Об одном пересечении тора со сферой

About one intersection of a torus with a sphere

Сальков Н.А.
канд. техн. наук, профессор кафедры архитектуры Московского государственного академического художественного института имени В.И. Сурикова
e-mail: nikolaysalkov@mail.ru

Salkov N.A.
PhD in Engineering, Professor of the Department of architecture of the Moscow state academic art Institute named after V. I. Surikov

Аннотация
В общем случае пересечение тора со сферой дает линию пересечения восьмого порядка. В предлагаемой статье рассматривается частный случай пересечения тора со сферой, в результате которого получаются две окружности.
Ключевые слова: начертательная геометрия; проецирование; пересечение; тор; сфера.

Abstract
In general, the intersection of a torus with a sphere gives an intersection line of the eighth order. In the proposed article, a special case of the intersection of a torus with a sphere is considered, as a result of which two circles are obtained.
Keywords: descriptive geometry; projection; intersection; torus; sphere.

В любом учебнике по начертательной геометрии имеется упоминание о теореме Монжа, сообщающей о случае двойного соприкосновения поверхностей второго порядка (1-7). Здесь мы рассмотрим двойное соприкосновение тора со сферой.

В общем случае пересечение тора со сферой дает линию пересечения 8-го порядка. Мы же будем иметь дело с частным случаем пересечения.

Известно, что через любую точку тора (рис. 1, точка *A*) можно провести четыре окружности: плоскость одной параллельна плоскости экватора и является параллелью (рис. 1, окружность *m*), плоскость второй проходит через ось вращения тора и поэтому является меридианом (рис. 1, окружность *n*), и еще две окружности (рис. 1, окружности *k* и *d*) являются окружностями Вилларсо.

Таким образом, тор имеет четыре семейства окружностей (рис. 1).

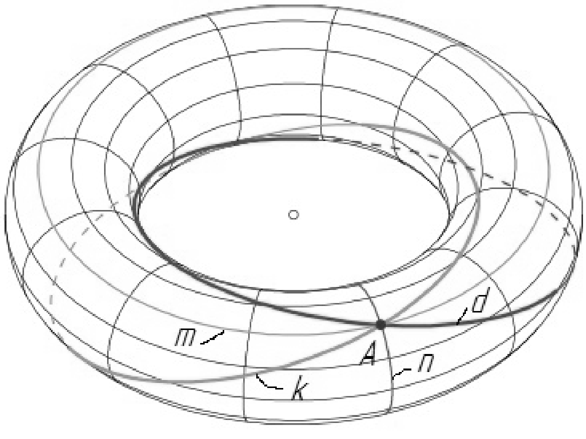

Рис. 1.

Рассмотрим рис. 2.

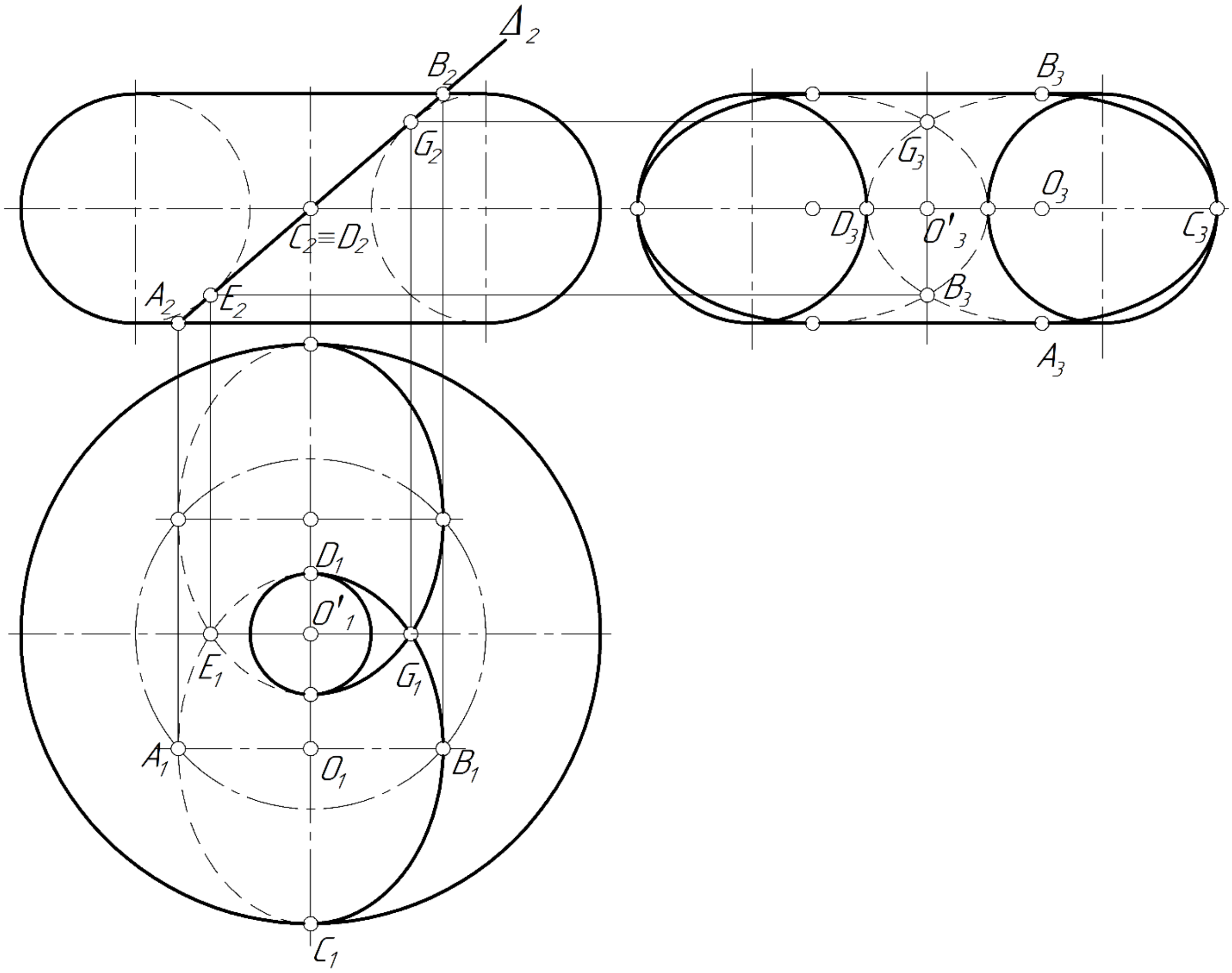

Рис. 2.

Здесь показано известное получение кругов (окружностей) Вилларсо: сечение тора плоскостью *Δ*, соприкасающейся с тором в двух точках *E* и *G*, является двумя пересекающимися в этих точках окружностями. Если на плоскости проекций Π_2 сечение представляет собой отрезок A_2B_2, то на других проекциях Отрезки *AB* и *CD* выглядят как большие (C_1D_1 и C_3D_3) и малые (A_1B_1 и A_3B_3) оси эллипсов.

Если одна плоскость *Δ*, имеющая двойное соприкосновение с тором, дает две окружности Вилларсо, то две таких плоскости *Δ* и *Σ* (см. рис. 3), симметричные относительно плоскости экватора (или горла, что одно и то же), дают четыре окружности.

Возьмем к рассмотрению ближайшие к наблюдателю окружности: *ACBD* и *A'C'B'D'* и рассмотрим их. Эти окружности, полученные при помощи симметричных относительно плоскости экватора плоскостей *Δ* и *Σ*, имеют точки пересечения *C* и *D* (см. рис. 3). По линии *CD*, проходящей через центр тора, пересекаются плоскости *Δ* и *Σ*. Отрезок *CD* принадлежит плоскости симметрии тора – плоскости экватора.

Центры окружностей совпадают и находятся в точке *O*.

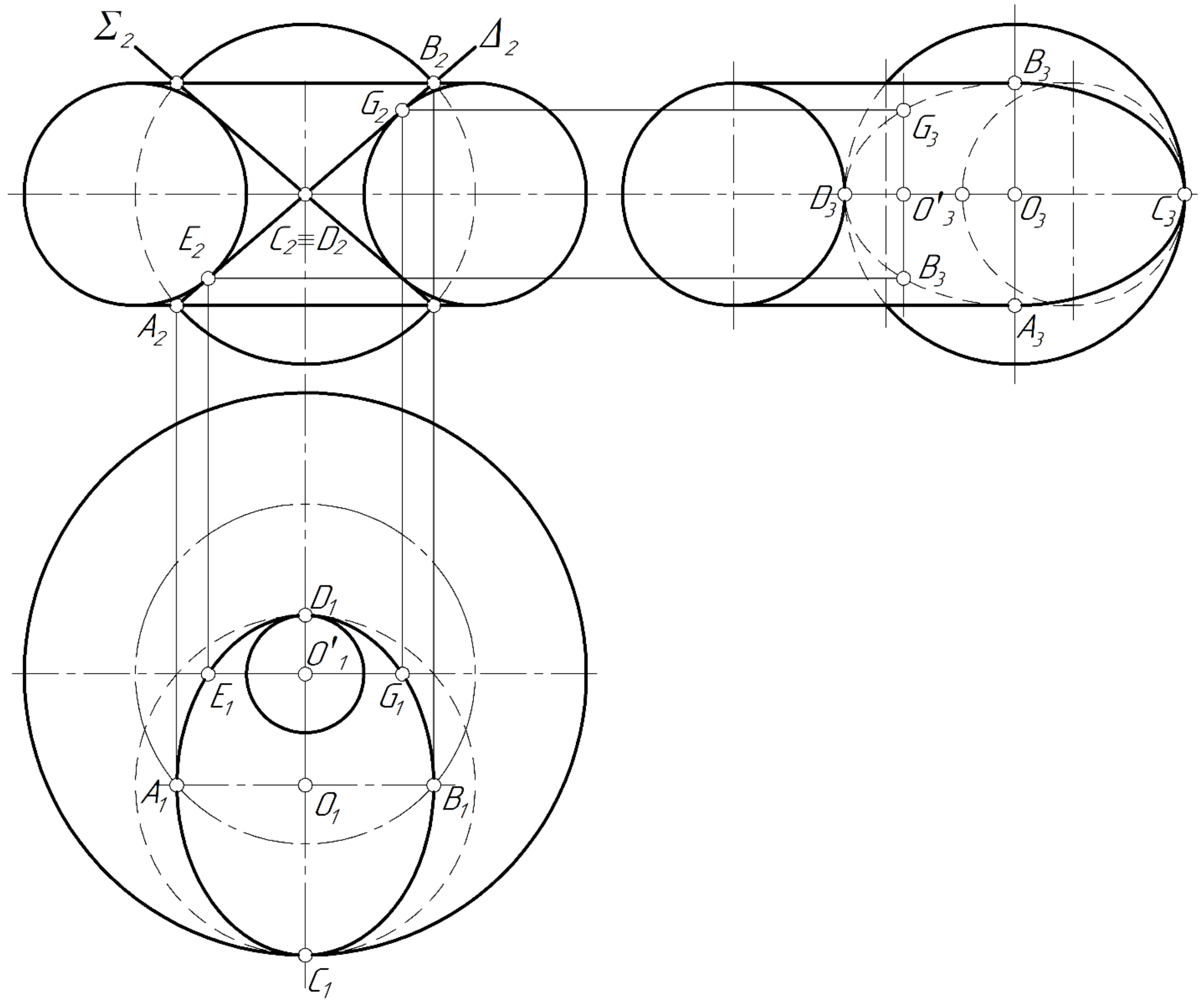

Рис. 3.

Введем в систему, показанную на рис. 3, сферу. Поместим центр введенной сферы в точку O. Радиус сферы пусть будет равен отрезку O_1C_1. То есть, радиус сферы равен радиусу окружностей сечения – кругов Вилларсо. В этом случае обе окружности будут принадлежать поверхности сферы, а потому являться большими окружностями введенной сферы. Точки C и D будут являться точками соприкосновения введенной сферы с тором, а сама сфера, очевидно, будет пересекать тор по двум ранее полученным при помощи соприкасающихся в двух точках к тору и пересекающих тор окружностям.

Итак, в описанном случае тор пересекается со сферой по двум окружностям, являющимися большими окружностями сферы, поскольку по построению эти окружности принадлежат как сфере, так и тору. При этом две окружности принадлежат разным семействам. Это означает, что, если сфера будет перемещаться таким образом, чтобы ее центр перемещался по окружности с радиусом OO', расположенной в плоскости экватора (горла), то получим в результате сечений оба семейства рассматриваемых окружностей.

Важным моментом является соприкосновение сферы с тором в двух точках, одна из которых (точка D) принадлежит горлу тора, а вторая (точка C) – его экватору. При этом точки должны располагаться по разные стороны от центра тора O' и находиться в плоскости экватора (горла) тора.

Если же сфера будет соприкасаться с тором в точках, принадлежащих только горлу или только экватору, то получим всего лишь касание сферы или по горлу, или по экватору соответственно. При касании тора в точках C и E, касание будет по одной из меридиан.

Во всех перечисленных случаях пересечения не будет, будет лишь касание. Поэтому последние три варианта не рассматриваем.

Определим, по какому радиусу должна перемещаться секущая сфера. Для этого рассмотрим рис. 4.

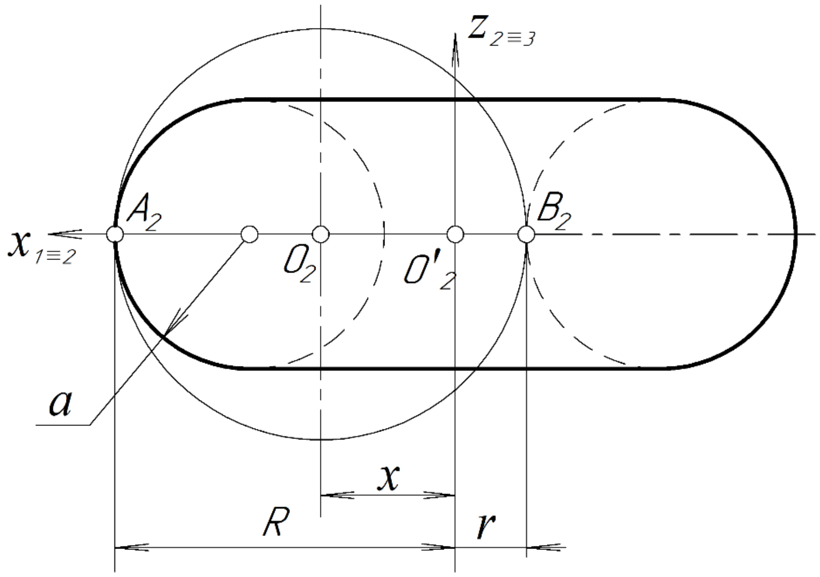

Рис. 4.

Расстояние x от центра тора O'_2 до центра O_2 соприкасающейся с ним в двух точках сферы определяется как (см. рис. 4)

$$O'_2O_2 = A_2B_2/2 - O'_2B_2 = (A_2O'_2 + O'_2B_2)/2 - O'_2B_2.$$

Или по формуле:

$$x=(R+r)/2-r=(R-r)/2=a,$$

где R – радиус экватора тора;

r – радиус горла тора;

a – расстояние от центра тора до центра соприкасающейся с ним в двух точках сферы.

Окончательно:

$$x=a.$$

То есть, радиус окружности, по которой перемещается сфера двойного соприкосновения, равен радиусу окружности, образующей тор.

Отсюда, поскольку тор является частным случаем циклиды Дюпена, то и у циклиды также должно быть четыре семейства окружностей. Два семейства детально рассматривались в работах [1; 2; 3]. Эти семейства являются основополагающими для формирования циклиды, а вот два других – об этом и поговорим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бубенников А.В.* Начертательная геометрия [Текст] / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высшая школа, 1973. – 416 с.

2. Гордон В.О. Курс начертательной геометрии [Текст] / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Наука, 1977. – 268 с.

3. *Иванов Г.С.* Начертательная геометрия [Текст] / Г.С. Иванов. – М.: ФГБОУ ВПО МГУЛ, 2012. – 340 с.

4. Колотов С.М. Курс начертательной геометрии [Текст] / С.М. Колотов, Е.Е. Дольский, В.Е. Михайленко и др. – Киев: Гос. издательство литературы по строительству и архитектуре УССР, 1961. – 316 с.

5. Пеклич В.А. Начертательная геометрия [Текст] / В.А. Пеклич. – М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2007. – 272 с.

6. *Сальков Н.А*. Начертательная геометрия: базовый курс [Текст]: учеб. пособие / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2013. — 184 с.

7. Фролов С.А. Начертательная геометрия [Текст] / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.