into consideration the initial conditions of the differential equation, which consists of parallel transfer of the numerical solution to the point, its coordinates correspond to the initial conditions. The advantage of the proposed approach for the numerical solution of differential equations using geometric interpolants is that it eliminates the need to coordinate geometric information in the process of interaction between CAD and FEA systems, by analogy with the isogeometric method.*

Keywords: *computer model, geometric interpolant, differential equation, numerical solution, stress-strain state, metal structures*

For citation: Konopatskiy E.V., Shevchuk O.A. Numerical simulation of the stress-strain state of metal structures using geometric interpolants. Automation and modeling in design and management, 2022, no. 2 (16). pp. 61-71. doi: 10.30987/2658-6436-2022-2-61-71.

Введение

В строительстве широкое распространение получили металлические конструкции зданий и сооружений самой разнообразной формы. Форма конструкции является определяющей для выполнения расчётов на прочность и устойчивость. Принципы выполнения расчётов практически всегда одинаковы. Сначала необходимо смоделировать форму конструкции, а потом уже сделать её расчёт на прочность и устойчивость. При этом получается так, что инженер выполняет построение модели металлоконструкции в одном программном пакете, а расчёт на прочность и устойчивость необходимо реализовать в другом. Согласование разнотипных компьютерных моделей для инженера строителя является достаточно серьёзной проблемой, поскольку он не является специалистом в области программной инженерии. Производители программных продуктов об этой проблеме знают и совершенствуют инструменты импорта и экспорта геометрической информации в расчётные пакеты. Вместе с тем, учитывая возрастающую сложность геометрической формы конструкции, бывают случаи, когда такой импорт просто невозможен. Выходом из сложившейся ситуации является использование изогеометрического метода расчёта [1 – 4], в основе которого лежит концепция о том, что один и тот же набор функций используется для создания геометрии тела и аппроксимации решения на конечных элементах.

При этом зачастую используются не непрерывные функции, а кусочно-полиномиальные, что усложняет анализ полученных результатов Родственная идея используется в методе численного решения дифференциальных уравнений (ДУ) с помощью геометрических интерполянтов [5 – 7], основанного на геометрической теории многомерной интерполяции [8 – 10], реализованной в точечном исчислении (другое название – БН-исчисление) [11 – 13]. Реализация в точечном исчислении геометрических алгоритмов определения многомерных объектов, проходящих через наперёд заданные точки, координаты которых соответствуют исходным экспериментально статистическим данным, и получивших название геометрических интерполянтов, позволила решить многие инженерные задачи в области моделирования геометрических объектов, твердотельного моделирования, моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явлений, научной визуализации и сравнения многомерных геометрических объектов. Исходя из вышеизложенного развитие методов многомерной интерполяции и аппроксимации для компьютерного моделирования напряжённо-деформированного состояния (НДС) металлоконструкций с помощью геометрических интерполянтов является актуальной научной задачей.

Общий подход к численному решению ДУ с помощью геометрических интерполянтов

Метод численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов можно отнести к категории методов конечных суперэлементов [14 – 16], применяемых для решения широкого круга инженерных и прикладных задач. Особенностью предложенного метода является то, что в качестве аппроксимирующей функции используется геометрический интерполянт – геометрический объект, проходящий через наперёд заданные точки – узлы интерполяции. Таким образом, многомерный геометрический интерполянт представляет собой суперэлемент, включающий информацию как о геометрических, так и о физических характеристиках объекта. Только в данном случае узлы интерполяции заранее неизвестны. Они вычисляются из условия соответствия исходному ДУ. Соответствие промежуточных точек исходному ДУ обеспечивается за счёт интерполяции. Таким образом, чем больше узлов интерполяции, тем ближе геометрический интерполянт к искомому численному решению ДУ. Такой подход по аналогии с изогеометрическим методом, предложенным Томом Хьюзом, позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами.

Для решения ДУ выбор геометрического интерполянта зависит от размерности пространства лапласиана [17]. В классической литературе оператор Лапласа – дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ. В n-мерном пространстве этот оператор функции U ставит в соответствие функцию $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)U$. Исходя из этого разработана классификация решений ДУ в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбирать необходимый тип геометрического интерполянта (табл. 1).

Таблица 1

Классификация решений ДУ по размерности лапласиана

Table 1

Classification of solutions of differential equations according to the dimensionality of the Laplacian

Размерность лапласиана	Тип геометрического интерполянта	Вид аппроксимирующего геометрического объекта
0	1-параметрический $U=f(x)$	кривая в R^2
1	2-параметрический $U=f(x,t)$	поверхность в R^3
2	3-параметрический $U=f(x,y,t)$	гиперповерхность в R^4
3	4-параметрический $U=f(x,y,z,t)$	гиперповерхность в R^5
…	…	…
n	$(n+1)$-параметрический $U=f(x_1,x_2,...,x_n,t)$	гиперповерхность в R^{n+2}

Использование точечных уравнений аналитического описания геометрического интерполянта, приводит к необходимости выполнения покоординатного расчёта для перехода от точечных уравнений к параметрическим. Особые свойства геометрических интерполянтов при численном решении ДУ на регулярной сети точек позволяют легко перейти от системы параметрических уравнений к уравнению в явном виде за счёт линейной зависимости между переменными и параметрами. Вместе с тем существует возможность численного решения и на нерегулярной сети точек, но при этом добавляется дополнительный этап – решение системы дифференциальных уравнений методом Крамера.

Например, для 3-параметрической гиперповерхности в R^4 получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных и её решение методом Крамера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial w} \end{cases}.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}.$$

Исходя из вышеизложенного численное решение ДУ с помощью геометрических интерполянтов на регулярной сети точек является наиболее рациональным для повышения производительности вычислительного алгоритма.

С учётом вышеизложенного разработан принципиальный вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов на регулярных и нерегулярных сетях (рис. 1). Этот же вычислительный алгоритм может быть легко модернизирован для аппроксимации численного решения ДУ с помощью кусочно-полиномиальных функций. При этом решается глобальная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из локальных.

Точность численного решения ДУ удобно проверять, используя методы научной визуализации, но при большом количестве переменных возникают сложности с визуализацией многомерного пространства. Поэтому для проверки точности численного решения ДУ предложен способ числовой оценки [21], который состоит из двух этапов. Первый этап предусматривает дискретизацию численного и эталонного решений в виде множества дискретно заданных точек, а второй – сравнение полученных дискретных точечных множеств с помощью какого-либо критерия сходства. Чем больше количество точек множества, тем более точно можно оценить степень сходства, но если два решения имеют близкие форму и положение, то при любом количестве точек степень сходства будет высоким. Наиболее популярным в инженерной практике является метод сравнения с помощью коэффициента детерминации. Только при его расчёте в качестве фактических значений принимаются значения одного точечного множества, соответствующего эталонному решению, а в качестве расчётных – численному решению. Аналогичным образом, для сравнения результатов моделирования могут быть адаптированы и другие статистические критерии оценки сходства.

Рис. 1. Блок-схема принципиального вычислительного алгоритма численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов

Fig. 1. Block diagram of the principal computational algorithm for numerical solution of differential equations using geometric interpolants

Численное решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

Многие задачи математической физики сводятся к решению уравнения Лапласа с граничными условиями. Например, задача о кручении стержней произвольного поперечного сечения при определённых условиях сводится к решению уравнения Лапласа [18]. Поэтому рассмотрим возможность его численного решения предложенным методом.

Пусть необходимо найти функцию двух переменных $U = U\left(x, y\right)$, являющуюся решением уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ в прямоугольнике $0 < x < 3$, $0 < y < 5$ и удовлетворяющую на его границах следующим условиям [19]:

$$U\left(0, y\right) = 2\sin\frac{\pi y}{5}; \quad U\left(3, y\right) = 0; \quad U\left(x, 0\right) = 4\sin\frac{\pi x}{3}; \quad U\left(x, 5\right) = 0.$$

Эталонное решение найдено с помощью метода разделения переменных (метод Фурье). В результате получено следующее частное решение уравнения с учетом граничных условий:

$$U\left(x, y\right) = \frac{4sh\frac{\pi\left(5-y\right)}{3}}{sh\frac{5\pi}{3}}\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{2sh\frac{\pi\left(3-x\right)}{5}}{sh\frac{3\pi}{5}}\sin\frac{\pi y}{5}.$$

В соответствии с табл. 1, для аппроксимации решения краевой задачи выбираем 2-параметрический геометрический интерполянт, в данном примере проходящий через 16 узловых точек. 12-ть точек из 16-ти определяются граничными условиями по прямоугольному контуру. Для аппроксимации решения уравнения Лапласа с учётом начальных и граничных условий необходимо определить ещё 4 точки таким образом, чтобы их координаты удовлетворяли краевой задаче. Тогда СЛАУ также будет состоять из 4-х уравнений. В результате аппроксимирующее уравнение принимает следующий вид:

$$U(x,y) = 0,030y^3x^2 - 0,090y^3x + 0,006y^2x^3 - 0,385y^2x^2 + 1,209y^2x - 0,312y^2 - 0,028yx^3 + \\ +1,523yx^2 - 4,837yx - 1,732x^2 + 1,559y + 5,196x.$$

На рис. 2 с разных ракурсов изображены наложенные друг на друга поверхности, которые представляют графическое решение уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Справа показан эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных, а слева – 16-точечный отсек аппроксимирующей поверхности отклика.

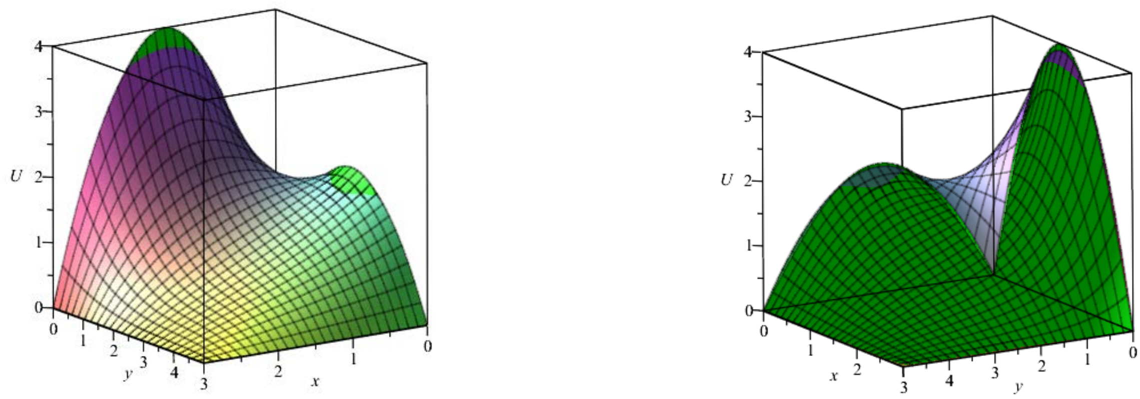

Рис. 2. Графическое сравнение результатов решения уравнения Лапласа с граничными условиями
Fig. 2. Graphical comparison of the results of solving the Laplace equation with boundary conditions

Как видно из представленного сравнения, аппроксимирующий 16-точечный отсек поверхности отклика с высокой точностью дублирует эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных, что подтверждает достоверность численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов.

Математическое моделирование НДС цилиндрического резервуара с несовершенствами

В отечественной литературе широкое распространение получила модель определения НДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении [20, 21]. Эта модель применяется в работе для анализа НДС проектируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений. Однако в процессе монтажа и эксплуатации резервуар меняет свою форму под действием объективных и субъективных факторов. Вместе с тем, наличие даже незначительных несовершенств геометрической формы, которые выражаются в виде отклонений стенки резервуара от вертикали, приводит к необходимости решения задачи с учётом геометрической и конструктивной нелинейности. Поэтому возникает необходимость уточнения исходного ДУ с учётом начальных отклонений поверхности цилиндрической оболочки от вертикали:

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{kEh(w+\delta)}{r^2\left(1-\frac{\alpha\mu}{2}\right)} = \gamma g(x-d), \tag{1}$$

где $w = w(x)$ – искомая функция перемещений от действия гидростатической нагрузки; x – координата стенки по высоте, отсчитывая от уторного шва резервуара; r – радиус цилиндрического резервуара; h – толщина стенки цилиндрического резервуара; $\delta = \delta(x)$ – функция исходных отклонений цилиндрического резервуара от вертикали;

k – поправочный коэффициент, учитывающий при расчёте геометрическую и конструктивную нелинейность, а также напряжения, возникающие в верхнем поясе оболочки за счёт её взаимодействия с крышей резервуара; $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ – модуль Юнга для стали; $\mu = 0{,}3$ – коэффициент Пуассона; α – параметр, который при одноосном напряжённом состоянии принимается равным 0 (гидростатическое давление в открытом цилиндрическом сосуде), а при внутреннем газовом давлении в замкнутом цилиндрическом сосуде принимается равным 0,5; $D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость; γ – плотность хранимой жидкости; g – ускорение свободного падения; d – высота уровня жидкости в резервуаре.

Учитывая, что исходные отклонения δ и искомые перемещения w являются функциями от переменной x, математически точное решение общим методом решения ДУ с постоянными коэффициентами даёт значительные погрешности (рис. 3), что приводит к необходимости его решения численным методом.

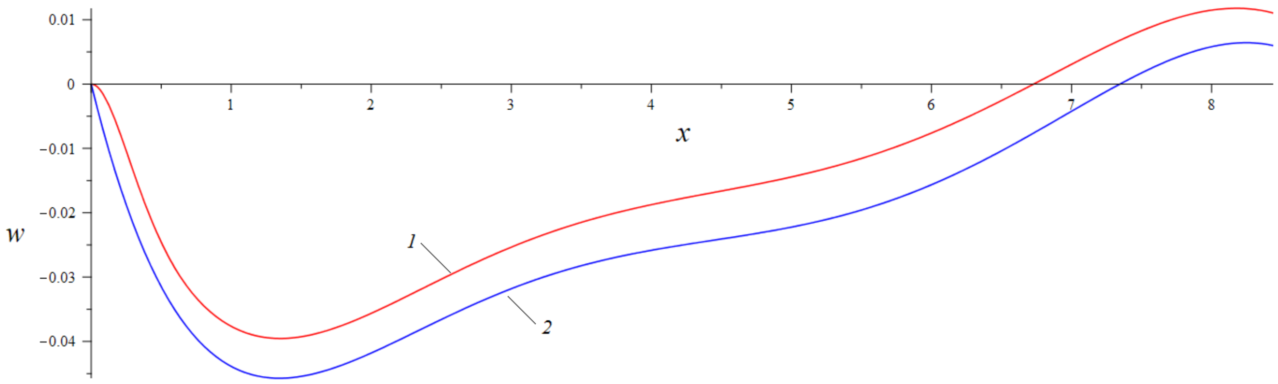

Рис. 3. Сравнение результатов решения ДУ:
1 – математически точное решение; *2* – эталонное решение
Fig. 3. Comparison of the results of solving differential equation (1):
1 – mathematically exact solution; 2 – reference solution

Численное решение ДУ (1) с помощью 1-параметрического геометрического интерполянта (см. табл. 1) с учётом начального условия, применение которого заключаются в параллельном переносе численного решения в начало координат, принимает следующий вид:

$$w = 4{,}19 \cdot 10^{-6} x^6 - 0{,}00017 x^5 + 0{,}0025 x^4 - 0{,}018 x^3 + 0{,}061 x^2 - 0{,}09 x. \quad (2)$$

Графическая визуализация результатов сравнения показывает высокую степень сходства эталонного и численного решений (рис. 4).

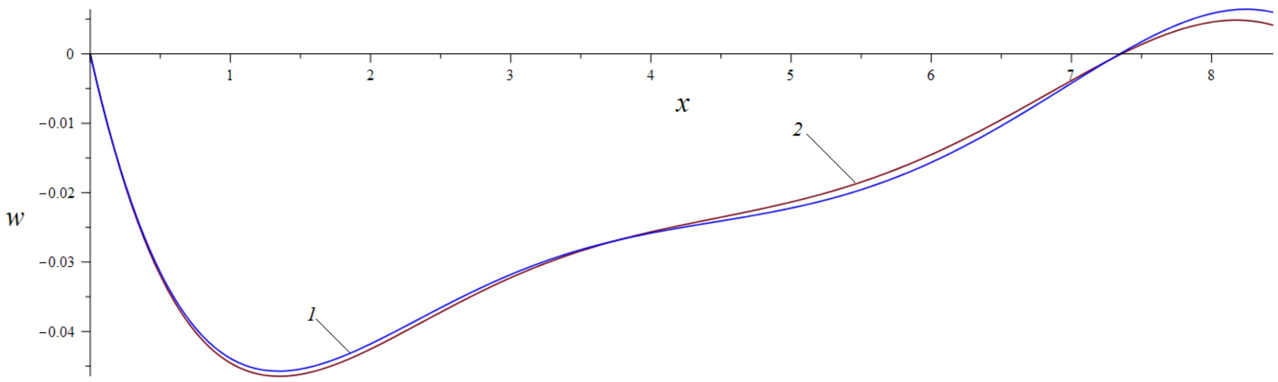

Рис. 4. Сравнение результатов решения ДУ (1): *1* – эталонное решение; *2* – численное решение (2)
Fig. 4. Comparison of the results of solving differential equation (1): *1 – reference solution; 2 – numerical solution (2)*

Численная оценка результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации по методике [22] составила 0,998. Аналогичное сравнение было проведено для 12-ти опорных точек по окружности резервуара и получены высокие значения коэффициента детерминации, подтверждающие достоверность полученных результатов.

В результате проведения вычислительных экспериментов в программном пакете MS Excel с коэффициентом детерминации 0,983 получена зависимость поправочного коэффициента k, учитывающего при расчёте геометрическую и конструктивную нелинейность, а также напряжения, возникающие в верхнем поясе оболочки за счёт её взаимодействия с крышей резервуара, от угла φ по окружности резервуара (рис. 5):

$$k = 9{,}215 \cdot 10^{-10} \varphi^4 - 6{,}203 \cdot 10^{-7} \varphi^3 + 0{,}0001 \varphi^2 - 0{,}0021 \varphi + 0{,}3888.$$

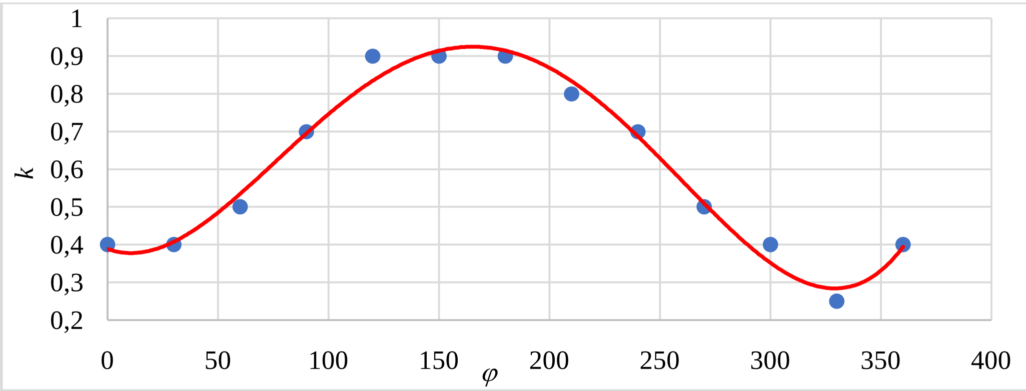

Рис. 5. Зависимость поправочного коэффициента *k* от угла φ по окружности резервуараъ

Fig. 5. Dependence of the correction factor k on the angle φ around the circumference of the tank

Для интерполяции результатов численного моделирования по сечениям резервуара, был использован вычислительный алгоритм построения одномерных незамкнутых обводов 1-го порядка гладкости [23]. В результате получена поверхность отклика, характеризующая перемещения в стенке стального цилиндрического резервуара с несовершенствами (рис. 6).

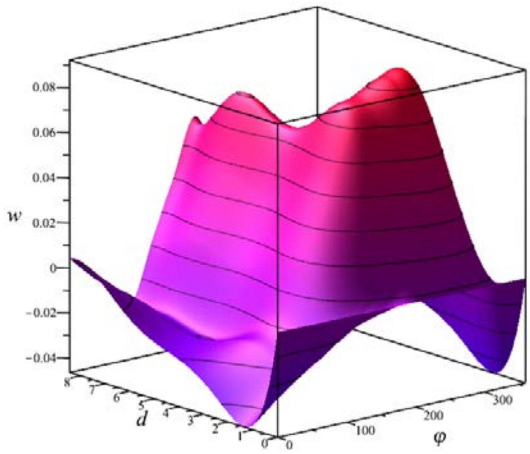

Рис. 6. Визуализация поверхности отклика перемещений стенки резервуара с несовершенствами от действия гидравлической нагрузки

Fig. 6. Visualization of the response surface of the motion response of the tank wall with imperfections from the action of the hydraulic load

Как видно из рис. 6, максимальные перемещения возникают в нижней части резервуара на интервале от 150° до 300° по окружности резервуара. Методами математического анализа определены значения максимальных перемещений и их положение. Для этого решена система двух дифференциальных уравнений в частных производных по параметрам u и v, на интервале их изменения от 0 до 1. Таким образом, максимальные перемещения 92,2 мм возникают на высоте $d = 2,298$ м и $\varphi = 258,6°$ по окружности резервуара.

Заключение

Предложенный подход использования геометрических интерполянтов в качестве конечных суперэлементов, включающих в себя не только геометрическую информацию, но информацию о физических параметрах, может быть эффективно использован для численного решения и других дифференциальных уравнений математического моделирования многофакторных процессов и явлений в любых отраслях науки и техники. Преимуществом такого подхода является то, что он позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами по аналогии с изогеометрическим методом. Также к преимуществам относится отсутствие необходимости дискретизации анализируемой металлической конструкции на элементы для проведения конечно-элементного анализа. Та многомерная сеть, которая формируется на первых этапах вычислительного алгоритма является весьма условной и нужна только для того, чтобы выбрать степень полинома, описывающего многомерный геометрический объект, проходящий через узловые точки геометрического интерполянта. Кроме того, с учётом использования точечного исчисления отпадает необходимость использования направляющих косинусов, что значительно ускоряет процесс расчёта.

Список источников:

1. Изогеометрический метод расчета как альтернатива стандартному методу конечных элементов / А.И. Исрафилова, В. Кутрунов, М. Гарсия, М. Калиске // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2019. № 9(84). С. 7-21. DOI: 10.18720/CUBS.84.1.
2. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells / L. Leonetti, F. Liguori, D. Magisano, G. Garcea // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. Vol. 331. pp. 159-183. DOI: 10.1016/j.cma.2017.11.025.
3. Li W., Nguyen-Thanh N., Zhou K. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. Vol. 336. pp. 111-134. DOI: 10.1016/j.cma.2018.02.018.
4. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. A new doubly-curved shell element for the free vibrations of arbitrarily shaped laminated structures based on weak formulation isogeometric analysis // Composite Structures. 2017. Vol. 171. pp. 429-461. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.055.
5. Конопацкий Е.В. Решение дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования // Труды 28-й Международной конференция по компьютерной графике и машинному зрению «GraphiCon 2018». 24-27 сентября 2018 г. Томск: ТПУ. 2018. С. 358-361.
6. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants / E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi. – CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2763. pp. 213-219. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
7. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A.

References:

1. Israfilova A.I., Kutrunov V., Garcia M., Kaliske M. Isogeometric Analysis as an Alternative to the Standard Finite Element Method. Construction of Unique Buildings and Structures. 2019;9(84):7-21. doi: 10.18720/CUBS.84.1.
2. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells / L. Leonetti, F. Liguori, D. Magisano, G. Garcea // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. Vol. 331. pp. 159-183. DOI: 10.1016/j.cma.2017.11.025.
3. Li W., Nguyen-Thanh N., Zhou K. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. Vol. 336. pp. 111-134. DOI: 10.1016/j.cma.2018.02.018.
4. Tornabene F., Fantuzzi N., Bacciocchi M. A new doubly-curved shell element for the free vibrations of arbitrarily shaped laminated structures based on weak formulation isogeometric analysis // Composite Structures. 2017. Vol. 171. pp. 429-461. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.055.
5. Konopatsky EV. Solving Differential Equations Using Geometric Modelling Methods. In: Proceedings of the 28th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision: GraphiCon; 2018 Sep 24-27; Tomsk: TPU: 2018. p. 358-361.
6. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants / E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi. – CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2763. pp. 213-219. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
7. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A.

Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application // CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2744. DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.
8. Конопацкий Е.В. Геометрическая теория многомерной интерполяции // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2020. № 1(07). С. 9-16. DOI: 10.30987/2658-6436-2020-1-9-16.
9. Конопацкий Е.В. Принципы построения компьютерных моделей многофакторных процессов и явлений методом многомерной интерполяции // Программная инженерия: методы и технологии разработки информационно-вычислительных систем (ПИИВС-2018): Сборник научных трудов II Международной научно-практической конференции, Донецк, 14–15 ноября 2018 года. – Донецк: Донецкий национальный технический университет. 2018. С. 309-318.
10. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A. Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method // IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1441 (2020) 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.
11. Введение в математический аппарат БН-исчисления / А.И. Бумага, Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, О.А. Чернышева // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. 2017. Т. 1. С. 76-82.
12. Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление. Макеевка: ДОННАСА. 2020. 244 с.
13. Балюба И.Г., Конопацкий Е.В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения // Тр. 8-й Междунар. науч. конф. «Физико-техническая информатика». 09-13 ноября 2020 г. Нижний Новгород. 2020. Ч. 2. С. 321-327. DOI: 10.30987/conferencearticle _5fd755c0adb1d9.27038265.
14. **Метод** суперэлементов в расчётах инженерных сооружений / В.А. Постнов, С.А. Дмитриев, Б.К. Елтышев, А.А. Радионов. Л.: Судостроение. 1979. 288 с.
15. Shamloofard M., Hosseinzadeh A., Movahhedy M.R. Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells // Engineering with Computers. 2021. Vol. 37. No. 4. pp. 3551-3567. DOI: 10.1007/s00366-020-01015-w.
16. Nielsen M.B., Sahin E. A simple procedure for embedding seismic loads in foundation superelements for combined wind, wave and seismic analysis of offshore wind turbine structures // Paper presented at the COMPDYN Proceedings. 2019. Vol. 3. pp. 4628-4640. DOI: 10.7712/120119.7255.19324.
17. Шевчук О.А., Конопацкий Е.В. Решение дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2020. №3. С.29-33.
18. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов

Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application // CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2744. DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.
8. Konopatsky E.V. Geometric Theory of Multidimensional Interpolation. Automation and Modelling in Design and Management. 2020;1(07): 9-16. doi: 10.30987/2658-6436-2020-1-9-16
9. Konopatsky EV. Principles of Construction of Computer Models of Multifactor Processes and Phenomena by the Method of Multidimensional Interpolation. In: Proceedings of the 2d International Scientific and Practical Conference: Software Engineering: Methods and Technologies for the Development of Information and Computing Systems (PIIVS-2018); 2018 Nov 14-15; Donetsk: Donetsk National Technical University: 2018. p. 309-318.9. Novikov D.A. The Theory of Management of Organizational Systems: an Introductory Course. Available at: http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/747/47747/23705 / (Accesses: the 2nd of January 2022).
10. **Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A.** Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method // IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series 1441 (2020) 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.
11. Introduction to the mathematical apparatus of BN calculus / A.I. Paper, E.V. Konopatsky, A.A. Krysko, O.A. Chernysheva // Problems of quality of graphic training of students in a technical university: traditions and innovations. 2017. Vol. 1. pp. 76-82..
12. Balyuba I.G., Konopatsky E.V., Paper A.I. Point calculus. Makeyevka: DONNASA. 2020. 244 p.
13. Baliuba IG, Konopatsky EV. Point Calculus. Historical Background and Fundamental Definitions. In: Proceedings of the 8th International Scientific Conference: Physical and Technical Informatics; 2020 Nov 09-13; Nizhny Novgorod: 2020. Part 2. p. 321-327. doi: 10.30987/conferencearticle _5fd755c0adb1d9.27038265.
14. Postnov V.A., Dmitriev S.A., Eltyshev B.K., Radionov A.A. Method of Superelements in Calculating Engineering Structures. Leningrad: Sudostroenie; 1979. 288 p.
15. Shamloofard M., Hosseinzadeh A., Movahhedy M.R. Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells // Engineering with Computers. 2021. Vol. 37. No. 4. pp. 3551-3567. DOI: 10.1007/s00366-020-01015-w.
16. Nielsen M.B., Sahin E. A simple procedure for embedding seismic loads in foundation superelements for combined wind, wave and seismic analysis of offshore wind turbine structures // Paper presented at the COMPDYN Proceedings. 2019. Vol. 3. pp. 4628-4640. DOI: 10.7712/120119.7255.19324.
17. Shevchuk O.A., Konopatsky E.V. Solving Differential Equations Using Geometric Interpolants. Information Technologies in Design and Production. 2020;3:29-33.
18. Bezukhov N.I., Luzhin O.V. Application of

теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М.: Высшая школа. 1974. 200 с.
19. Шевчук О.А. Использование геометрических интерполянтов для численного решения уравнения Лапласа в прямоугольнике // Информатика и кибернетика. 2021. №1-2 (23-24). С. 74-79.
20. Лессиг, Е.Н., Лилеев А.Ф., Соколов А.Г. Листовые металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. 488 с.
21. Тимошенко С.П. Войновский-Кригер **С.** Пластинки и оболочки // Перевод с англ. В.И. Контовта под ред. Г.С. Шапиро. 2-е изд. стереотипное. М.: Наука. 1966. 636 с.
22. An approach to comparing multidimensional geometric objects / I.V. Seleznev, E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021) Nizhny Novgorod. September 27-30. 2021. Vol. 3027. pp. 682-688. DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-682-688.
23. Конопацкий Е.В., Крысько А.А., Бумага А.И. Вычислительные алгоритмы моделирования одномерных обводов через *k* наперед заданных точек // Геометрия и графика. М.: Инфра-М. 2018. №3. С. 20-32. DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491. 72807735.

Plasticity-Theory Methods to Engineering Problems. Moscow: Vysshaya Shkola; 1974.
19. Shevchuk O.A. Using Geometric Interpolants for the Numerical Solution of The Laplace Equation in a Rectangle. Informatics and Cybernetics. 2021; 1-2 (23-24):74-79.
20. Lessig, E.N., Lileev A.F., Sokolov A.G. Sheet Metal Structures. Moscow: Stroyizdat; 1970.
21. Timoshenko S.P. Voinovsky-Krieger S. Plates and Shells. Kontovt VI, translator. Shapiro GS, editor. Moscow: Nauka; 1966.
22. An approach to comparing multidimensional geometric objects / I.V. Seleznev, E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021) Nizhny Novgorod. September 27-30. 2021. Vol. 3027. pp. 682-688. DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-682-688.
23. Konopatsky E.V., Krysko A.A., Bumaga A.I. Computational Algorithms for Modelling of One-Dimensional Contours through *k* in Advance Given Points. Geometry and Graphics. Moscow: Infra-M. 2018;3:20-32. doi: 10.12737/article_5bc457ece18491. 72807735

Информация об авторах

Конопацкий Евгений Викторович
доктор технических наук, профессор кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

Шевчук Оксана Александровна
ассистент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

Information about authors:

Evgeny Viktorovich Konopatsky
Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department «Specialized Information Technologies and Systems» of State Educational Institution of Higher Professional Education «The Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture»
Oksana Aleksandrovna Shevchuk
Assistant of the Department «Specialized Information Technologies and Systems» of State Educational Institution of Higher Professional Education «The Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture»

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 11.03.2022; одобрена после рецензирования 31.03.2022; принята к публикации 07.04.2022.

The article was submitted 11.03.2022; approved after reviewing 31.03.2022; accepted for publication 07.04.2022.

Рецензент – Подвесовский А.Г., кандидат технических наук, доцент, Брянский государственный технический университет.

Reviewer – Podvesovskij A.G., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bryansk State Technical University.