

УДК 51-74

DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-13-25

Л.А. Жихарев

Ассистент,

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

Применение кривой Коха для повышения прочности деталей самолётов

Аннотация. Фракталы образуются итеративным повторением алгоритма построения на разных уровнях масштаба. Использование такого алгоритма, повышающего прочностные свойства при создании конструкции, будет усиливать эти свойства с каждой итерацией. В статье применён принцип кривой Коха. Замена сжимаемой пластины четырьмя новыми, соединёнными под углами, повышает устойчивость конструкции.

В данной статье теоретически подтверждается повышение устойчивости пластины Коха как на уровне отдельных пластин, так и на уровне сегментов фрактала и конструкции в целом (общая устойчивость). Установлены закономерности изменения устойчивости на разных уровнях масштаба с ростом числа итераций. Также проведено сравнение вариантов пластин Коха с разными коэффициентами подобия.

Теоретические результаты подтверждены при помощи симуляций в САЕ-системе SolidWorks – проведён конечно-элементный анализ устойчивости компьютерных моделей пластин Коха. Построенные по полученным данным графики соответствуют теоретическим прогнозам зависимости устойчивости от геометрических параметров пластины Коха.

В качестве иллюстрации применимости такого рода фрактальных структур в конструировании деталей самолётов разработана фрактальная модификация типовой детали – рельса предкрылка. Предложенная модификация рельса также была исследована при помощи компьютерных симуляций. Сравнение прочностных свойств детали стандартной формы и её аналога с включённой фрактальной структурой показало преимущество последней: при определённых значениях массы и схеме нагружения фрактальная модификация показала в два раза большую устойчивость. Это позволяет снизить массу стандартного рельса предкрылка на 5% без потери прочностных свойств.

Проведённое в статье исследование и полученные результаты иллюстрируют практическую значимость дальнейших исследований пространственных геометрических фракталов и их применение в модификации геометрии деталей и конструкций.

Ключевые слова: фракталы, кривая Коха, сжимающая нагрузка, потеря устойчивости.

L.A. Zhikharev

Assistant,

Moscow Aviation Institute (National Research University),

4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russia

Application of the Koch Curve to Increase the Strength of Aircraft Parts

Abstract. Fractals are formed by iterative repetition of the construction algorithm at different scale levels. The use of such an algorithm, which increases the strength properties during the construction of the structure, will strengthen these properties with each iteration. The Koch curve principle is applied in the article. Replacing the compressible plate with four new ones connected at angles increases the stability of the structure.

This article theoretically confirms the increase in the stability of the Koch plate both at the level of individual plates and at the level of fractal segments and the structure as a whole (general stability). Regularities of stability changes at different scale levels with an increase in the number of iterations are established. A comparison of variants of Koch plates with different similarity coefficients is also carried out.

The theoretical results were confirmed using simulations in the CAE system Solid-Works – a finite element analysis of the stability of computer models of the Koch plates was carried out. The graphs constructed from the obtained data correspond to the theoretical predictions of the dependence of stability on the geometric parameters of the Koch plate.

As an illustration of the applicability of this kind of fractal structures in the design of aircraft parts, a fractal modification of a typical part, the slat rail, has been developed. The proposed modification of the rail was also investigated using computer simulations. A comparison of the strength properties of a standard-shaped part and its analogue with a fractal structure included showed the advantage of the latter: with certain values of mass and loading scheme, the fractal modification showed twice as much stability. This reduces the weight of the standard slat rail by 5% without loss of strength properties.

The research carried out in the article and the results obtained illustrate the practical significance of further studies of spatial geometric fractals and their application in modifying the geometry of parts and structures.

Keywords: fractals, Koch curve, compressive load, loss of stability.

Введение

В статье продолжается исследование геометрического фрактального метода повышения удельной прочности деталей, представленного в работах [7; 33–35]. В статье [34] подтверждено повышение удельной устойчивости модели предфрактала, собранного из стержней, при увеличении числа итераций. В работе [35] представлена попытка применения фрактальной конструкции для модификации детали самолёта. Оба исследования основаны на использовании алгоритма треугольника Серпинского. В данной статье предлагается применение конструкции, созданной по принципу другого фрактала – кривой Коха.

Одними из первых работы, посвящённые использованию фрактальной геометрии для создания прочных конструкций, были выполнены Д. Рейно-Киркхоупом. Результаты исследований представлены в статьях [26; 27]. В статье [28] фрактал Такаги применяется для разработки конструкции свода крыши. Помимо статических нагрузок, фрактальные

конструкции эффективно воспринимают и ударные воздействия. В источнике [25] сообщается о преимуществах губки Менгера при поглощении энергии удара за счёт её равномерного распределения по всем элементам модели. Схожие результаты имеются и для других фракталов [24; 29; 30]. Схожими преимуществами обладают фрактальные трубки, построенные по принципу снежинки Коха [31]. В данной работе исследуется возможность применения кривой Коха для предотвращения потери устойчивости сжимаемой пластины. Также предложено использование такой геометрии для модификации деталей самолётов. Это позволяет повысить их жёсткость либо снизить массу и расход материала.

Постановка задачи исследования

Одним из способов снижения веса деталей является совершенствование их геометрической формы. В современной науке эта задача наиболее часто решается за счёт оптимизации топологии (ОТ) [8; 21; 32]. Однако данный метод плохо справляется с предотвращением общей и местной потери устойчивости, поскольку получаемая при ОТ форма зачастую сложна для оценки устойчивости, а сам процесс оптимизации формы нацелен на повышение прочности. Но при малой плотности заполнения детали её части могут разрушаться именно за счёт потери устойчивости. В этом случае эффективными оказываются фрактальные методы, предлагающие итеративно повышать устойчивость всех элементов детали или конструкции за счёт повторения удачного геометрического приёма. Задачей данного исследования является оценка эффективности применения конструкций, основанных на геометрии кривой Коха, для повышения удельной прочности или снижения массы силовых элементов деталей. Для примера выбраны типовые детали летательных аппаратов, поскольку именно в авиации вопрос весовой эффективности стоит особенно остро.

Применение кривой Коха в этих целях требует предварительного сравнения вариантов фрактала с различными коэффициентами подобия, оценки преимуществ и недостатков каждого из них. Данное сравнение осуществимо при помощи графиков изменения массы и устойчивости фрактальных конструкций с ростом числа итераций. Графики строятся по формулам, сочетающим выражения теории сопротивления материалов и итерационные фрактальные закономерности.

Более детальное определение прочностных свойств конструкций, построенных по принципу кривой Коха, требует исследования конечно-элементных моделей в CAD- и CAE-программах. В этом исследо-

вании применяется CAD-система *SolidWorks* и CAE-приложение *SolidWorks Simulation*.

Последняя часть статьи посвящена исследованию твердотельных моделей фрактальных деталей и их сравнению с аналогами традиционной формы.

Теоретические выкладки

При сжатии прямоугольной пластины, толщина которой много меньше ширины и высоты ($a \geq \delta$ и $b \geq \delta$), разрушение происходит за счёт вспучивания центральной части. Основной идеей применения кривой Коха является итеративная замена сжимаемой пластины четырьмя новыми. Ширина пластин новой итерации в три раза меньше пластины предыдущей итерации. Это повышает устойчивость при сжатии. Иными словами, переход на одну итерацию (рис. 1, а) сводится к переходу от одной пластины к четырём (рис. 1, б). Все пластины в модели (рис. 1, б) закреплены через заделку по 4 кромкам.

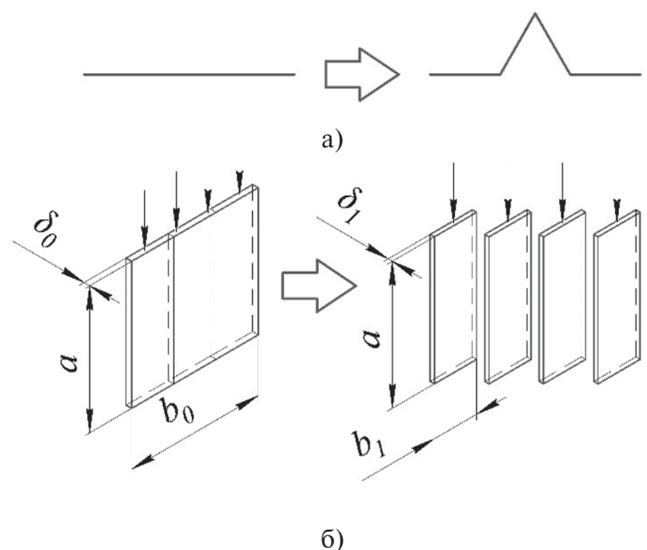


Рис. 1. Повышение итерации пластины Коха на единицу (а) и переход с аналогичным приростом устойчивости (б)

Предложенная схема работоспособна лишь до тех пор, пока разрушение происходит за счёт потери устойчивости (вспучивания) отдельных пластин, и рёбра жёсткости (точки А и В, рис. 2) остаются статичными. Назовём данную модель устойчивости моделью А.

Для модели А справедливы расчёты простых пластин. Критическое напряжение потери устойчивости отдельной пластины определяет выражение [15]:

$$\sigma_{кр} = K_3 \frac{\pi}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2, \tag{1}$$

где K_3 – усреднённый коэффициент устойчивости, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости материала, δ – толщина, b – ширина пластины [15].

При использовании одного материала ν и E – константы. K_3 определяется способом закрепления, характером нагрузки и отношением высоты пластины к ширине. Способ закрепления с ростом числа итераций не меняется, но соотношение a/b (длина/ширина) каждый раз утраивается. Эта зависимость определена экспериментально [2], но для металлических пластин (сплавы алюминия) при $a/b > 3 K_3$ меняется незначительно, так что при учёте неизменной схемы закрепления пластин в приближённых расчётах будем считать его постоянным.

Критическая нагрузка получается при умножении (1) на площадь сечения пластины, т.е. на δb . С учётом констант получим:

$$P_{кр} = K \frac{\delta^3}{b} \times const,$$

Тогда местная устойчивость пластины (устойчивость отдельных сегментов – рис. 1, б) с каждой итерацией должна возрастать в три раза. При этом количество пластин увеличивается в четыре раза. Формула прироста критической нагрузки с каждой итерацией:

$$\Delta P_n = \frac{P_{(n+1)}}{P_n} = \frac{4KE \frac{\delta^3}{k^2} \times const}{KE \frac{\delta^3}{k} \times const} = \frac{4}{k},$$

где k – коэффициент подобия фрактала. Для кривой Коха $\Delta P_n = 12$.

Помимо классического варианта кривой Коха ($k = 1/3$), существуют и другие варианты, два из которых представлены на рис. 2. В общем случае для данного фрактала допустимы все значения коэффициента подобия k в интервале от 0,25 до 0,5 [9; 14], но в данном исследовании ограничимся двумя представленными.

В соответствии с формулой (3) для варианта кривой Коха с $k = 0,45$, $\Delta P_n = 8,8(8)$, а для $k = 0,45 - \Delta P_n = 14,54(54)$. Очевидно, чем меньше k , тем больше выигрыш в устойчивости при каждой итерации (в рамках модели А).

Применение пластин Коха (здесь и далее так называем пластину, выгнутые по кривой Коха) при неизменных габаритах требует учёта возрастания их массы с каждой итерацией. Для сохранения постоянства массы необходимо уменьшать толщину пластины пропорционально возрастанию длины кривой. Расчётная толщина:

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n}{4k},$$

Тогда с учётом (2) и (3) прирост критически нагрузки при неизменной массе:

$$\Delta P_n = \frac{1}{(4k)^3} \times \frac{4}{k} = \frac{1}{16k^4}.$$

Стоит учесть, что b_n уменьшается с ростом n значительно быстрее, чем δ_n при любом k , а это значит, что увеличивается отношение толщины пластины к ширине. Благодаря этому в очередной итерации схема потери устойчивости меняется и происходит выпучивание целого сегмента целиком. Устойчивость в этом случае пропорциональна моменту инерции всего сегмента (рис. 3) [3; 16]. Обозначим такой способ потери устойчивости моделью Б.

При малом отношении δ/b , момент инерции относительно оси x рассчитывается через сумму моментов четырех прямоугольников со сторонами $\delta \times b$. Ось x располагается между центрами масс отдельных прямоугольников (точки M и L , см. рис. 3).

При такой постановке задачи момент инерции сечения приближённо (не учитывается геометрия элементов в местах соединения прямоугольников) определяется по формуле:

$$J_x = \frac{b\delta}{18} \left(\delta^2 + b^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{\delta^2}{9} + \frac{1}{12} \right) \right).$$

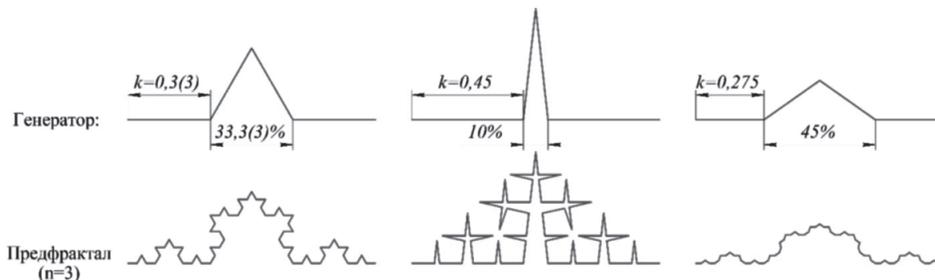


Рис. 2. Варианты кривой Коха с коэффициентами подобия $k = 1/3; 0,45$ и $0,275$

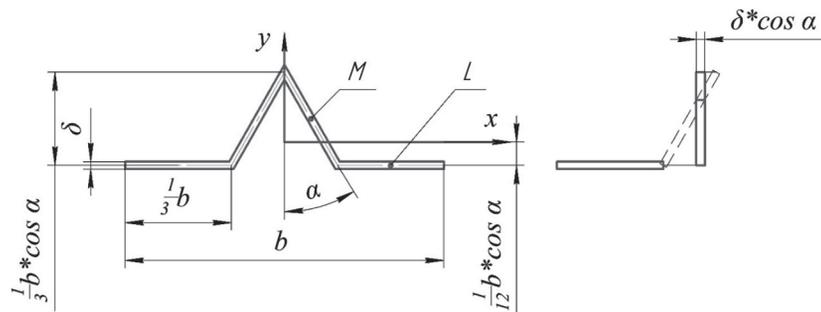


Рис. 3. Определение момента инерции сечения сегмента пластины Коха относительно оси

Аналогичным образом определяется момент инерции и для последующих итераций данного сегмента. Расчёты показывают, что при постоянной площади момент инерции сечения снижается при переходе, указанном на рис. 4.

Более точно моменты инерции по замкнутым контурам сечений рассчитываются в программе КОМПАС 3D. На рис. 5 представлены графики момента инерции сечений при значениях $\delta = 1$ и $b = 100$.

В рамках модели Б устойчивость падает с ростом числа итераций. Это происходит за счёт уменьшения толщины пластин.

В действительности после потери актуальности модели А потеря устойчивости может происходить на любых уровнях масштаба фрактальной пластины, однако во всех случаях при дальнейшем росте числа итераций устойчивость всей пластины должна снижаться.

Резюмируя теоретический материал, можно озвучить два вывода:

- 1) в случае местной потери устойчивости (модель А) с ростом числа итераций устойчивость всей пластины Коха растёт;
- 2) после перехода от потери устойчивости отдельных пластин к потере устойчивости на разных уровнях масштаба устойчивость всей пластины Коха падает с увеличением числа итераций

Таким образом, на графике зависимости устойчивости пластины Коха от числа итераций будет наблюдаться экстремум.

Более точные исследования пластин Коха и сравнение их вариантов при разных k и n возможны с использованием компьютерной симуляции нагружения твердотельных моделей.

Изолированные сжимающие нагрузки на пластины в деталях механизмов встречаются не так часто.

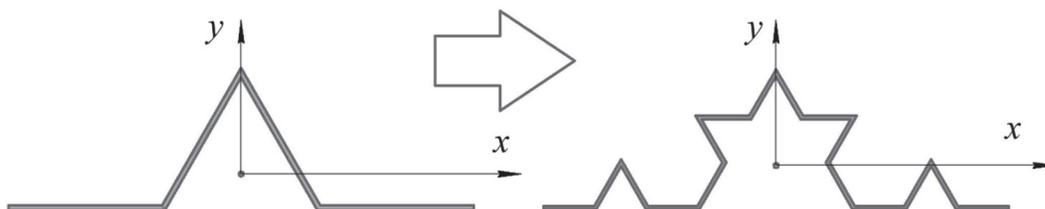


Рис. 4. Первая и вторая итерации сегмента кривой Коха

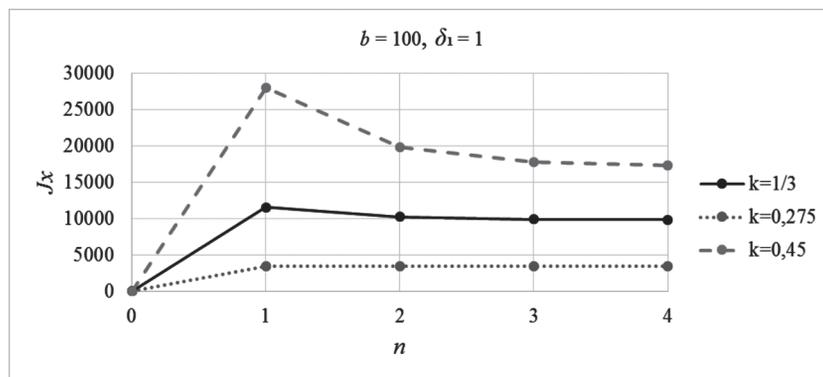


Рис. 5. Зависимость моментов инерции от итерации пластин Коха

В качестве примера применения пластин Коха на практике выбрана перемычка двутавра: при нагрузке на изгиб в плоскости перемычки эта пластина испытывает сжимающее воздействие. Подтверждение эффекта возрастания устойчивости при замене перемычки двутавра пластиной Коха также требует экспериментальных исследований.

Результаты экспериментов

Исследование устойчивости пластин Коха проведено на моделях с рядом общих параметров формы. Пластина нулевой итерации имела ширину $b = 100$ мм, высоту $a = 300$ мм и толщину $\delta = 0,2$ мм. Нижняя и боковые кромки пластины закреплялись через заделку, а воздействие сжимающей нагрузки проводилось через фланец – квадратную призму со стороной 150 мм и высотой в 100 мм (рис. 6), свободно скользящую вдоль боковых граней. Фланец такой толщины нужен для того, чтоб его деформации не повлияли на устойчивость пластины Коха.

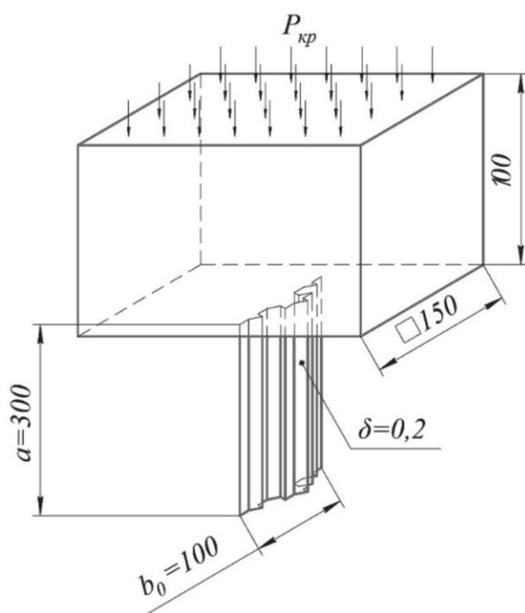


Рис. 6. Схема твердотельной модели, нагружаемой в компьютерной симуляции SolidWorks

Определение прочностных характеристик проводилось методом конечных элементов [1; 11; 19; 20] с использованием одного материала (алюминиевый сплав 7075-T6 (SN)) и при постоянных параметрах сетки (рис. 7). Параметры сетки конечных элементов задавались в соответствии с требованиями точности расчётов [8; 10].

Полученные данные об относительной критической нагрузке, нормированной по нагрузке для нефрактальной пластины ($P_{кр}^*$), сведены в табл. 1. Первые

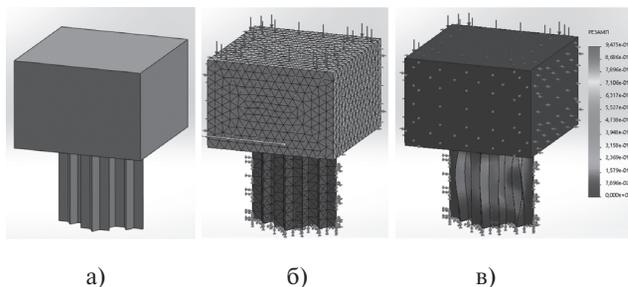


Рис. 7. Твердотельная модель (а), конечноэлементная сетка (б) и результат определения устойчивости (в)

два варианта пластины Коха демонстрируют незначительное расхождение данных вплоть до второй итерации, у пластины с $k = 0,275$ соответствие наблюдается только в первой итерации.

Таблица 1

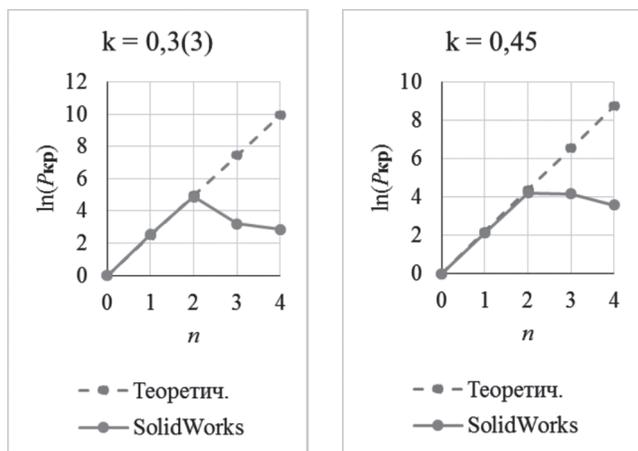
Относительная критическая нагрузка

k	0,3(3)		0,45		0,275	
	Теоретич. (модель А)	Анализ в SolidWorks	Теоретич. (модель А)	Анализ в SolidWorks	Теоретич. (модель А)	Анализ в SolidWorks
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1	12,00	12,45	8,89	8,34	14,55	15,19
2	144,00	132,13	79,01	68,97	211,57	34,10
3	1728,00	24,45	702,33	64,20	3077,39	12,10
4	20736,00	17,16	6242,95	35,75	44761,97	9,50

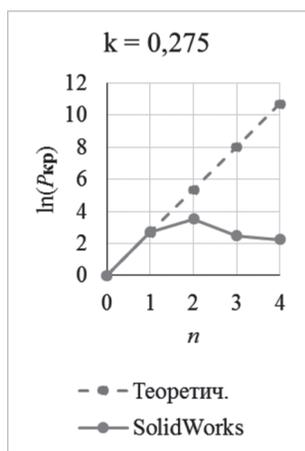
Расхождение между теоретическими и экспериментальными данными объясняется общей потерей устойчивости, которая не учитывается при теоретических расчётах. На рис. 8 представлены графики натурального логарифма критической нагрузки для трёх вариантов пластины Коха.

Падение критической нагрузки в 3-й и 4-й итерациях (рис. 8, а и б) соответствует потере актуальности модели А. Поскольку именно при $k = 0,275$ толщина пластин уменьшается медленнее, а моменты инерции сечения для сегментов наименьшие (рис. 5), переход потери устойчивости от местной к общей происходит уже на второй итерации (рис. 8, в). Нарушение модели А видно по картине потери устойчивости, возникающей при прочностном анализе методом конечных элементов (рис. 9).

В последующем росте количества итераций картина потери устойчивости принципиально не меняется – вспучивается сегмент пластины Коха целиком (рис. 10). Это справедливо и для кривых с другими коэффициентами подобия k .

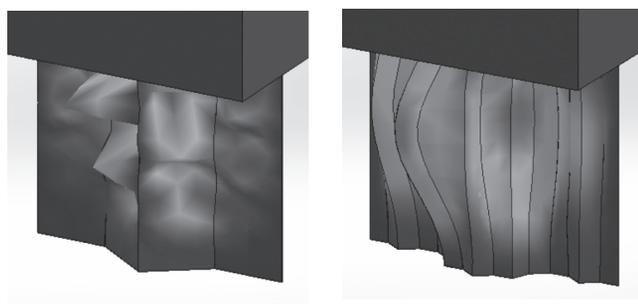


а) б)



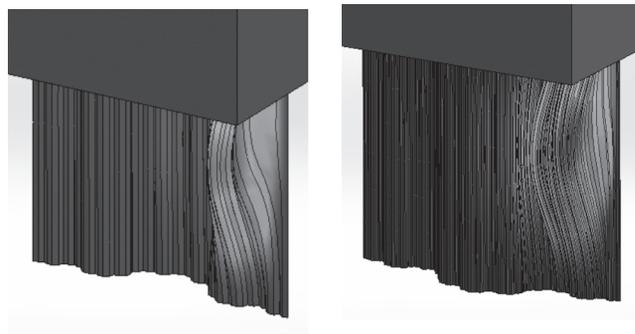
в)

Рис. 8. Графики зависимости натурального логарифма приведённой критической нагрузки от итерации для стандартной кривой Коха (а), кривых с коэффициентом подобию 0,45 (б) и 0,275 (в)



а) б)

Рис. 9. Потеря устойчивости по схеме А — вспучивание отдельной пластины (а), потеря устойчивости по схеме Б — вспучивание сегментов (б)



n = 3 n = 4

Рис. 10. Потеря устойчивости по схеме Б при большем n

При уменьшении толщины пластины, критическая нагрузка падает пропорционально третьей степени этого уменьшения (2). Вместе с тем возрастает вероятность местной потери устойчивости, а общей — падает. Таким образом, модель А остаётся актуальной при большем числе итераций. Это подтверждают исследования пластин Коха с меньшей толщиной. На рис. 11 представлены графики изменения $P_{кр}$ с ростом n . Сравниваются пластины с толщиной стенки $\delta = 0,2$ и $\delta = 0,02$.

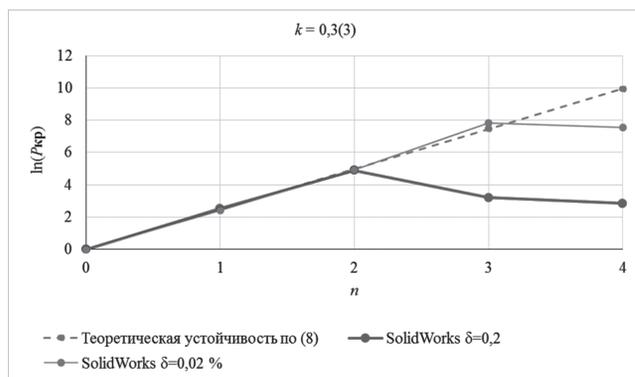


Рис. 11. Возрастание порога общей потери устойчивости при уменьшении толщины пластины Коха

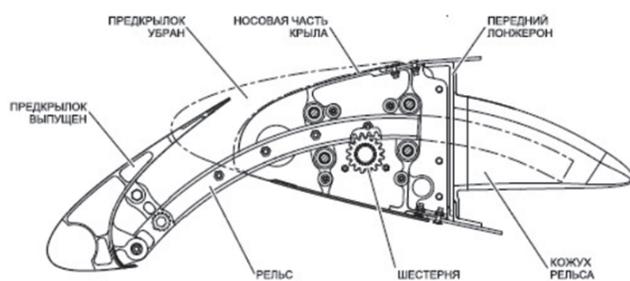
В последующих экспериментах используется только классическая кривая Коха ($k = 1/3$) как вариант, показавший больший прирост устойчивости при тех же массе и количестве итераций, что и у остальных вариантов.

В качестве модельной детали авиационной техники выбран рельс предкрылка (рис. 12).

Данная деталь испытывает относительно небольшие нагрузки, что позволяет осуществлять перфорацию перемычки двутавра в целях снижения массы (рис. 12, а). Анализ прочности модели рельса в SolidWorks показал, что деталь теряет устойчивость при меньших нагрузках, чем требуется для достижения пороговых



а)

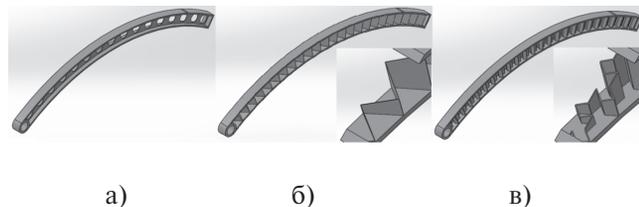


б)

Рис. 12. Рельс предкрылка – типовая деталь самолёта. Фото (а) и схема установки (б)

значений напряжений в опасных сечениях детали, а значит, повышение её прочности возможно геометрическими методами – за счёт повышения устойчивости.

При эксплуатации деталь воспринимает преимущественно изгибающее в плоскости перемычки двутавра воздействие. В рамках исследования проведено сравнение прочностных характеристик вариантов детали с плоской перемычкой (рис. 13, а) и пластинами Коха при $n = 0$ (рис. 13, б) и $n = 1$ (рис. 13, в).



а)

б)

в)

Рис. 13. Рельс с перфорированной перемычкой двутавр (а) и пластиной Коха $n = 0$ (б) и $n = 1$ (в). В пунктах (б) и (в) указаны разрезы детали секущей плоскостью под углом

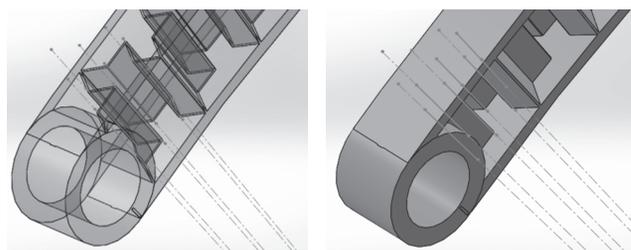
Длина всех деталей – 1000 мм, ширина – 40 мм, высота поперечного сечения – 60 мм. Материал – алюминиевый сплав 7075-T6 (SN). Масса варьируется от 2 до 1,6 кг.

Прочность и устойчивость для всех моделей определены при закреплении одной части детали и приложении изгибающей нагрузки через втулку на противоположном её конце, как показано на рис. 14.



Рис. 14. Нагружение рельса при исследовании в SolidWorks

Особенности геометрической формы детали не позволяют соединить две половинки двутавра при помощи пластин Коха – в представленных деталях они состоят не из участков плоскостей, а из сегментов гиперболических параболоидов. Однако отклонения от плоскости незначительны – углы между «пластинами» отклоняются в меньшую и большую сторону от 60° на $1,25^\circ$ (рис. 15).



а)

б)



в)

Рис. 15. Прозрачный и непрозрачный рельс (а) и (б) соответственно. Рёбра пластин сходятся на одной оси, совпадающей с осью рельса (в)

Представленные на рис. 13 детали являются параметрическими моделями, т.е. имеется возможность быстро перестраивать модель и менять массу перемычки двутавра, изменяя толщину пластины δ .

Результаты прочностного анализа данных моделей различных масс представлены на рис. 16 в виде графиков. Поскольку все варианты рельса отличались лишь массой перемычки, на данных графиках горизонтальная ось соответствует именно изменению массы перемычки от 0 до 420 г. Масса же остального материала деталей составляла 1600 г и оставалась неизменной. Прочность на изгиб у всех деталей определяется в основном геометрией верхней и нижней пластины двутаврового профиля, так как в большей степени от них зависит момент инерции поперечного сечения. При одинаковых массах перемычек эти моменты почти полностью совпадают, поэтому и прочность отличается незначительно. На рис. 16 прочность всех деталей отображает кривая чёрного цвета.

Устойчивость рельсы с плоской перемычкой почти на всём рассматриваемом промежутке масс меньше прочности, значит, фактическая максимальная нагрузка, которую деталь способна выдержать, определяется её устойчивостью.

Графики, заданные сплошными линиями, не пересекают начало координат, т.е. при нулевой массе перемычки прочность отлична от нуля (рис.16).

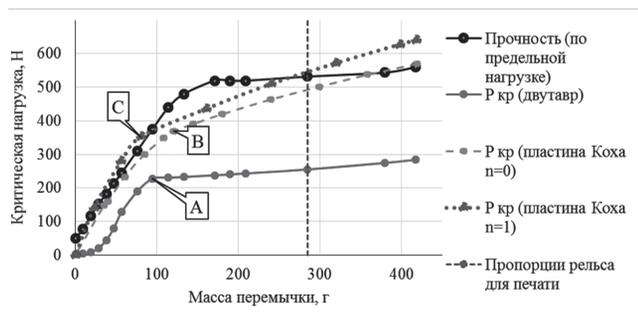


Рис. 16. Сравнение прочности и устойчивости вариантов детали «рельс предкрылка»

Визуализация результатов проверки устойчивости показана на рис. 17. При этом *a*, *в* и *д* (рис. 17) – примеры общей потери устойчивости. Данная схема потери устойчивости актуальна для участков графиков (рис. 16) справа от точек *A*, *B* и *C*. Быстрое падение критической нагрузки графиков различных вариантов рельса на участках от нуля до точек *A*, *B* и *C* (рис. 16) обуславливается падением местной устойчивости для очень тонких листов металла (рис. 17, *б*, *г* и *е*). Таким образом, повышение устойчивости фрактальных вариантов рельса относительно их нефрактального прототипа на участках слева от точек *B* и *C* происходит за счёт повышения местной устойчивости пластин – по аналогии с моделью *A*. Общая же устойчивость возрастает за счёт большей жёсткости при скручивании (рис. 17, *а*, *б*, *в*).

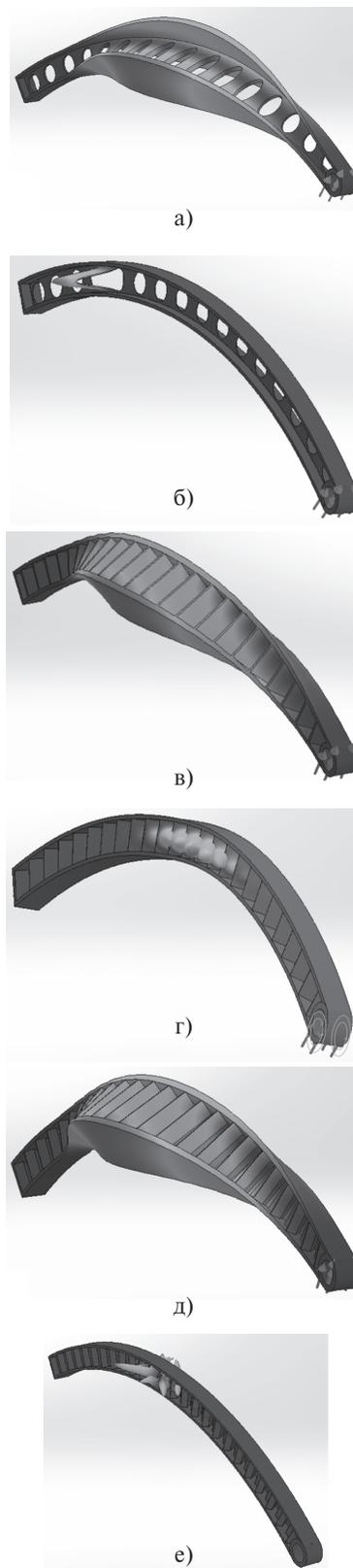


Рис. 17. Потеря устойчивости рельса: нефрактального с толстой (*а*) и тонкой (*б*) стенкой, фрактального нулевой итерации с толстой (*в*) и тонкой (*г*) стенкой, фрактального первой итерации с толстой (*д*) и тонкой (*е*) стенкой

Как следует из графиков (рис. 16), за счёт замены плоской перемычки на пластину Коха можно увеличить фактическую прочность детали минимум в 2 раза. И возможный выигрыш в прочности резко возрастает при снижении массы перемычки менее 50 г. Переход от пластины Коха при $n = 0$ к $n = 1$ даёт возможность уменьшить массу перемычки до 30% или увеличить прочность на схожую величину.

Столь существенное возрастание устойчивости происходит за счёт более равномерного распределения нагрузки вдоль верхней и нижней пластин двутавра, а большое число двугранных углов в перемычке предотвращает местную потерю устойчивости, что даёт возможность экономить материал, уменьшая δ .

Обсуждение результатов

Практическое применение кривой Коха для повышения прочностных характеристик потребовало двухуровневого изучения пластин: в виде модельных объектов и в структуре детали. На первом уровне установлены общие взаимосвязи между приростом местной устойчивости и коэффициентом подобия кривой, а также показана зависимость общей устойчивости от этого коэффициента. Установлена закономерность: изменение k от 0,25 до 0,5 снижает местную и повышает общую устойчивость пластины Коха. При этом большое значение играют прочие геометрические параметры, такие как длина, ширина и толщина пластины. Изменение последней также меняет соотношение между местной и общей устойчивостью. При заданных k и δ повышение числа итераций предфрактала имеет эффект только до определённого значения (рис. 8, 11).

На этапе исследования пластины Коха в структуре деталей основной эффект при малой толщине стенок пластин перемычки двутаврового профиля также оказывало увеличение местной устойчивости. При больших толщинах и, следовательно, массах эффект возрастания устойчивости фрактальных деталей связан с увеличением общей жесткости детали и в том числе против скручивания при потере устойчивости.

Значительное снижение массы перемычки двутавра, которое следует из сравнения графиков на рис. 16 в масштабах всей детали, выглядит менее убедительно: 30% массы перемычки – максимум 6% от всей детали. Однако за несколько итераций эффект оказывается более существенным. Конкретные значения возможного выигрыша в массе или прочности будут зависеть от технических требований, которым должна соответствовать деталь.

Выводы и заключение

Предложенный способ применения кривой Коха оправдал теоретические предположения о преиму-

ществах его использования. Однако возможный выигрыш в прочностных характеристиках детали определяется не только способом применения фрактала, но и характером воспринимаемых нагрузок. Так, в схожем исследовании [35] фрактальные конструкции не показали своей эффективности из-за того, что модифицируемая деталь работала под очень большими нагрузками и повышение устойчивости не приводило к действительному повышению максимально допустимых для детали нагрузок. В свою очередь, более габаритные и лёгкие конструкции окажутся весьма перспективными для фрактальной модификации.

Для модификации рельса предкрылка применён классический вариант кривой Коха, и это дало хороший результат. Вероятно, даже в поставленных условиях данный вариант не является оптимальным. Оптимизация таких параметров, как k , δ и n требует отдельных исследований для каждого конкретного случая практического применения. Исключения составят крайние значения $k = 0,5$ и $0,25$, а также близкие к ним числа, при которых теряются фрактальные свойства кривой Коха.

Преимущество предложенной формы также заключается в том, что пластина Коха топологически тождественна обычной пластине. Это упрощает изготовление деталей и выгодно отделяет пластину Коха от решёток, которые также могли бы равномерно распределять давление, но содержат внутренние пустоты, не позволяющие изготавливать, к примеру, монолитные литые детали. Тем не менее в авиации широко применяются различные тонкостенные решётки, в особенности с прямоугольной и сотовой структурой [5; 12; 17]. Их фрактальной альтернативой может выступать решётка Серпинского [34], что также требует отдельных исследований.

Отдельной целью исследования была демонстрация возможности практического применения геометрических знаний [13], ранее представляющих преимущественно теоретический интерес. Есть вероятность, что новые сложные геометрические формы, например, описанные в исследованиях [4; 6; 18; 22; 23], в недалёком будущем также найдут множество прикладных приложений.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю – профессору МАИ Маркину Леониду Владимировичу за поддержку и участие. В работе использовались вычислительные мощности и программное обеспечение кафедр инженерной графики Московского авиационного института и Российского технологического университета.

Литература

1. *Алямовский А.А.* Инженерный анализ методом конечных элементов [Текст] / А.А. Алямовский // SolidWorks/COSMOSWorks. Litres. — 2022. — 216 с.
2. *Астахов М.Ф.* Справочная книга по расчету самолета на прочность [Текст] / М.Ф. Астахов, А.В. Караваев, С.Я. Макаров, Я.Я. Суздальцев // М.: Оборонгиз. — 1954. — С. 411–412.
3. *Варданян Г.С.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / Г.С. Варданян. — М.: АСВ, 2011. — 566 с.
4. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 22–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34.
5. *Ендогур А.И.* Сотовые конструкции: Выбор параметров и проектирование [Текст] / А.И. Ендогур, М.В. Вайнберг, К.М. Иерусалимский. — М.: Машиностроение, 1986. — 198 с.
6. *Ефремов А.В.* Пространственные геометрические ячейки — квазимногогранники [Текст] / А.В. Ефремов, Т.А. Верещагина, Н.С. Кадыкова, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 30–38. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38.
7. *Жихарев Л.А.* Обзор геометрических способов повышения удельной прочности конструкций: топологическая оптимизация и фрактальные структуры [Текст] / Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 46–62. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-46-62.
8. *Жихарев Л.А.* Фрактальные графики эффективности оптимизации топологии в решении проблемы зависимости прочности от сетки [Текст] / Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 3. — С. 25–35. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-25-35.
9. *Жихарев Л.А.* Фрактальные размерности [Текст] / Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 3. — С. 33–48. — DOI: 10.12737/article_5bc45918192362.77856682.
10. *Завьялова О.Б.* Оценка влияния плотности сетки конечных элементов на точность расчета конструкций здания в программном комплексе «Мономах-САПР» [Текст] / О.Б. Завьялова, В.В. Куликов // Материалы VII Международного научного форума молодых ученых, инноваторов, студентов; под общ. ред. Д.П. Ануфриева. — 2018. — С. 73–79.
11. *Калинин А.В.* Применение метода конечных элементов в современных системах автоматизированного проектирования [Текст] / А.В. Калинин, А.Л. Хвалин // Гетеромагнитная микроэлектроника. — 2019. — № 26. — С. 41–51.
12. *Колпаков А.М.* Исследование трехслойных несущих поверхностей авиационных конструкций с возможностью управления пограничным слоем [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.07.02 / А.М. Колпаков. — М., 2020. — 166 с.
13. *Лепаров М.Н.* О геометрии, еще один раз [Текст] / М.Н. Лепаров // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 3–13. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13.
14. *Ляхов Л.Н.* Вычисление фрактальной размерности типа кривая Коха [Текст] / Л.Н. Ляхов // «Современные проблемы математики и физики», материалы международной научной конференции. Стерлитамак. ББК 22.161. — 2021. — С. 193–196.
15. *Орешко Е.И.* Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин [Текст] / Е.И. Орешко, В.С. Ерасов, А.Н. Луценко // Авиационные материалы и технологии. — 2016. — № 4. — С. 74–79. — DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79.
16. *Орлов П.И.* Основы конструирования [Текст]: справ.-метод. пособие. В 2 кн. / П.И. Орлов; под ред. П.Н. Учайва. — М.: Машиностроение. — 1988. — 623 с.
17. *Сливинский В.И.* Эффективность применения сотовых конструкций в летательных аппаратах [Текст] / В.И. Сливинский, Г.В. Ткаченко, М.В. Сливинский // Сибирский аэрокосмический журнал. — 2005. — № 3. — С. 169–173.
18. *Сунцов О.С.* Исследование отражения от криволинейных зеркал на плоскости в программе Wolfram Mathematica [Текст] / О.С. Сунцов, Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 29–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45.
19. *Чернышов Д.Н.* Использование метода конечных элементов для физических расчетов в САПР [Текст] / Д.Н. Чернышов, О.С. Грищенко, А.В. Григорьев // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях (СИТОНИ-2019). — 2019. — С. 347–352.
20. *Шабалин М.Л.* Применение расчётов методом конечных элементов и топологической оптимизации при проектировании автомобиля класса «Формула студент» [Текст] / М.Л. Шабалин // Сборник трудов 4-го Всероссийского форума «Студенческие инженерные проекты». — М.: Изд-во МАДИ, 2016. — С. 64–71.
21. *Aage N., Erik A., Boyan S.L., Ole S.* Giga-voxel computational morphogenesis for structural design // Nature. 2017. Vol. 550. I. 7674, pp. 84–86. DOI: 10.1038/nature23911.
22. *Beglov I.A.* Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2021. V. 1901. I. 1, pp. 12–57.
23. *Beglov I.A.* Nn-digit interrelations between the sets within the R 2 plane generated by quasi-rotation of R 3 space // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2020. V. 1546. I. 1, pp. 12–33.
24. *Branch B., Ionita A., Patterson B.M., Schmalzer A., Clements B., Mueller A., Dattelbaum D.M.* A comparison of shock-

- wave dynamics in stochastic and periodic porous polymer architectures // *Polymer*. 2019. V. 160, pp. 325–337. DOI: 10.1016/j.polmer.2018.10.074.
25. Dattelbaum D.M. et al. Shockwave dissipation by interface-dominated porous structures // *AIP Advances*. 2020. V. 10. I. 7, pp. 075016 1–6. DOI: 10.1063/5.0015179.
 26. Rayneau-Kirkhope D. et al. Hierarchical space frames for high mechanical efficiency: Fabrication and mechanical testing // *Mechanics Research Communications*. 2012. V. 46, pp. 41–46. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.06.011.
 27. Rayneau-Kirkhope D., Mao Y., Farr R. Ultralight fractal structures from hollow tubes // *Physical review letters*. 2012. V. 109. I. 20, pp. 204–301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.204301.
 28. Rian I.M. FracShell: From Fractal Surface to a Lattice Shell Structure // *Digital Wood Design*. Springer, Cham, 2019, pp. 1459–1479. DOI: 10.1007/978-3-030-03676-8_59.
 29. Sajadi S.M., Woellner C.F., Ramesh P., Eichmann S.L., Sun Q., Boul P.J., Thaemlitz C.J., Rahman M.M., Baughman R.H., Galvão D.S., Tiwary C.S., Ajayan P.M. 3D printed tubulanes as lightweight hypervelocity impact resistant structures // *Small*. 2019. V. 15. I. 52, pp. 19–47. DOI: 10.1002/sml.201904747.
 30. Viccica M., Galati M., Calignano F., Iuliano L. Design, additive manufacturing, and characterisation of a three-dimensional cross-based fractal structure for shock absorption // *Thin-Walled Structures*. 2022. V. 181, pp. 106–110.
 31. Wang J. et al. Crashworthiness behavior of Koch fractal structures // *Materials & Design*. 2018. V. 144, pp. 229–244. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.02.035.
 32. Xia L., Xia Q., Huang X., Xie Y. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2018. V. 25. I. 2, pp. 437–478. DOI: 10.1007/s11831-016-9203-2.
 33. Zhikharev L.A. A Sierpiński 3D-Fractals in Construction. An Alternative to Topological Optimization? // *Proceedings of the 5th International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety: ICCATS 2021*. Cham: Springer International Publishing, 2022. Pp. 273–284.
 34. Zhikharev L.A. A Sierpiński triangle geometric algorithm for generating stronger structures // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2021. V. 1901. I. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012066.
 35. Zhikharev L.A. Grid Based on the Sierpinski fractal and an assessment of the prospects for its application in aircraft parts // *Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021)*. 2021. Pp. 745–753.
 2. Astahov M.F., Karavaev A.V., Makarov S.YA., Suzdal'cev YA.YA. *Spravochnaya kniga po raschetu samoleta na prochnost'* [Reference book on the calculation of the strength of the aircraft]. Oborongiz. 1954, pp. 411–412. (in Russian)
 3. Vardanyan G.S. *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti* [Resistance of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Izdatel'stvo ASV Publ., 2011, 566 p. (in Russian)
 4. Vyshnepol'skij V.I., Zavarikhina E.V, Egiazyaryan K.T. Geometricheskie mesta toчек, ravnootstoyashchih ot dvuh zadannyh geometricheskikh figur. CHast' 5: geometricheskie mesta toчек, ravnoudalennyh ot sfer-y i ploskosti [Geometric locations of points equidistant from two given geometric shapes. Part 5: Geometric locations of points equidistant from the sphere and plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 4, pp. 22–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34. (in Russian)
 5. Endogur A.I., Vajnberg M.V., Ierusalimskij. K.M. *Sotovye konstrukcii: Vybor parametrov i proektirovanie* [Cellular structures: Parameter selection and design]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 198 p. (in Russian)
 6. Efremov A.V., Vereshchagina T.A., Kadykova N.S., Rustamyan V.V. Prostranstvennyye geometricheskie yachejki — kvazimnogogranniki [Spatial geometric cells — quasi-monogrammers]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 3, pp. 30–38. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38. (in Russian)
 7. ZHiharev L.A. Obzor geometricheskikh sposobov povysheniya udel'noj prochnosti kon-strukcij: topologicheskaya optimizaciya i fraktal'nye struktury [Overview of geometric ways to increase the specific strength of structures: topological optimization and fractal structures]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 4, pp. 46–62. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-46-62. (in Russian)
 8. ZHiharev L.A. Fraktal'nye grafiki effektivnosti optimizacii topologii v reshenii problemy zavisimosti prochnosti ot setki [Fractal graphs of topology optimization efficiency in solving the problem of strength dependence on the grid]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 3, pp. 25–35. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-25-35. (in Russian)
 9. ZHiharev L.A. Fraktal'nye razmernosti [Fractal dimensions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2018, V. 6, I. 3, pp. 33–48. DOI: 10.12737/article_5bc45918192362.77856682. (in Russian)
 10. Zav'yalova O.B., Kulikov V.V. Ocenka vliyaniya plotnosti setki konechnyh elementov na tochnost' rascheta konstrukcij zdaniya v programmnom komplekse «Monomah-SAPR» [Evaluation of the effect of the finite element grid density on the accuracy of the calculation of building structures in the Monomakh-CAD software package]. *Materialy VII Mezhdunarodnogo nauchnogo foruma molodyh uchenykh, innovatorov, studentov. Pod obshch. red. D.P. Anufrieva* [Materials of the VII International Scientific Forum of Young Scientists, Innovators, students. Under the general editorship of D.P. Anufriev]. 2018, pp. 73–79. (in Russian)

References

1. Alyamovskij A.A. *Inzhenernyj analiz metodom konechnykh elementov* [Engineering analysis by the finite element method]. SolidWorks/COSMOSWorks. Litres. 2022, pp. 216. (in Russian)

11. Kalinin A.V., Hvalin A.L. Primenenie metoda konechnykh elementov v sovremennykh sistemakh avtomatizirovannogo proektirovaniya [Application of the finite element method in modern computer-aided design systems]. *Geteromagnitnaya mikroelektronika* [Heteromagnetic microelectronics]. 2019, I. 26, pp. 41–51. (in Russian)
12. Kolpakov A.M. *Issledovanie trekhslonnykh nesushchikh poverhnostej aviacionnykh konstruktsii s vozmozhnost'yu upravleniya pogrannichnym sloem. Kand. Diss.* [Investigation of three-layer bearing surfaces of aircraft structures with the ability to control the boundary layer. Cand. Diss.]. Moscow, 2020. 166 p. (in Russian)
13. Leparov M.N. O geometrii, eshche odin raz [About geometry, one more time]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 1, pp. 3–13. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13. (in Russian)
14. Lyahov L.N. Vychislenie fraktal'noy razmernosti tipa krivaya Koha [Calculation of the fractal dimension of the Koch curve type]. «*Sovremennye problemy matematiki i fiziki*», *materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* ["Modern problems of mathematics and physics", proceedings of the international scientific conference]. Sterlitamak. BBK 22.161, 2021, pp. 193–196. (in Russian)
15. Oreshko E.I., Erasov V.S., Lucenko A.N. Osobennosti raschetov ustojchivosti sterzhnej i plastin [Features of stability calculations of rods and plates]. *Aviacionnye materialy i tekhnologii* [Aviation materials and technologies.]. 2016, I. 4, pp. 74–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79. (in Russian)
16. Orlov P.I. *Osnovy konstruirovaniya: sprav.-metod. posobie* [Fundamentals of design: reference.-method. stipend] pod red. P.N. Uchaeva. M.: Mashinostroenie [edited by P.N. Uchaeva. M.: Mechanical engineering]. 1988, 623 p. (in Russian)
17. Slivinskij V.I., Tkachenko G.V., Slivinskij M.V. Effektivnost' primeneniya sotovykh konstruktsii v letatel'nykh apparatakh [The effectiveness of the use of cellular structures in aircraft]. *Sibirskij aerokosmicheskij zhurnal* [Siberian Aerospace Magazine]. 2005, I. 3, pp. 169–173. (in Russian)
18. Suncov O.S., ZHiharev L.A. Issledovanie otrazheniya ot krivolinykh zerkal na ploskosti v programme Wolfram Mathematica [Investigation of reflection from curved mirrors on a plane in the Wolfram Mathematica program]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 2, pp. 29–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45. (in Russian)
19. CHernyshov D.N., Grishchenko O.S., Grigor'ev A.V. Ispol'zovanie metoda konechnykh elementov dlya fizicheskikh raschetov v SAPR [Using the finite element method for physical calculations in CAD]. *Sovremennye informacionnye tekhnologii v obrazovanii i nauchnykh issledovaniyakh (SITONI-2019)* [Modern Information Technologies in Education and Scientific Research (SITONI-2019)]. 2019, pp. 347–352. (in Russian)
20. SHabolin M.L. Primenenie raschyotov metodom konechnykh elementov i topologiche-skoj optimizatsii pri proektirovanii avtomobilya klassa «Formula student» [Application of calculations by the finite element method and topological optimization in the design of a Formula Student car]. *Sbornik trudov 4-go Vserossijskogo foruma «Studencheskie inzhenernye proekty»*. Moscow: MADI [Proceedings of the 4th All-Russian Forum "Student Engineering Projects"]. Moscow MADI Publ., 2016, pp. 64–71. (in Russian)
21. Aage N., Erik A., Boyan S.L., Ole S. Giga-voxel computational morphogenesis for structural design // *Nature*. 2017, V. 550, I. 7674, pp. 84–86. DOI: 10.1038/nature23911.
22. Beglov I.A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2021, V. 1901, I. 1, pp. 12–57.
23. Beglov I.A. Nn-digit interrelations between the sets within the R 2 plane generated by quasi-rotation of R 3 space // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2020, V. 1546, I. 1, pp. 12–33.
24. Branch B., Ionita A., Patterson B.M., Schmalzer A., Clements B., Mueller A., Dattelbaum D.M. A comparison of shockwave dynamics in stochastic and periodic porous polymer architectures // *Polymer*. 2019, V. 160, pp. 325–337. DOI: 10.1016/j.polymer.2018.10.074.
25. Dattelbaum D.M. et al. Shockwave dissipation by interface-dominated porous structures // *AIP Advances*. 2020, V. 10, I. 7, pp. 075016 1–6. DOI: 10.1063/5.0015179.
26. Rayneau-Kirkhope D. et al. Hierarchical space frames for high mechanical efficiency: Fabrication and mechanical testing // *Mechanics Research Communications*. 2012, V. 46, pp. 41–46. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.06.011.
27. Rayneau-Kirkhope D., Mao Y., Farr R. Ultralight fractal structures from hollow tubes // *Physical review letters*. 2012, V. 109, I. 20, pp. 204–301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.204301.
28. Rian I.M. FracShell: From Fractal Surface to a Lattice Shell Structure // *Digital Wood Design*. Springer, Cham. 2019, pp. 1459–1479. DOI:10.1007/978-3-030-03676-8_59.
29. Sajadi S.M, Woellner C.F., Ramesh P., Eichmann S.L., Sun Q., Boul P.J., Thamlitz C.J., Rahman M.M., Baughman R.H., Galv o D.S., Tiwary C.S., Ajayan P.M. 3D printed tubulanes as lightweight hypervelocity impact resistant structures / *Small*. 2019, V. 15, I. 52, pp. 19–47. DOI: 10.1002/sml.201904747.
30. Viccica M., Galati M., Calignano F., Iuliano L. Design, additive manufacturing, and characterisation of a three-dimensional cross-based fractal structure for shock absorption // *Thin-Walled Structures*. 2022, V. 181, pp. 106–110.
31. Wang J. et al. Crashworthiness behavior of Koch fractal structures / *Materials & Design*. 2018, V. 144, pp. 229–244. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.02.035.
32. Xia L., Xia Q., Huang X., Xie Y. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2018, V. 25, I. 2, pp. 437–478. DOI: 10.1007/s11831-016-9203-2.
33. Zhikharev L.A. A Sierpiński 3D-Fractals in Construction. An Alternative to Topological Optimization? // *Proceedings of the 5th International Conference on Construction, Ar-*

-
- chitecture and Technosphere Safety: ICCATS 2021. Cham: Springer International Publishing. 2022, pp. 273–284.
34. Zhikharev L.A. A Sierpiński triangle geometric algorithm for generating stronger structures // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2021, V. 1901, I. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012066.
35. Zhikharev L.A. Grid Based on the Sierpinski fractal and an assessment of the prospects for its application in aircraft parts // Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021). 2021, pp. 745–753.