НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514.11.16
DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-3-11

А.Г. Гирш
Д-р техн. наук, доцент,
Кассельский университет,
Германия, 34109, г. Кассель, Мюнхенбергштрассе, 19

Построение сферы по мнимым точкам

Аннотация. Евклидовы пространства различных размерностей не содержат мнимых образов и объектов по определению, но неразрывно связаны с ними через частные случаи и это ведет к необходимости расширения поля в геометрии в область мнимых значений [1; 19; 26]. Такое расширение, т.е. добавление к полю вещественных координат пространств различной размерности, поля мнимых координат приводит к разным вариантам пространств различной размерности, в зависимости от выбранной аксиоматики. Ранее в ряде статей были показаны примеры решения некоторых актуальных задач геометрии с использованием мнимых геометрических образов и объектов [4–6; 13; 21; 22; 29].

В статье приводятся конструкции построения сферы по наперёд заданным четырём точкам, из которых одна пара или обе пары точек могут быть мнимыми комплексно сопряжёнными. Построение проводится на совмещённых эпюрах методами начертательной геометрии по аналогии с известной задачей построения сферы по четырём действительным точкам. Построение сферы опирается на семь вспомогательных конструкций по построению окружности по точкам, которые могут быть мнимыми сопряжёнными. Рассмотрены как 3D-задачи построения сфер для заданных точек, так и методы 2D-задач построения для определения требуемых мнимых точек. Описана методика вычисления параметров полученной сферы. Рассмотрено применение метода к иным задачам начертательной геометрии, например, к задачам поиска геометрических мест точек, равноудаленных от двух заданных поверхностей. В последнее время этот вопрос интенсивно исследуется, например, в работах [5; 6].

Ключевые слова: мнимые сопряжённые точки, носитель мнимых точек, касательные прямые, изотропные прямые, скрещивающиеся прямые, действительная окружность, мнимая окружность, круг Фалеса (опирается на диаметр), линия центров, радикальная ось, параллельные плоскости, действительная сфера, мнимая сфера, нуль-сфера.

A.G. Hirsch
Doctor of Engineering, Associate Professor,
University of Kassel,
19, Monkebergstrasse, Kassel, 34109, Germany

Building a Sphere From Imaginary Points

Abstract. Euclidean spaces of various dimensions do not contain imaginary images and objects by definition, but are inextricably linked with them through special cases, and this leads to the need to expand the field in geometry into the region of imaginary values [1; 19; 26]. Such an extension, i.e. adding to the field of real coordinates spaces of different dimensions, the field of imaginary coordinates leads to different variants of spaces of different dimensions, depending on the chosen axiomatics. Earlier in a number of articles, examples of solving some actual problems of geometry using imaginary geometric images and objects were shown [4–6; 13; 21; 22; 29].

The article provides constructions for constructing a sphere from four predetermined points, of which one pair or both pairs of points can be imaginary complex conjugate. The construction is carried out on combined diagrams by the methods of descriptive geometry by analogy with the well-known problem of constructing a sphere from four real points. The construction of a sphere is based on seven auxiliary constructions for constructing a circle from points that can be imaginary conjugates. Both 3D problems of constructing spheres for given points and methods of 2D construction problems for determining the required imaginary points are considered. A method for calculating the parameters of the obtained sphere is described. The application of the method to other problems of descriptive geometry, for example, to the problems of finding geometric places of points, is considered. equidistant from two given surfaces. Recently, this issue has been intensively studied, for example, in the works [5; 6].

Keywords: imaginary conjugate points, carrier of imaginary points, tangent lines, isotropic lines, intersecting lines, actual circle, imaginary circle, circle of Thales (based on the diameter),center line, radical axis, parallel planes, actual sphere, imaginary sphere, null sphere.

Введение

Статья по данной теме была написана ещё в 2015 г. [23], но на пути к издателю затерялась в «мировой паутине». Тема задания сферы мнимыми точками интересная и, по мнению автора, стоит того, чтобы пропавшую статью возродить. Она и предлагается читателю. В статье рассматривается построение сферы по четырём точкам, которые все могут быть действительными [2; 30], все могут быть мнимыми сопряжёнными, и случай, когда одна пара точек действительные, вторая — мнимые сопряжённые. В статье предлагаются построения сферы, опирающиеся на вспомогательные 2*D*-конструкции, как-то: пересечение прямой с окружностью и, обратная ей задача — построение окружности по одной действительной и паре мнимых сопряжённых точек [7; 9; 10; 16; 36].

1. Конструктивные 2*D*-задачи с мнимостями

К1. Построение главных точек M_1, M_2 инволюционного ряда точек на прямой g и построение точки, сопряжённой данной точке в инволюционном ряду [28].

Две разделяющиеся пары действительных точек на действительной прямой g задают инволюцию в ряду точек. Инволюционный ряд точек $A_1A_2 \div B_1B_2$ называют эллиптическим, он имеет пару мнимых двойных точек M_1, M_2. Полуокружности (A_1A_2) и (B_1B_2) пересекаются в точке Лагерра L, с основанием в точке P — центре инволюционного ряда точек. Мнимые точки M_1, M_2 лежат на носителе g (рис. 1, *a*).

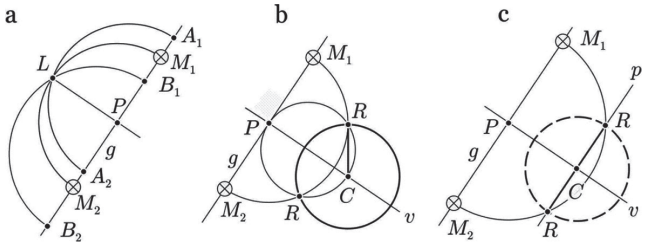

Рис. 1. a) K1: определение мнимых точек M_1, M_2 в инволюционном ряду на g; *b*) K2: построение мнимых точек M_1, M_2 пересечения прямой g с действительной окружностью (C, CR) ↔ Построение окружности по центру C и двум мнимым точкам M_1, M_2 на прямой g; c) K3: построение мнимых точек M_1, M_2 пересечения прямой g с мнимой окружностью (C, CR) ↔ Построение мнимой окружности по центру C и двум мнимым точкам M_1, M_2 на секущей прямой g

Центр C окружности, проходящей через мнимые точки M_1, M_2, лежит на прямой LP (рис. 1, *a*). Окружность (C, CR) может быть как действительной, (рис. 1, *b*), так и мнимой (рис. 1, *c*).

K2. Построение точек пересечения прямой g с действительной окружностью (C, CR).

Если график прямой g не накладывается на действительную окружность (C, CR), то точки M_1, M_2 их пересечения будут мнимыми. Строят круг *Thales*'a — окружность (CP), и отмечают точки R пересечения его с окружностью (C, CR). Окружность (P, PR) пересекает прямую g в мнимых точках M_1, M_2 (рис. 1, *b*).

Обратная задача. Если данный центр C лежит вне окружности (M_1M_2)), то искомая окружность (C, CR) будет действительной, в противном случае — мнимой. Строят круг *Thales'a* (CP) и отмечают точки R пересечения с окружностью (M_1M_2). Окружность (C, CR) искомая действительная окружность (рис. 1, *b*).

K3. Построение точек M_1, M_2 пересечения прямой g с мнимой окружностью (C, CR).

Положение прямой g относительно мнимой окружности (C) безразлично. Через точку C параллельно прямой g проводят прямую p и отмечают точки R пересечения с окружностью (C). Через точку C перпендикулярно прямой g проводят прямую v и отмечают точку P пересечения с прямой g. Окружность (P, PR) пересекает прямую g в искомых мнимых точках M_1, M_2 (рис. 1, *c*).

Обратная задача. Определить радиус R окружности (C, R) по данному центру C и мнимым точкам M_1, M_2 пересечения с прямой g. Через точку C параллельно прямой g проводят прямую p и отмечают точки R пересечения с окружностью (M_1M_2). Окружность (C, CR) будет мнимой искомой окружностью (рис. 1, *c*).

K4. Построить окружность (C, R) по двум парам комплексно сопряжённых точек M_1, M_2 и N_1, N_2. Прямые g_1 и g_2, несущие мнимые точки, параллельны, окружности (M_1M_2) и (N_1N_2) не пересекаются.

Искомая окружность будет действительной. Каждой окружности (M_1M_2) и (N_1N_2) придают некоторое касательное приращение δ, чтобы вспомогательные окружности пересеклись на своей радикальной оси *p.o*. Радикальная ось пересекает линию центров v данных окружностей в центре C искомой окружности. Радиус CR искомой окружности равен длине касательной из точки C к одной из окружностей (M_1M_2) или (N_1N_2) (рис. 2, *a*).

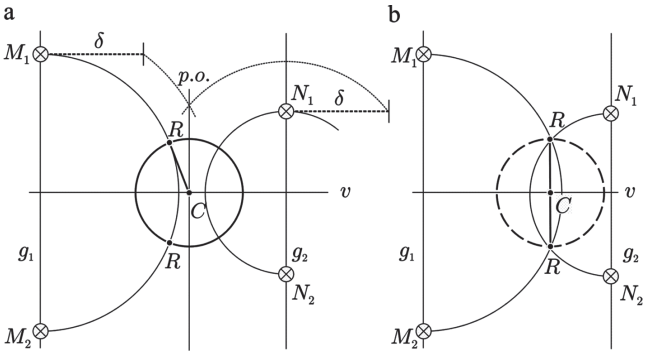

Рис. 2. a) K4: построение р. о. непересекающихся окружностей, определение окружности (C, R) по двум парам мнимых точек M_1, M_2 и N_1, N_2, лежащих на параллельных носителях; *b*) K5: определение окружности (C, R), вспомогательные окружности (M_1M_2) и (N_1N_2) пересекаются в точках R, R

K5. Прямые g_1 и g_2 параллельны, окружности (M_1M_2) и (N_1N_2) пересекаются в точках R, R (рис. 2, *b*). На общей хорде R-R окружностей (M_1M_2) и (N_1N_2) и как на диаметре строят окружность (C, R). Искомая окружность (C, R) мнимая, проходит через данные точки M_1, N_1, соответственно M_2, N_2, своими гиперболическими ветвями. На рис. 2, *b* действительная ось гиперболы совпадает с прямой v, сами гиперболические ветви не показаны.

Построение по рис. 2 не является решением частного случая построения окружности, когда данные мнимые точки лежат симметрично оси v. Инволюция на прямой g позволяет перемещать данную пару точек в нужное место, K1 (рис. 1, *a*).

K6. Построить окружность (C, R) по паре действительных точек D_1, D_2 и паре мнимых комплексно сопряжённых точек M_1, M_2.

Прямые g_1 и g_2 параллельны, точки D_1 и D_2 лежат вне окружности (M_1M_2), искомая окружность будет

действительной. Строят радикальную ось разнородных окружностей. Для этого окружности (M_1M_2) придают некоторое касательное приращение δ, а окружности (D_1D_2) придают приращение равнобедренным треугольником с основанием D_1D_2 и сторонами δ. Через точки пересечения вспомогательных окружностей проходит радикальная ось *p*. *o*. окружностей. Радиус *CR* искомой окружности равен длине касательной из точки *C* к окружности (M_1M_2). Окружность (*C, R*) проходит через действительные точки D_1 и D_2 и через точки M_1 и M_2 одной своей гиперболической ветвью (рис. 3, *a*).

Ответ на вопрос «Почему окружность может быть задана четырьмя точками и не перезадание ли это?» кроется в том, что одна пара или обе пары точек — мнимые комплексно сопряжённые. Это ещё один плюс в пользу мнимостей в геометрии [3; 8; 12; 24; 29].

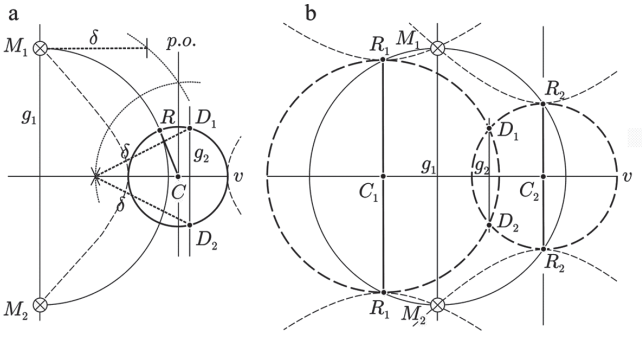

Рис. 3. a) К6 — определение окружности (*C, R*) по паре мнимых точек M_1, M_2 и паре действительных точек D_1, D_2, точки D_1, D_2 лежат вне окружности (M_1M_2); *b*) К7 — определение окружности (*C, R*) по паре мнимых точек M_1, M_2 и паре действительных точек D_1, D_2, которые лежат внутри окружности (M_1M_2)

К7. Прямые g_1 и g_2 параллельны, точки D_1 и D_2 лежат внутри окружности (M_1M_2). Задача имеет два решения, искомые окружности будет мнимыми. Носители мнимых окружностей (штриховые линии) проходят через точки D_1, D_2, через точки M_1, M_2 мнимые окружности проходят своими гиперболическими ветвями (рис. 3, *b*).

Конструкция по рис. 3, *b* имеет и чисто планиметрический интерес как решение задачи «Даны окружность (M_1M_2) и внутренняя точка *D*. Построить окружность, проходящую через точку *D*, имеющую своим диаметром хорду R_1R_2 окружности (M_1M_2), параллельную диаметру M_1M_2». Автор имеет для этой задачи как точное решение, так и приближённое [16, с. 67]. Кроме чисто абстрактного упражнения, построение может служить конструктивным блоком для пространственных задач [4; 14; 15], например, в построении сферы. Изначально задача появилась как задача построения окружности [11], псевдоэллиптического пучка с базисными точками M_1, M_2 по одной наперёд заданной точке *D*, не лежащей на линии центров *v*.

Предложение 1. *Прямая всегда пересекает окружность по двум точкам (действительным, мнимым или совпавшим)*.

2. Конструктивные *3D*-задачи — построения сферы

Конструктивные посылки: 1. Четыре точки пространства задают две прямые, которые в общем случае скрещиваются. Если точки мнимые, то прямые служат носителями этих мнимых точек. 2. Через две скрещивающиеся прямые проходят две параллельные плоскости. 3. Параллельные плоскости всегда можно привести в положение плоскости уровня. На смежной проекции плоскости изобразятся двумя прямыми, параллельными оси проекций. 4. Посылки позволяют исходные точки расположить попарно на прямых в плоскостях уровня, например, $g_1(A, B)$ — в плоскости Γ_1, $g_2(C, D)$ — в плоскости Γ_2.

Задача 1. Построить сферу Θ по четырём действительным точкам *A*, *B*, *C*, *D* в пространстве.

Решение (рис. 4 [30]).

На поле проекций Π_1 из центра *O′* через точки *A*, *B* и точки *C*, *D* проводят окружности как проекции параллелей сферы и отмечают точки r_1 и r_2 на меридиане *m* сферы. Точки r_1 и r_2 переносят по линиям проекционной связи на поле проекций Π_2 — точку r_1 на линию Γ_1, — точку r_2 на линию Γ_2. Проекция центра сферы лежит в точке *O″* пересечения серединного перпендикуляра отрезка r_1'' r_2'' с проекцией оси вращения *v″*. Из центра *O″* через точки r_1'' и r_2'' проводят фронтальный очерк сферы Θ (*O″*, *r*) — её главный меридиан.

Окружность (*O′*, *r*) есть горизонтальный очерк сферы Θ — экватор.

Задача 2. Построить сферу Θ по двум парам мнимых комплексно сопряжённых точек A_1, A_2 и B_1, B_2.

Решение (рис. 5).

На поле проекций Π_1 строят серединные перпендикуляры отрезков A_1A_2 и B_1B_2, пересекающиеся в точке *O′* — проекции центра искомой сферы Θ. С точкой *O′* совпадает и проекция вертикальной оси вращения *v* сферы. Центр *O′* лежит вне окружности (A_1A_2). Окружность, заданную парой мнимых точек и центром *O′*, лежащим вне (A_1A_2), строят по К2 (рис. 1, *b*) — окружность (*O′*, R_1) действительная.

Центр *O′* лежит внутри окружности (B_1B_2). Окружность, заданную парой мнимых точек и центром, *O′*, лежащим внутри (A_1A_2), строят по К3 (рис. 1, *c*) — окружность (*O′*, R_2) мнимая.

Меридиан *m* рассекает обе окружности (*O′*, R_1) и (*O′*, R_2), первую в точках D_1 и D_2, вторую в точках M_1

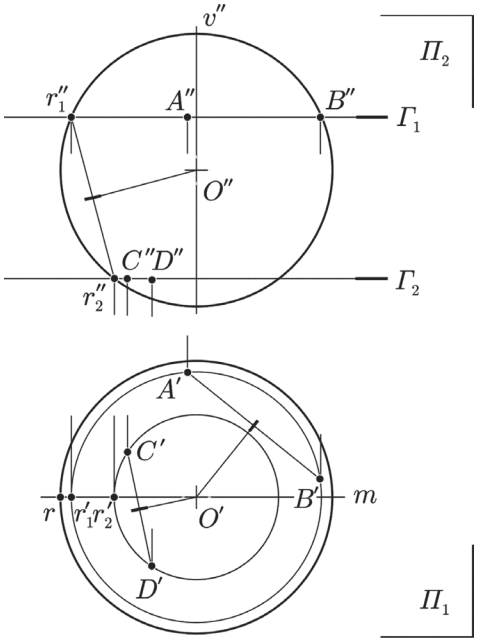

Рис. 4. Построение сферы Θ по четырём точкам *A*, *B*, *C*, *D*

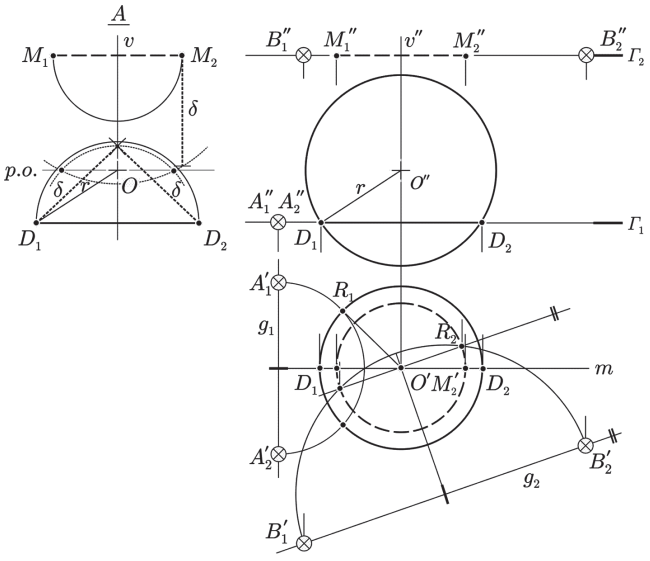

Рис. 5. Построение сферы Θ(*O*, *r*) по двум парам мнимых точек A_1, A_2 и B_1, B_2

и M_2. По линиям проекционной связи точки переносят на проекцию $П_2$ — точки D_1 и D_2 на линию $Γ_1$, точки M_1 и M_2 — на линию $Γ_2$.

Построение проекции центра O'' сферы выполняется по К6 (рис. 3), а для случая разнородных пар точек. На фрагменте *А* (рис. 5) приведено построение радикальной оси (р. о.) двух разнородных окружностей (D_1D_2) и (M_1M_2). Радикальная ось определяет положение центра *O* окружности как фронтального очерка искомой сферы. Это пример того, как во вспомогательной конструкции учитываются актуальные параметры задачи. Искомая окружность действительная, радиус *r* равен длине отрезка от точки O'' до одной из действительных точек D_1 или D_2. Построенная окружность (O'', *r*)является фронтальным очерком искомой сферы Θ(*O*, *r*).

Задача 3. Построить сферу Θ по паре действительных точек *A*, *B* и паре мнимых сопряжённых точек C_1, C_2 в пространстве *C*.

Решение (рис. 6).

На поле проекций $П_1$ строят срединные перпендикуляры *m* и *n* отрезков *AB* и C_1C_2. Они пересекаются в точке O' — проекции центра искомой сферы Θ. С точкой O' совпадает и проекция вертикальной оси вращения *v* сферы. Центр O' лежит внутри окружности (C_1', C_2'). Радиус R_2 мнимой окружности определяется по К3 (рис. 1, *c*). Окружность (O', R_2), проходящая через точки *A* и *B* — действительная.

Окружность (*O*, R_1)проецируется на $Γ_1$ в отрезок D_1D_2, окружность (*O*, R_2) проецируется на плоскость $Γ_2$ в отрезок M_1M_2.

На фрагменте А приведено построение радикальной оси (р. о.) действительной (D_1D_2) и мнимой (M_1M_2) окружностей, (см. Бл. 6, рис. 7, *а*). Центр O'' сферы Θ лежит на оси *v* в пересечении с радикальной осью. Сфера Θ(*O*, *r*) — действительная.

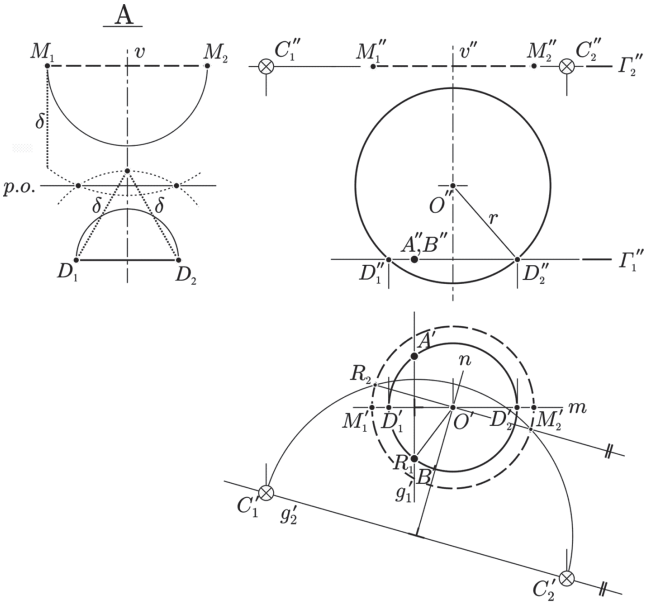

Рис. 6. Построение сферы (*O*, *R*) по паре действительных *A*, *B* и паре мнимых комплексно сопряжённых точек C_1, C_2

Задача 4. Построить сферу Θ нулевого радиуса по паре действительных точек *A*, *B* на носителе g_1 и носителю g_2, на котором задан только центр P_2 инволюции.

Решение (рис. 7).

Горизонтальная проекция сферы Θ совпадает с проекцией её центра O' и лежит в точке пересечения нормалей m и n, восставленных к носителям в центрах инволюций P_1 и P_2. Это позволяет определить ось v поверхности сферы и радиус OR_1 мнимой окружности в плоскости Γ_1 (см. К2, рис. 1, *b*).

Сфера нулевого радиуса — это, иначе, изотропный конус, очерковые образующие которого наклонены к оси v под углом 45°. Этот факт позволяет определить основание конуса на плоскости Γ_2 — окружность (O, R_2). По окружности (O, R_2) с помощью К3 (рис. 1, *c*) определяется положение мнимых точек B_1, B_2 на носителе g_2.

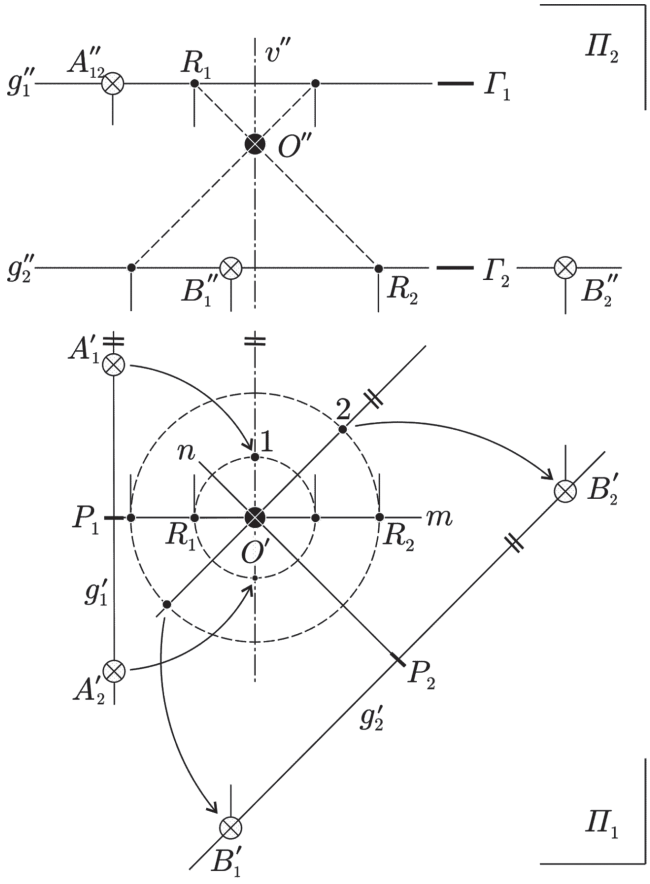

Рис. 7. Построение сферы Θ нулевого радиуса по паре мнимых точек A_1, A_2 на g_1 и центру инволюции P_2 на носителе g_2

Отметим, что только на комплексной плоскости возможно задание сферы нулевого радиуса четырьмя точками без того, чтобы они все слились в одну.

3. Вычисление параметров сферы

Общее уравнение сферы имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Применяя аналитические формулы [35; 37; 38], в уравнение сферы последовательно подставляют координаты данных четырёх точек. В результате получится система четырёх уравнений с четырьмя неизвестными x_0, y_0, z_0, r. Решение системы уравнение позволяет получить значения координат центра $C(x_0, y_0, z_0)$ и величину радиуса rr искомой сферы $\Theta(C, r)$ [16; 17; 25].

Задача 5. Определить координаты центра и величину радиуса сферы $\Theta(C, R)$, заданной двумя парами мнимых точек с комплексными координатами $A_{12}(\pm 2i;0;0)$ и $B_{12}(3\pm i;\pm 3{,}5i;2)$.

Решение. Решение системы уравнений по условиям задачи 5 даёт параметры сферы $\Theta(C, r)$, где $C(0;3;\sqrt{7})$, $r=0$. Условия задачи определяют сферу, выродившуюся в точку.

Задача 6. Определить координаты центра и величину радиуса сферы $\Theta(C, R)$, заданной двумя парами мнимых точек с комплексными координатами $A_{12}(\pm 4i;0;0)$ и $B_{12}(3\pm i;2\pm 3{,}5i;\sqrt{7})$.

Решение. Решение системы уравнений по условиям задачи 6 даёт параметры сферы $\Theta(C, r)$, где $C(0; 2{,}8; -0{,}7)$, $r=2$. Условия задачи определяют действительную сферу.

Задача 7. Определить координаты центра и величину радиуса сферы $\Theta(C, R)$, заданной двумя парами мнимых точек с комплексными координатами $A_{12}(\pm 4i;0;0)$ и $B_{12}(2\pm 2i;4\mp 3{,}5i;4)$.

Решение. Решение системы уравнений по условиям задачи 7 даёт параметры сферы $\Theta(C, r)$, где $C\left(0;\frac{8}{3};2{,}2\right)$, $r=2i$, $i=\sqrt{-1}$. Условия задачи определяют мнимую сферу.

Предложение 2. *Плоскость всегда пересекает сферу по окружности (действительной, мнимой или, выродившейся в точку).*

4. Геометрические места точек

Как одна и та же задача может иметь различные формулировки, так одна и та же графическая конструкция может служить различным задачам [5; 6; 13]. Задача построения окружности по трём её точкам решает и задача построения геометрического места точек (ГМТ), равноудалённых от трёх данных точек, в комплексном случае от четырёх данных точек. Конструкции рис. 2 решает эту задачу для мнимых точек, конструкция рис. 3 решает задачу для действительных и мнимых точек. Если данные точки разнородные, то на конструкции отразится особенность того, что длина мнимых отрезков измеряется не так, как длина действительных отрезков. Геометрическое место точек будет состоять из одной единственной точки. Задача имеет одно решение для

2*D*-случая трёх точек, из которых две могут быть мнимыми, или для случая двух пар мнимых точек. Для 3*D*-случая четырёх однородных или разнородных точек задача также имеет только одно решение.

Заключение

В работе приведено построение сферы по четырём действительным точкам пространства и по аналогии построение сферы по двум парам мнимых сопряжённых точек. Построения сферы по паре действительных и паре мнимых сопряжённых точек, задача 3, укладывается в схему первых двух конструкций. Кроме того, в работе приведены решения семи вспомогательных задач на построение окружности по различным условиям. Эти 2*D*-задачи обозначены К3 и служат вспомогательными конструкциями в построении сферы как 3*D*-конструкции.

Задачи и упражнения по графическим построениям с включением мнимых элементов имеют целью укрепить уверенность исследователей в доступности восприятия мнимых образов как геометрических объектов и в возможности конструктивных построений на совмещённых эпюрах с участием мнимых образов наравне с действительными объектами — точек, прямых, окружностей [18; 21; 22; 31].

Принятая нами модель представления мнимых образов базирует на обычном евклидовом подходе, в отличие от векторного подхода [36]. Изображение мнимого образа обозначается или типом линии, или оговаривается в тексте, тогда появляется или прямое указание на природу изображаемого объекта, или указывается, что изображение есть носитель мнимого образа: прямая — носитель пары мнимых точек, штриховая окружность — носитель мнимой окружности, или оговаривается, что евклидова и псевдоевклидова плоскости совмещены в некую комплексную плоскость [32; 33]. Последнее условие конструктивно необходимо, поскольку евклидова плоскость и евклидово пространство не содержат мнимых элементов, а обсуждаемая в статье тема освещает именно такие образы. Геометру надо видеть фигуры — участники операции, тем более мнимые, и мы предоставляем ему такую возможность.

Мнимости в геометрии — это реальность [20; 27; 34] с учётом нового измерения. Без мнимых образов — точек, прямых, окружностей (предложения 1, 2), не было бы геометрии как научной теория, а был бы эмпирический предмет по евклидовой геометрии, скрупулёзно перечисляющий частные случаи в операции пересечения действительных фигур и категорически отрицающий мнимости. Мнимый результат должен будет восприниматься как отсутствие решения.

Литература

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии [Текст] / П.С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 382 с.
2. *Аргунов Б.И.* Геометрические построения на плоскости [Текст] / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк — М.: Просвещение, 1957. — 267 с.
3. *Балк М.Б.* Реальные применения мнимых чисел [Текст] / М.Б. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин. — Киев: Радянська школа, 1988. — 255 с.
4. *Волошинов Д.В.* Алгоритмический комплекс для решения задач с квадриками с применением мнимых геометрических образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 2. С. 3–32. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32.
5. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 4: геометрические места точек, равноудаленных от двух сфер [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, Д.С. Пех // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 12–29. —DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29.
6. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 22–34. — DOI:10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34.
7. *Гирш А.Г.* Комплексная геометрия — евклидова и псевдоевклидова [Текст] / А.Г. Гирш. — М.: Маска, 2013. — 216 с.
8. *Гирш А.Г.* Мнимости в геометрии [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 2. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/5583.
9. *Гирш А.Г.* Наглядная мнимая геометрия [Текст] / А.Г. Гирш. — М.: Маска, 2008. — 216 с.
10. *Гирш А.Г.* Новые задачи начертательной геометрии. Продолжение [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10.
11. *Гирш А.Г.* Окружности на комплексной плоскости [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 4. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12.
12. *Гирш А.Г.* О пользе мнимостей в геометрии [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 2. — С. 33–40. — DOI:10.12737/2308-4898-2020-33-40.
13. *Гирш А.Г.* Мнимые точки в декартовой системе координат [Текст] / А.Г. Гирш, В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 3. — С. 28–35. — DOI: 10.12737/article_5dce651d80b827.49830821.

14. *Графский О.А.* Введение мнимых элементов в начертательную геометрию: монография [Текст] / О.А. Графский. — Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2004. — 168 с.
15. *Графский О.А.* Моделирование мнимых элементов на плоскости [Текст]: монография / О.А. Графский. — Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2004. — 161 с.
16. *Иванов Г.С.* О задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 2. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/12163.
17. *Игнатьев С.А.* Повышение наглядности представления изучаемых в начертательной геометрии объектов [Текст] / С.А. Игнатьев, Э.Х. Муратбакеев, М.В. Воронина // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 44–53. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53.
18. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа [Текст] / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
19. *Кириллов А.А.* Что такое число? [Текст] / А.А. Кириллов — М.: Изд-во Физматлит, 1993. — 80 с.
20. Комплексная геометрия и др. // А.Г. Гирш. — URL: http://www.anhirsch.de (дата обращения: 11.09.2022).
21. *Короткий В.А.* Мнимые линейные элементы в алгебре, геометрии и компьютерной графике [Текст] / В.А. Короткий // Прикладная математика и фундаментальная информатика. — 2019. — Т. 6. — № 2. — С. 34–48. — DOI: 10.25206/2311-4908-2019-6-2-34-48.
22. *Короткий В.А.* Мнимые прямые в декартовой системе координат [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 4. — С. 5–17. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-5-17.
23. Международная интернет-конференция «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: проблемы, традиции и инновации», Пермь, 2015. — URL: http://dgng.pstu.ru/conf2015
24. *Пеклич В.А.* Мнимая начертательная геометрия: учеб. пособие [Текст] / В.А. Пеклич. — М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. — 104 с.
25. *Сальков Н.А.* Место начертательной геометрии в системе геометрического образования технических вузов [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 53–61. — DOI: 10.12737/21534.
26. *Сальков Н.А.* Об изображениях [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-3-10.
27. *Суворов Ф.М.* Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определяемых с помощью воображаемых точек и касательных [Текст] / Ф.М. Суворов. — Казань: Типография императорского Университета, 1884. — 130 с.
28. *Умбетов Н.С.* Демонстрация общих элементов инволюции на простом примере [Текст] / Н.С. Умбетов // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 27–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-27-34.
29. *Флоренский П.А.* Мнимости в геометрии: расширенные области двухмерных образов геометрии (опыт нового истолкования мнимостей) [Текст] / П.А. Флоренский. — 2-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 72 с.
30. *Четверухин Н.Ф.* Начертательной геометрии. [Текст] / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова, А.М. Тевлин, Г.И. Федоров — М.: Высшая школа, 1963. — 420 с.
31. *Яглом И.М.* Комплексные числа и их применение в геометрии [Текст] / И.М. Яглом. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 192 с.
32. Duden Rechnen und Mathematik. Mannheim, Wien, Zürich: Dudenverlag, 2000. 720 S.
33. Girsch A. Extension of the 'Villarceau-Sektion' to Surfaces of Revolution with a Generating Conic // Jurnal for Ceometry and Graphics, 6 (2000/2), p. 121–132.
34. Imaginary Numbers are Real 13 Videos. URL: https://www.youtube.com/watch?v=T647CGsuOVU&list=PLiaHhY-2iBX9g6KIvZ_703G3KJXapKkNaF
35. Hirsch A. Extension of the 'Villarceau-Sektion' to Surfaces of Revolution with a Generating Conic // Jurnal for Geometry and Graphics, V. 6 (2000), I. 2, pp. 121–132.
36. *Huybrechts D.* Complex Geometry, Springer Verlag, 2005.
37. Reye Th. Geometrie der Lage. 1. Abteilung. Leipzig, 1882. 215 p.
38. *Stachel H.* Remarks on A. Hirsch's Paper conserning Villatceau-Sections. Jurnal for Geometry and Graphics. 2002. V. 6, pp. 133–139.

References

1. Aleksandrov P.S. *Lektsii po analiticheskoy geometrii* [Lectures on analytic geometry]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 382 p. (in Russian)
2. Argunov B.I., Balk M.B. *Geometricheskiye postroyeniya na ploskosti* [Geometric constructions on the plane]. Moscow: Prosveshcheniye Publ., 1957. 267 p. (in Russian)
3. Balk M.B., Balk G.D., Polukhin A.A. *Real'nyye primeneniya mnimykh chisel* [Real applications of imaginary numbers]. Kiyev, Radyans'ka shkola Publ., 1988. 255 p. (in Russian)
4. Voloshinov D.V. Algoritmicheskiy kompleks dlya resheniya zadach s kvadrikami s primene-niyem mnimykh geometricheskikh obrazov [Algorithmic complex for solving problems with quadrics using imaginary geometric images]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 2, pp. 3–32. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32. (in Russian)
5. Vyshnepol'skij V.I., Zavarihina E.V., Pekh D.S. Geometricheskie mesta tochek, ravnootstoyashchih ot dvuh zadannyh geometricheskih figur. chast' 4: geometricheskie mesta tochek, ravnoudalennyh ot dvuh sfer [Geometric points of points equidistant from two given geometric shapes. Part 4: geometric points of points equidistant from two spheres]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 3, pp. 12–29. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29. (in Russian)

Vyshnepol'skij V.I., Zavarihina E.V., Egiazaryan K.T. Geometricheskie mesta tochek, ravnootstoyashchih ot dvuh zadannyh geometricheskih figur. chast' 5: geometricheskie mesta tochek, ravnoudalennyh ot sfery i ploskosti [Geometric locus of points equidistant from two given geometric figures. part 5: locus of points equidistant from sphere and plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 4, pp. 22–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34. (in Russian)

6. Girsh A.G. *Kompleksnaya geometriya — evklidova i psevdo-evklidova* [Complex geometry — Euclidean and pseudo-Euclidean]. Moscow: IPTs «Maska» Publ., 2013. 216 p. (in Russian)
7. Girsh A.G. Mnimosti v geometrii [Imaginations in geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphic]. 2014, V. 2, I. 2, pp. 3–8. DOI: 10.12737/5583. (in Russian)
8. Girsh A.G. *Naglyadnaya mnimaya geometriya* [Visual imaginary geometry]. Moscow: IPTs "Maska" Publ., 2008. 216 p. (in Russian)
9. Girsch A.G. Novye zadachi nachertatel'noj geometrii. Prodolzheniye [New Descriptive Geometry Problems. Continuation]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 4, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10. (in Russian)
10. Girsh A.G. Okruzhnosti na kompleksnoy ploskosti [Circles in the complex plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphic]. 2020, V. 8, I. 4, pp. 3–12. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12. (in Russian)
11. Girsh A.G. O pol'ze mnimostey v geometrii [On the Use of Imaginations in Geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphic]. 2020, V. 8, I. 2, pp. 33–40. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-33-40. (in Russian)
12. Girsh A.G., Korotkij V.A. Mnimye tochki v dekartovoj sisteme koordinat [Imaginary points in a Cartesian coordinate system]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019. V. 7. I. 3. pp. 28–35. DOI: 10.12737/artcle_5dce651d80b827.49830821. (in Russian)
13. Grafskij O.A. *Vvedenie mnimyh elementov v nachertatel'nuyu geometriyu* [The introduction of imaginary elements in descriptive geometry]. Khabarovsk, GOU VPO "Dalnevost. State university of communication lines. Ministry of Railways of Russia" Publ., 2004. 168 p. (in Russian)
14. Grafskii O.A. *Modelirovanie mnimyh elementov na ploskosti* [Modeling imaginary elements on a plane]. Khabarovsk, Publishing house of dvgups Publ., 2004. 161 p. (in Russian)
15. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. O zadachakh nachertatel'noy geometrii s mnimymi resheniyami [On the problems of descriptive geometry with imaginary solutions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphic]. 2015, V. 3, I. 2, pp. 3–8. DOI: 10.12737/12163. (in Russian)
16. Ignat'ev S.A., Muratbakeev E.H., Voronina M.V. Povysheniye naglyadnosti predstavleniya izuchayemykh v nachertatel'noy geometrii ob"yektov [Improving the visibility of the representation of objects studied in descriptive geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 1, pp. 44–53. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53. (in Russian)
17. Kantor I.L., Solodovnikov A.S. *Giperkompleksnyye chisla* [Hypercomplex numbers]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 144 p. (in Russian)
18. Kirillov A.A. *Chto takoye chislo?* [What is a number]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1993. 80 p. (in Russian)
19. Kompleksnaya geometriya i dr. // A.G. Girsh [Complex geometry, etc. // A.G. Girsh] URL: http://www.anhirsch.de (accessed: 11.09.2022). (in Russian)
20. Korotkij V.A. Mnimye linejnye elementy v algebre, geometrii i komp'yuternoj grafike [Imaginary linear elements in algebra, geometry and computer graphics]. *Prikladnaya matematika i fundamental'naya informatika* [Applied Mathematics and Fundamental Computer Science]. 2019, V. 6, I. 2, pp. 34–48. DOI: 10.25206/2311-4908-2019-6-2-34-48. (in Russian)
21. Korotkij V.A. Mnimye pryamye v dekartovoj sisteme koordinat [Imaginary straight lines in a Cartesian coordinate system]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019, V. 7, I. 4, pp. 5–17. DOI: 10.12737/artcle_5dce651d80b827.49830821. (in Russian)
22. *Mezhdunarodnaya internet-konferentsiya «Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskom vuze: problemy, traditsii i innovatsii»* [International Internet conference «Problems of the quality of graphic training of students in a technical university: problems, traditions and innovations»]. Perm, 2015. URL: http://dgng.pstu.ru/conf2015 (in Russian)
23. Peklich V.A. *Mnimaya nachertatel'naya geometriya* [Imaginary Descriptive Geometry]. Moscow, ASV Publ., 2007. 104 p. (in Russian)
24. Sal'kov N.A. Mesto nachertatel'noj geometrii v sisteme geometricheskogo obrazovaniya tekhnicheskih vuzov [Place of descriptive geometry in the system of geometric education of technical universities]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 3, pp. 53–61. DOI: 10.12737/21534. (in Russian)
25. Sal'kov N.A. Ob izobrazheniyakh [About images]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 2, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-3-10. (in Russian)
26. Suvorov F.M. *Ob izobrazhenii voobrazhayemykh tochek i voobrazhayemykh pryamykh na ploskosti i o postroyenii krivykh liniy vtoroy stepeni, opredelyayemykh s pomoshch'yu voobrazhayemykh tochek i kasatel'nykh* [On the representation of imaginary points and imaginary lines on the plane and on the construction of curved lines of the second degree, determined using imaginary points and tangents]. Kazan, Tipografiya imperatorskogo Universiteta Publ., 1884. 130 p. (in Russian)
27. Umbetov N.S. Demonstratsiya obshchikh elementov involyutsii na prostom primere [Demonstration of common elements of involution with a simple example]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 2, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-3-10. (in Russian)

28. Florenskij P.A. *Mnimosti v geometrii: rasshirennyye oblasti dvukhmernykh obrazov geometrii* [Mnimosti in geometry: extended areas of 2D geometry images]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 72 p. (in Russian)
29. Chetverukhin N.F., Levitskiy V.S., Z.I. Pryanishnikova Z.I., Tevlin A.M., Fedorov G.I. *Nachertatel'naya geometriya* [Descriptive geometry]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1963. 420 p. (in Russian)
30. Yaglom I.M. *Kompleksnyye chisla i ikh primeneniye v geometrii* [Complex numbers and heir application in geometry]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 192 p. (in Russian)
31. Duden Rechnen und Mathematik. Mannheim, Wien, Zürich: Dudenverlag, 2000. 720 p.
32. Girsch A. Extension of the 'Villarceau-Sektion' to Surfaces of Revolution with a Generating Conic // Jurnal for Ceometry and Graphics, 6 (2000/2), pp. 121–132.
33. Imaginary Numbers are Real 13 Videos. URL: https://www.youtube.com/watch?v=T647CGsuOVU&list=PLiaHhY-2iBX9g6KIvZ_703G3KJXapKkNaF
34. Hirsch A. Extension of the 'Villarceau-Sektion' to Surfaces of Revolution with a Generating Conic // Jurnal for Geometriy and Graphics, 2000, V. 6, I. 2, pp. 121–132.
35. Stachel H. Remarks on A. Hirsch's Paper conserning Villatceau-Sections. Jurnal for Geometriy and Graphics. 2002, V. 6, pp. 133–139.
36. Reye Th. Geometrie der Lage. 1. Abteilung. Leipzig, 1882, 215 p.
37. Stachel H. Remarks on A. Hirsch's Paper conserning Villatceau-Sections. Jurnal for Geometry and Graphics. 2002, V. 6, pp. 133–139.