

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-26-34

С.В. Страшнов

Канд. техн. наук, заведующий кафедрой,
Российский университет дружбы народов,
Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Компьютерное моделирование новых форм строительных оболочек

Аннотация. Представлено большое число новых поверхностей, формируемых конгруэнтными кривыми с изменяющейся кривизной, но, остающихся в одном классе, и суперэллипсами. Все поверхности входят в классы «Поверхности вращения», «Поверхности переноса велароидального типа» и «Алгебраические поверхности с каркасом из трех главных плоских кривых». Все поверхности одного класса задаются одними и теми же общими явными и параметрическими уравнениями, а благодаря наличию многих констант в уравнении суперэллипса можно получить очень много известных и новых поверхностей. Несмотря на то что методика построения рассматриваемых поверхностей известна, в представленной статье она проиллюстрирована и визуализирована на многих примерах. Поверхности строились с помощью математического пакета программ *MATLAB*. Поверхности вращения суперэллипса общего вида строились на основе новой компьютерной программы, позволяющей их визуализировать в мультимедийном режиме путем заданного изменения показателей степеней, содержащихся в формуле меридиана — суперэллипса. Все построенные поверхности вращения имеют общее название — суперэллипсоиды вращения. Впервые показано, что алгебраические поверхности с заданным каркасом в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, применяемые в судостроении, могут найти применение и в архитектуре общественных зданий. В качестве жесткого каркаса поверхностей используются суперэллипсы. В обзорном разделе статьи на основании имеющихся публикаций показано, что геометрия формы влияет на напряженно-деформируемое состояние оболочек с предлагаемыми срединными поверхностями. Материалы статьи дают возможность в дальнейшем найти оптимальные оболочки, очерченные по рассматриваемым аналитическим поверхностям трех различных классов, которые рассмотрены в статье, с учетом применяемых в архитектуре, строительстве, машиностроении и судостроении критериев оптимальности.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, аналитическая геометрия, велароидальные поверхности, поверхности вращения, суперэллипс, алгебраические поверхности с заданным каркасом из трех плоских кривых, оптимизация оболочек.

S.V. Strashnov

Ph.D. of Engineering, Head of Chair,
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia

Computer Simulation of New Forms of Shell Structures

Abstract. A large number of new surfaces are presented, formed by congruent curves with variable curvature, but remaining in the same class, and superellipses. All surfaces are included in the classes Rotation Surfaces, Velaroidal Translation Surfaces, and Algebraic Surfaces with a Carcass of Three Main Flat Curves. All surfaces of the same class are defined by the same general explicit and parametric equations, and thanks to the presence of many constants in the superellipse equation, it is possible to obtain a lot of known and new surfaces. Despite the fact that the method of construction of the considered surfaces is known, in the presented article it is illustrated and visualized on many examples. The surfaces were constructed using a numeric computing environment *MATLAB*. The surfaces of a general-view superellipse were built on the basis of a new computer program that allows them to be visualized in a multimedia mode by a set change in the exponents contained in the meridian-superellipse formula. All built rotation surfaces have a common name — superellipsoids of rotation. For the first time it is shown that algebraic surfaces with a given frame in three mutually perpendicular planes, applied in shipbuilding, can also find application in the architecture of public buildings. Superellipses are used as the rigid frame of surfaces. In the overview section of the article on the basis of the available publications it is shown that the geometry of the form affects the stress-deformable state of shells with the proposed medial surfaces. The materials of the article give an opportunity in the future to find the optimal shells outlined on the considered analytical surfaces of three different classes, which are considered in the article, taking into account the criteria of optimality applied in architecture, construction, engineering and shipbuilding.

Keywords: computer simulation, analytical geometry, Velaroidal Surfaces, surfaces of rotation, superellipse, algebraic surfaces with a given frame from three plane curves, shell optimization.

Введение

Начало XXI в. ознаменовалось всплеском исследований по компьютерному моделированию поверхностей и их приложению к реальным объектам архитектуры и строительства [1; 15], машиностроения [16], судостроения [11], к скульптурным формам [12; 21], топографии [29] и т.д.

Если в машиностроительных отраслях применение сложных поверхностей, требующих компьютерного моделирования, вызвано разными технологическими требованиями, то в архитектуре промышленных и гражданских зданий многое связано с личностью архитектора, его вкусами и предпочтениями. Архитекторы разделились на несколько групп. Одни считают, что нужно уходить от прямоугольных форм и внедрять разнообразные криволинейные

формы сооружений [10], другие считают, что параметрическая архитектура, основанная на применении простых и сложных форм, описываемых аналитическими формулами, себя исчерпала и возник стилевой кризис [6], и что надо соблюдать в архитектуре чувство меры [3]. В настоящее время геометры практически закончили полную классификацию аналитических поверхностей [5; 20], распределив их по 38 классам и далее по подклассам, группам и подгруппам. Несколько классификаций аналитических поверхностей приведены в статье [20]. Однако сейчас непрерывно появляются новые поверхности, которые геометры и ученые-расчетчики предлагают к внедрению [8; 17; 23; 24].

Имеются исследования по поиску конкретных примеров внедрения аналитических поверхностей в практику [15; 22]. Установлены известные геометрам аналитические поверхности, которые ещё не нашли реального воплощения в сооружениях, конструкциях и изделиях [22]. Некоторые исследователи работают над применением компьютерного моделирования к существующим поверхностям [18; 25] или совершенствуют существующие компьютерные программы для моделирования новых поверхностей [9] и оболочечных конструкций [7], или создают альтернативные подходы к компьютерному моделированию [4].

Цель исследования

Далее рассмотрим некоторые задачи компьютерного моделирования поверхностей, не рассмотренные ранее в научно-технической литературе, в том числе геометрическое моделирование малоизвестных аналитических поверхностей, и покажем, что геометрия формы влияет на напряженно-деформируемое состояние оболочек. Связь формы конструкции и её прочности хорошо показана в работе [31], что подтверждает необходимость поиска новых поверхностей.

Цели исследования, обозначенные в работе И.А. Мамиевой [15], отличаются от целей, указанных в настоящей статье. Если в работе [15] указываются хорошо известные поверхности, которые можно видеть в формах уже построенных сооружений, то в настоящей статье предлагаются для будущего внедрения ещё малоизученные или неизвестные пока аналитические поверхности, которые до настоящего времени не воплощены в реальные сооружения. Некоторые из этих поверхностей названы в статье [22]. В настоящей статье предлагаются для рассмотрения велароидальные поверхности, поверхности вращения суперэллипсов общего вида и поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов.

На основе упрощенной методики, разработанной С.Н. Кривошапко и В.Н. Ивановым [13], предлага-

ется в дальнейшем найти оптимальные оболочки, очерченные по рассматриваемым аналитическим поверхностям трех различных классов, которые рассмотрены в статье, с учетом применяемых в архитектуре, строительстве, машиностроении и судостроении критериев оптимальности [26].

Велароидальные поверхности

В работе [19] отмечается, что параболические, гиперболические и синусоидальные велароидальные поверхности хорошо известны. Намного меньше изучены велароидальные поверхности, впервые предложенные в статье [2]. Велароидальные поверхности в статье [20] было предложено относить в класс поверхностей переноса как подкласс. Остановимся на поверхностях, указанных в статье [2] более подробно. Авторы рекомендуют задавать их в декартовых координатах в явном виде:

$$\bar{r} = \{x, y, (f_1(x))^t (f_2(y))^t\}, \quad -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad (1) \\ 0 \leq t \leq 1,$$

где $z = h[1 - (x/a)^p]^{1/q}$, $z = h[1 - (y/b)^s]^{1/t}$ – уравнения образующих кривых в координатных плоскостях $y = 0$ и $x = 0$, соответственно. Велароидальная поверхность (1) строится на плоском прямоугольном плане $2a \times 2b$. Запишем параметрические уравнения поверхности (1) в развернутом виде:

$$x = x(x) = x, \quad y = y(y) = y, \\ z = h[1 - |x/a|^p]^{1/q} [1 - |y/b|^s]^{1/t}. \quad (2)$$

На рис. 1 построены велароидальные поверхности для случаев $p = q = s = t = 1$ (рис. 1, а); $p = 1, q = 2, s = 1, t = 1$ (рис. 1, б); $p = q = s = t = 2$ (рис. 1, в); $p = s = 2, q = t = 1$ (рис. 1, г); $p = s = 1, q = t = 2$ (рис. 1, д); $p = s = 2, q = 1, t = 2$ (рис. 1, е); $p = s = 4, q = t = 2$ (рис. 1, ж); $p = s = 10, q = t = 2$ (рис. 1, з).

Таким образом, с помощью одной формулы (2) можно смоделировать большое число велароидальных поверхностей, приемлемых для конкретных случаев. Поверхности, представленные на рис. 1, имеют одинаковые габаритные размеры, но разные показатели степеней. Различные формы велароидальных поверхностей с одинаковыми габаритами, показанные на рис. 1, представлены впервые.

Поверхности вращения с меридианами в форме суперэллипсов

Как известно векторное уравнение произвольной поверхности вращения имеет вид:

$$r = r(r, \beta) = r \cos \beta i + r \sin \beta j + f(r)k,$$

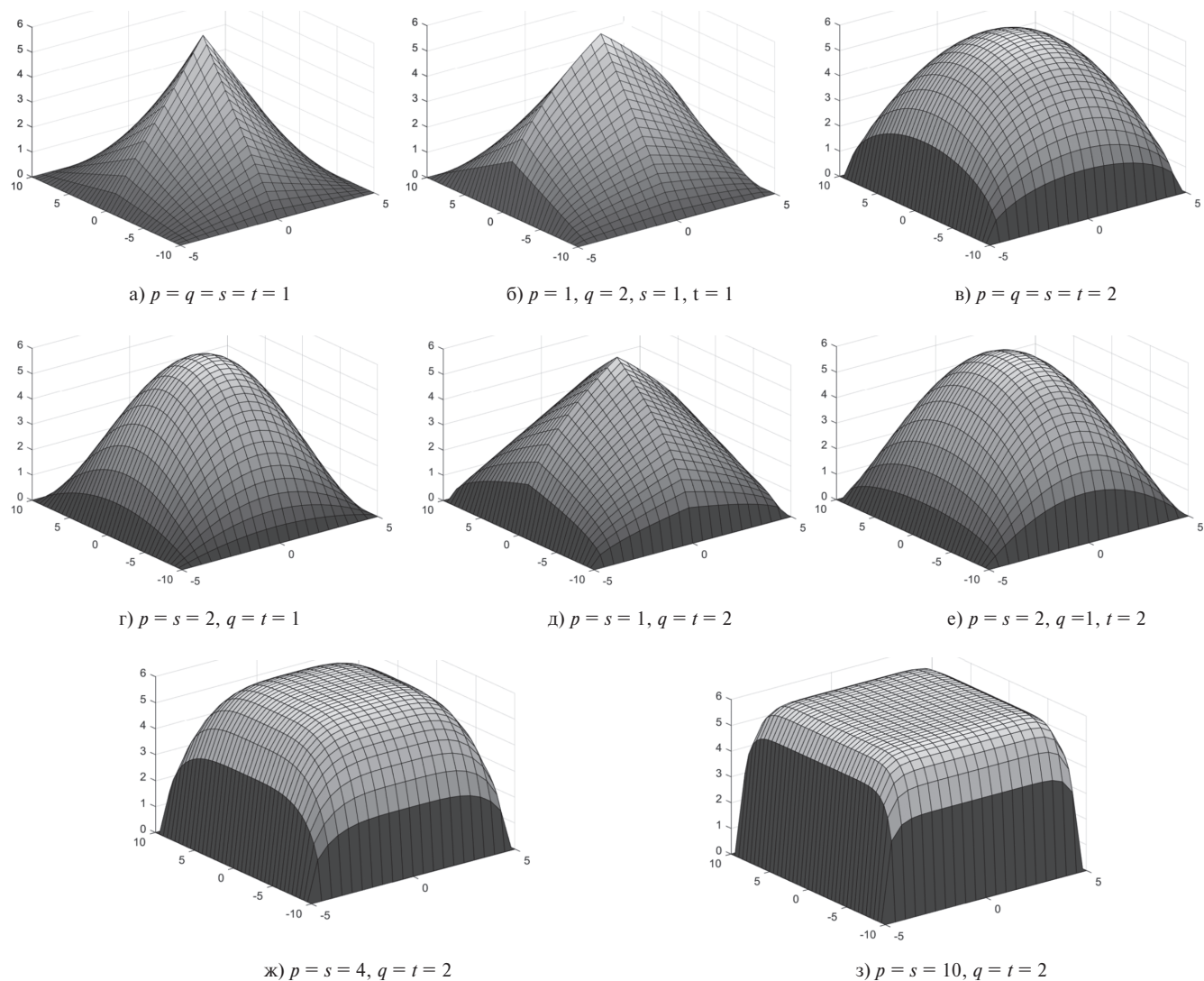


Рис. 1. Велароидальные поверхности, задаваемые формулами (2)

где $r = [x^2 + y^2]^{1/2}$ — расстояние от точки поверхности до оси вращения, $z = f(x)$ — уравнение меридиана.

Возьмем в качестве меридиана поверхности вращения суперэллипс, заданный в виде:

$$|z|^s = T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right), \quad (3)$$

где для выпуклых поверхностей $s, k > 1$, для вогнутых поверхностей $s, k < 1$.

Тогда можно записать параметрические уравнения семейства поверхностей вращения с меридианами в форме суперэллипсов в виде:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \beta) = r \cos \beta, \quad y = y(r, \beta) = r \sin \beta, \\ z &= z(r) = T \left[1 - (r/L)^k \right]^{1/s}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $0 \leq \beta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq L$; T — стрела подъёма поверхности, L — наибольший радиус параллели в плоскости xOy ; β, r — криволинейные координаты поверхности вращения.

Поверхности, образованные вращением суперэллипса (3) вокруг одной из его осей называются суперэллипсоидами вращения. Формула (4) даёт возможность построить бесконечно большое количество поверхностей вращения. Например, на рис. 2 построены поверхности с $T = 10$ м, $L = 5$ м.

На рис. 2, а принято $s = k = 2/3$; на рис. 2, б: $s = k = 1$; на рис. 2, в: $s = k = 4/3$; на рис. 2, г: $s = k = 2$ (эллипсоид вращения).

Для построения поверхностей вращения суперэллипсов была создана специальная компьютерная программа на языке *MATLAB*, с помощью которой

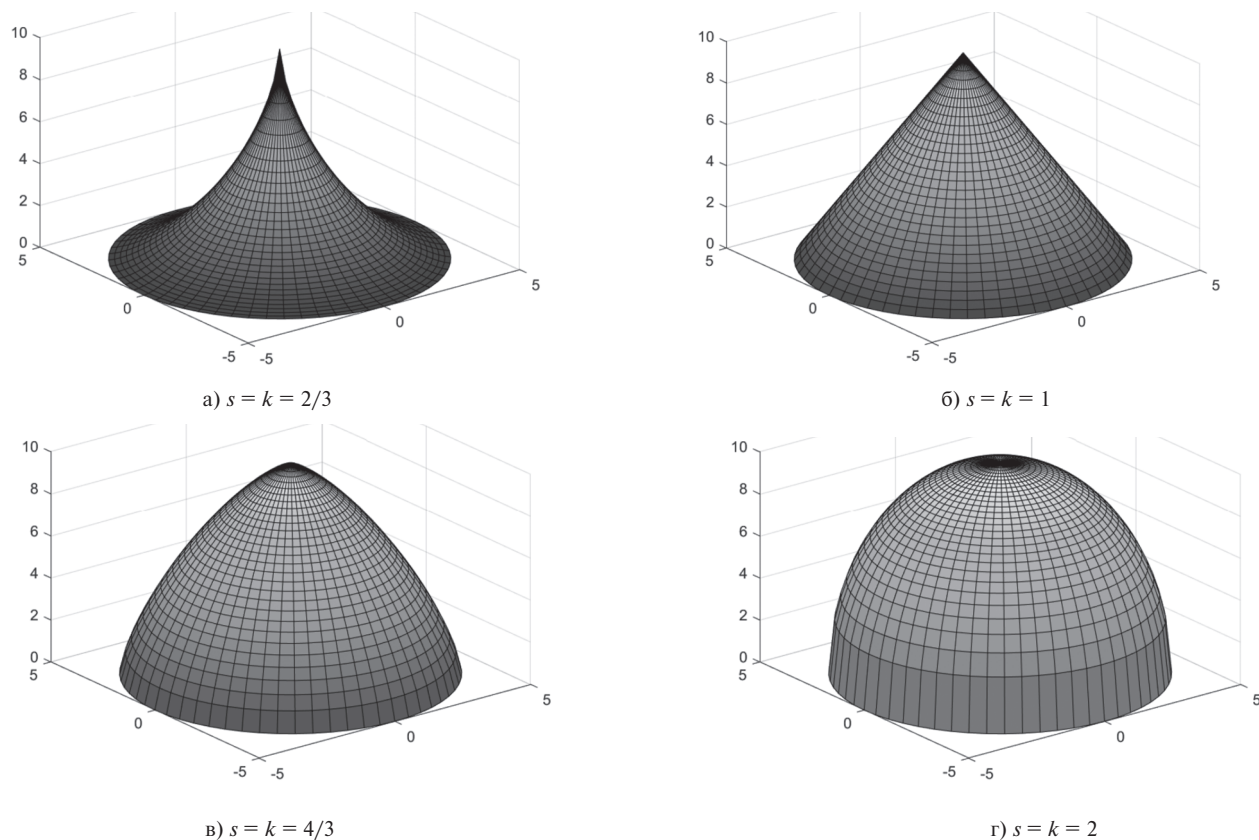


Рис. 2. Поверхности вращения с меридианами в форме суперэллипсов

показывается процесс формирования поверхностей в мультимедийном режиме с автоматическим изменением степеней s, k в пределах $0 < s, k < \infty$.

Алгебраические поверхности с заданным каркасом в трех взаимно перпендикулярных плоскостях

Данные поверхности используются, в основном, в судостроении для геометрического моделирования наружного корпуса судна. Для составления обобщенного уравнения алгебраической поверхности воспользуемся методикой, изложенной в работах [11; 14]. Имея три плоские кривые, которые совпадают с мидель-шпангоутом (в сечении плоскостью yOz), главным батоксом (в сечении плоскостью xOz) и ватерлинией (в сечении плоскостью xOy), можно построить три отличающиеся друг от друга алгебраические поверхности. В указанных работах за эти три плоские кривые принимались параболы второго и четвертого порядков, эллипсы и другие кривые. Для каждого случая задача решалась отдельно. Однако задачу можно решить в общем виде, если в качестве этих трех кривых принять суперэллипсы с разными

степенями. Получаемые поверхности можно применить в различных отраслях народного хозяйства. Продемонстрируем это на конкретных примерах.

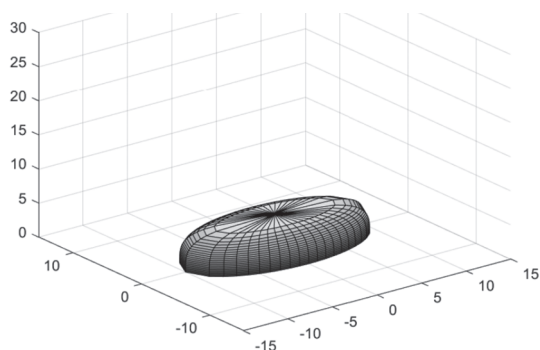
Пусть главные кривые каркаса рассматриваемой алгебраической поверхности заданы в виде:

$$\begin{aligned} |y|^r &= W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right); \\ |z|^n &= T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right); \\ |z|^s &= T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right), \end{aligned}$$

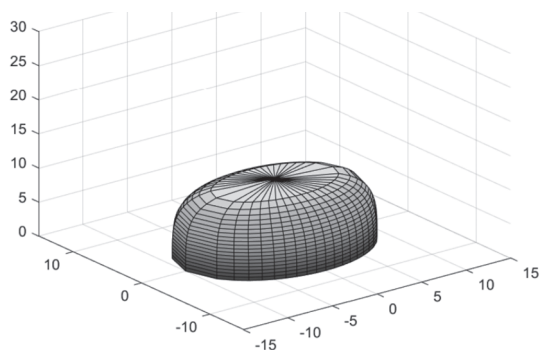
где $r, t, n, m, s, k > 1$, если поверхность выпуклая, или $r, t, n, m, s, k < 1$, если поверхность вогнутая. Предположим, что поверхность формируется семейством линий $z = \text{const}$, тогда, используя методику, представленную в работах [11; 14], можно получить

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = vL \left[1 - |u|^s \right]^{1/k}, \\ y &= y(u, v) = \pm W \left[1 - |u|^n \right]^{1/m} \left[1 - |v|^r \right]^{1/r}, \\ z &= z(u) = uT, \end{aligned} \quad (5)$$

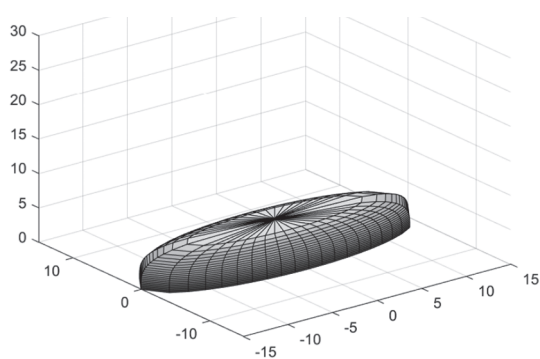
где $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – безразмерные параметры, $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$. На рис. 3 показаны алгебраические поверхности, построенные по параметрическим уравнениям (5). На рис. 3, а принято $L = 10$ м, $W = 5$ м, $T = 5$ м; на рис. 3, б – $L = 10$ м, $W = 7,5$ м, $T = 10$ м; на рис. 3, в – $L = 15$ м, $W = 5$ м, $T = 5$ м. На рис. 3 для всех трех поверхностей принято: $r = t = 2$, $n = m = 3$, $s = k = 4$.



а) $L = 10$ м, $W = 5$ м, $T = 5$ м



б) $L = 10$ м, $W = 7,5$ м, $T = 10$ м



в) $L = 15$ м, $W = 5$ м, $T = 5$ м

Рис. 3. Алгебраические поверхности с главным каркасом из трех взаимно перпендикулярных суперэллипсов

Формулы (5) описывают огромное количество поверхностей благодаря наличию в них постоянных произвольных параметров $r, t, n, m, s, k, L, W, T$, которые выбираются согласно проектному заданию.

В данном разделе впервые предложено использовать гидродинамические поверхности судовых корпусов в архитектуре и строительстве. До этого были предложения использовать алгебраические поверхности с заданным каркасом из трех суперэллипсов в трех взаимно перпендикулярных плоскостях и дополнительной цилиндрической вставкой в судостроении [11]. На рис. 3 впервые показано, что, выбрав соответствующие габариты поверхности, можно получить приемлемую форму архитектурного сооружения на овальном, ромбическом или астроиальном плане.

Влияние формы объекта на его напряженно-деформируемое состояние

Знаменитый архитектор и инженер Э. Торроха говорит: «Лучшим сооружением является то, надежность которого обеспечивается главным образом за счет его формы, а не за счет прочности его материала. Последнее достигается просто, тогда как первое, наоборот, с большим трудом. В этом заключается прелесть поисков и удовлетворение от открытий». У Э. Торрохи много последователей.

Компьютерное моделирование позволяет найти оптимальную форму оболочки. Рассмотрим выбор формы оболочки на примере оболочек вращения. Во-первых, необходимо выбрать критерий оптимальности. В работе [26] перечисляются 23 критерия, в том числе максимум отношения объема внутреннего пространства оболочки к площади её поверхности, минимальный объем внутреннего пространства оболочки при заданной площади её поверхности, построение единственной поверхности вращения с двумя заданными параллелями и значениями первой основной квадратичной формы поверхности. Эти критерии являются чисто геометрическими. Кроме них, существуют прочностные критерии оптимальности: условие равнопрочности, отсутствие изгибающих моментов и растягивающих нормальных усилий, заданная несущая способность составной оболочки при ее минимальном весе, заданная несущая способность при оптимальной пологости и др.

Проблемам оптимизации форм оболочек вращения было посвящено свыше 5000 научных статей и 100 монографий, опубликованных за период с 1970 по 1990 г. [30], что говорит о важности проблемы.

Рассмотрим методику выбора оптимальной оболочки вращения, предложенную в статье [13]. Здесь предлагается рассматривать несколько оболочек вращения с одинаковыми габаритными размерами, но со срединными поверхностями, задаваемыми разными параметрическими уравнениями. Причем

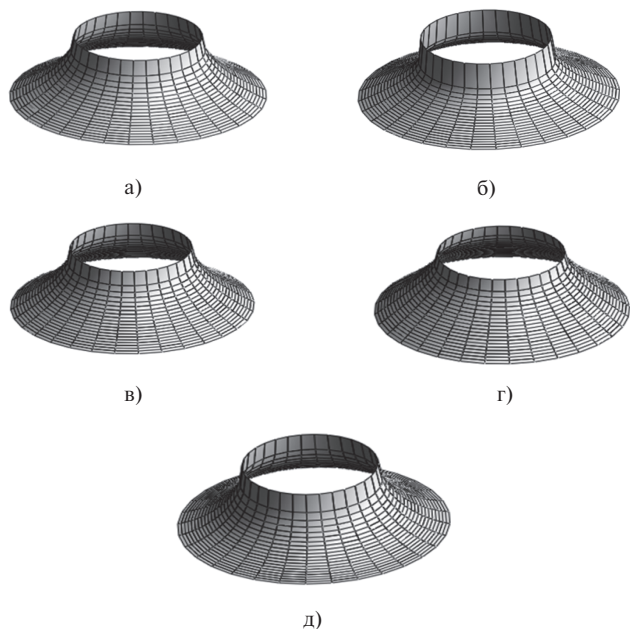


Рис. 4. Пять типов поверхностей вращения отрицательной гауссовой кривизны [13]:

а) катеноид; б) поверхность вращения параболы четвертого порядка; в) поверхность вращения параболы второго порядка; г) однополостный гиперболоид вращения; д) глобоид

поверхности должны иметь максимальное совпадение. Например, были рассмотрены пять оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны (рис. 4), пять оболочек вращения, близких по форме к коническим оболочкам (рис. 5),

На втором этапе проводится статический расчет на линейную нагрузку, распределенную по верхнему краю оболочек (рис. 4). Как показал расчет, значения внутренних усилий и моментов отличаются значительно. Статический расчет проводился вариационно-разностным методом.

Также при помощи вариационно-разностного метода было определено напряженно-деформированное состояние пяти видов оболочек вращения с одинаковыми базовыми размерами при их загрузке одинаковой распределенной поверхностной нагрузкой (рис. 5).

В статье [13] метод нахождения оптимальной оболочки вращения можно назвать методом нахождения оптимальной оболочки вращения по упрощенному критерию оптимальности «Минимальные нормальные напряжения в оболочках вращения с одинаковыми габаритными размерами, граничными условиями и внешней нагрузкой».

Б. Ник (Nick B.) [28] рассмотрел 5 типов куполов (сферические, эллиптические, параболические и гиперболические вращения, а также комбинированные, состоящие из гиперболической поверхности и

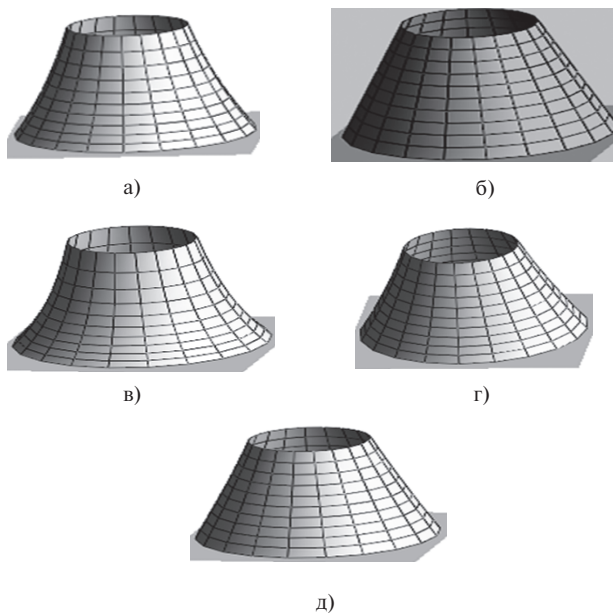


Рис. 5. Пять видов поверхностей вращения [13]:

а) псевдосфера; б) конус; в) меридиан — гипербола $z = b/x$; г) меридиан — астроида; д) однополостный гиперболоид вращения

параболической поверхности вращения). Он использовал, по сути, вышеуказанный критерий и установил, что лучше всего зарекомендовал себя комбинированный купол.

Остальные два этапа описанного в [13] критерия носят прочностной характер и в данной статье рассматриваться не будут.

Материалы, представленные в настоящем разделе и содержащиеся в статьях [13; 26; 28; 30], показывают правоту Э. Торрохи и подтверждают, что геометрия сооружения-оболочки очень влияет на его напряженно-деформированное состояние. В предлагаемом обзорном разделе показывается возможность начала процесса выбора оптимальной оболочки по геометрическим и прочностным критериям оптимизации среди предложенных форм тонких оболочек. Дана соответствующая литература.

Заключение

Начавшееся с 1970-х гг. возрождение интереса к проектированию и строительству тонкостенных оболочек особенно усилилось в начале XXI в. Это может подтвердить международная выставка *Connecting Minds, Creating the Future* в Дубае (ОАЭ), 2021 г., где более половины выставочных павильонов выполнены в стиле параметрической архитектуры или архитектуры свободных форм. Нет практически ни одной страны, где бы в 2000–2022 гг. не было построено нескольких тонкостенных оболочек [27], которые

становятся знаковыми сооружениями города или страны.

Представленная статья вводит в рассмотрение огромное число новых криволинейных поверхностей, входящих в классы «Поверхности вращения», «Поверхности переноса» и «Алгебраические поверх-

ности с каркасом из трех главных плоских кривых», что позволит архитекторам разнообразить их творческие планы.

Показаны возможные пути нахождения оптимальных форм представленных поверхностей с использованием некоторых известных критериев оптимизации.

Литература

1. Алборова Л.А. Минимальные поверхности в строительстве и архитектуре [Текст] / Л.А. Алборова // Биосферная совместимость: человек, регион, технологии. — 2021. — № 1. — С. 3–11. — DOI: 10.21869/2311-1518-2021-33-1-3-11.
2. Берестова С.А. Геометрия самонесущих покрытий на прямоугольном плане [Текст] / С.А. Берестова, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2017. — № 4. — С. 15–18. — DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18.
3. Бондаренко И.А. Об уместности и умеренности архитектурных новаций [Текст] / И.А. Бондаренко // Academia. Архитектура и строительство. — 2020. — № 1. — С. 13–18.
4. Ванин В.В. Вариантное компьютерное макетирование оболочек на основе полипараметризации их срединных поверхностей [Текст] / В.В. Ванин, С.Л. Шамбина, Г.И. Вирченко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2015. — № 6. — С. 3–8.
5. Гринько Е.А. Классификация аналитических поверхностей применительно к параметрической архитектуре и машиностроению [Текст] / Е.А. Гринько // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. — 2018. — Т. 19. — № 4. — С. 438–456.
6. Ермоленко Е.В. Формы и построения в архитектуре советского авангарда и их интерпретация в современной зарубежной практике [Текст] / Е.В. Ермоленко // Academia. Архитектура и строительство. — 2020. — № 1. — С. 39–48. — DOI: 10.22337/2077-2020-1-39-48.
7. Згода Ю.Н. Автоматизированное моделирование оболочечных конструкций в Autodesk Revit с использованием Dynaмо [Текст] / Ю.Н. Згода, А.А. Семенов // «Новые информационные технологии в архитектуре и строительстве»: Материалы IV Международной научно-практической конференции. — Екатеринбург, 2021. — С. 40.
8. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование модифицированных поверхностей Кунса [Текст] / В.Н. Иванов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Инженерные исследования». — 2011. — № 2. — С. 85–90.
9. Игнатъев С.А. Функциональные возможности среды Wolfram Mathematica для визуализации кривых линий и поверхностей [Текст] / С.А. Игнатъев, А.И. Фоломин, Э.Х. Муратбаев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 29–38.
10. Коротич А.В. Инновационные решения архитектурных оболочек: альтернатива традиционному строительству [Текст] / А.В. Коротич // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. — 2015. — № 4. — С. 70–75.
11. Кривошапко С.Н. Гидродинамические поверхности [Текст] / С.Н. Кривошапко // Судостроение. — 2021. — № 3. — С. 64–67.
12. Кривошапко С.Н. Новые аналитические формы поверхностей применительно к металлическим художественным изделиям [Текст] / С.Н. Кривошапко // Технологии машиностроения. — 2006. — № 7. — С. 49–51.
13. Кривошапко С.Н. Упрощенный критерий оптимальности для оболочек вращения [Текст] / С.Н. Кривошапко // Приволжский научный журнал. — 2019. — № 4. — С. 108–116.
14. Кривошапко С.Н. Алгебраические поверхности для судовых корпусов [Текст] / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. — 2021. — № 3. — С. 283–292. — DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-3-283-292.
15. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях [Текст] / И.А. Мамиева // Academia. Архитектура и строительство. — 2020. — № 1. — С. 150–165.
16. Рынковская М.И. Расчет и применение геликоидальных оболочек [Текст] / М.И. Рынковская // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Инженерные исследования». — 2009. — № 3. — С. 113–116.
17. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 14–27.
18. Сименко А.И. Моделирование и визуализация поверхностей, их особенности и применение [Текст] / А.И. Сименко, Р.Р. Копейкин, Е.В. Сименко // Современные образовательные технологии в преподавании естественно-научных и гуманитарных дисциплин: Сборник научных трудов IV Международной научно-методической конференции, Санкт-Петербург, 11–12 апреля 2017 года / Отв. ред. А.Б. Маховиков. — СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2017. — С. 888–895.
19. Страшнов С.В. Велароидальные оболочки и оболочки велароидального типа [Текст] / С.В. Страшнов // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 11–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19.

20. Страшнов С.В. К вопросу о классификации аналитических поверхностей [Текст] / С.В. Страшнов, М.И. Рынкoвская // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 36–43. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43.
21. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction. *Building and Reconstruction*, 2021, № 6, pp. 63–72. DOI: 10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72.
22. Jasion P., Magnucki K. Buckling and post-buckling analysis of an untypical shells of revolution // *Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proceedings of the 6th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*. 2016, pp. 766–771. DOI: 10.1201/9781315641645-125.
23. Jasion P., Magnucki K. Elastic buckling of clothoidal–spherical shells under external pressure — theoretical study. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 86, pp. 18–23. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.001.
24. Kheyfets A.L., Galimov D. and Shleykov I. Kinematic and analytical surfaces programming for solution of architectural designing tasks. *GraphiCon-2001 Proceedings*, 2001, pp. 283–286.
25. Kolmanic S., Guid N. The flattening of arbitrary surfaces by approximation with developable strips. *From Geometric Modeling to Shape Modeling* (U. Cugini, M. Wozny, eds.). Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 35–44. DOI: 10.1007/978-0-387-35495-8_4.
26. Krivoschapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 201–209. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209.
27. Krivoschapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2021, vol. 27, no. 6, pp. 553–561. DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561.
28. Nick B. Different domes for a sky dome // *3D Warehouse / Trimble Inc. The Netherlands*, 2014. URL: <https://3dwarehouse.sketchup.com/model/95afa0a51717cfc0763cd81c1b401a16/Different-domes-for-a-sky-dome> (дата обращения: 31.12.2022).
29. Postle B. Methods for creating curved shell structures from sheet materials. *Buildings*, 2012, 2, pp. 424–455. DOI: 10.3390/buildings2040424.
30. Stadler W., Krishnan V. Natural structural shapes for shells of revolution in the membrane theory of shells. *Structural Optimization*. March 1989, vol. 1, no. 1, pp. 19–27.
31. Van Mele T., Rippmann M., Lachauer L. and Block P. Geometry-based understanding of structures. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2012, 53, pp. 1–5.
- sphere compatibility: human, region, technologies]. 2021, I. 1, pp. 3–11. DOI: 10.21869/2311-1518-2021-33-1-3-11. (in Russian)
2. Berestova S.A., Misyura N.E., Mityushov E.A. Geometriya samonesushchikh pokrytiy na pryamougol'nom plane [Geometry of self-supporting coatings on rectangular plan]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2017, I. 4, pp. 15–18. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18. (in Russian)
3. Bondarenko I.A. Ob umestnosti i umerennosti arkhitekturnykh novacy [On the appropriateness and moderation of architectural innovation]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo* [Academia. Architecture and Construction]. 2020, I. 1, pp. 13–18 (in Russian).
4. Vanin V.V., Shambina S.L., Virchenko G.I. Variantnoe komputernoe maketirovanie obolochek na osnove poliparametrizatsii ih seredinykh poverkhnostey [Variant computer shell prototyping based on polyparameterization of middle surfaces]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2015, I. 6, pp. 3–8. (in Russian)
5. Grinko E.A. Klassifikatsiya analiticheskikh poverkhnostey primenitel'no k parametricheskoy arkhitekture i mashinostoreniyu [Classification of analytical surfaces in relation to parametric architecture and engineering]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta družby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya* [RUDN Journal of engineering researches]. 2018, V. 19, I. 4, pp. 438–456. (in Russian)
6. Ermolenko E.V. Formy i postroeniya v arkhitekture sovet'skogo avangarda I ih interpretatsiya v sovremennoy zarubejnoj praktike [Forms and constructions on the architecture of the soviet avant-garde and their interpretation in modern foreign practice]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo* [Academia. Architecture and Construction]. 2020, I. 1, pp. 39–48. DOI: 10.22337/2077-2020-1-39-48. (in Russian)
7. Zgoda Yu.N., Semenov A.A. Avtomatizirovannoe modelirovanie obolochek konstruktsiy v Autodesk Revit s ispol'zovaniem Dynamo [Automated shell modeling in Autodesk Revit using Dynamo]. *V sbornike "Novye informatsionnye tekhnologii v arkhitekture i stroitel'stve": Materialy IV Mejdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Ekaterinburg* [In the collection "New Information Technologies in Architecture and Construction": Proceedings of the IV International Scientific and Practical Conference. Yekaterinburg]. 2021, p. 40. (in Russian)
8. Ivanov V.N. Geometriya I formoobrazovanie modifizirovannykh poverkhnostey Kunsu [Forming the surfaces on fourangle curved plan]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta družby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya* [RUDN Journal of Engineering Researches]. 2011, I. 2, pp. 85–90. (in Russian)
9. Ignat'ev S.A., Folomkin A.I., Muratbaev E.H. Funktsional'nye vozmojnosti sredy Wolfram Mathematica dlya vizualizatsii krivuh liniy i poverkhnostey [Wolfram Mathematica Functional Possibilities for Curved Lines and Surfaces Vis-

References

1. Alborova L.A. Minimal'nye poverkhnosti v stroitel'stve i arkhitekture [Minimal surfaces in building and architecture]. *Biosfernaya sovместimost': chelovek, region, tekhnologii* [Bio-

- ualization]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 1, pp. 29–38. (in Russian)
10. Korotich A.V. Innovacionnye resheniya arkhitekturnykh obolochek: alternativa tradicionnomy stroitel'stvy [Innovative Solutions Of Architectural Shells: Alternative to Traditional Building Construction]. *Akademicheskij vetnik Ural-NIIproekt*, 2015, No. 4, pp. 70–75. (in Russian)
 11. Krivoschapko S.N. Gidrodinamicheskie poverkhnosti [Hydrodynamic surfaces]. *Sudostroenie* [Shipbuilding]. 2021, I. 3, pp. 64–67. (in Russian)
 12. Krivoschapko S.N. Novye analiticheskie formy poverkhnostey primenitel'no k metallicheskim khydojestvennym izdeliyam [New analytical forms of surfaces as applied to metal art products]. *Technologiya mashinostroeniya* [Engineering Technology]. 2006, I. 7, pp. 49–51 (in Russian)
 13. Krivoschapko S.N. Uproshchennyj kriterij optimal'nosti dlya obolochek vrashcheniya [A simplified criterion of optimality for shells of revolution]. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal* [Privolzhsky Scientific Journal]. 2019, I. 4, pp. 108–116. (in Russian)
 14. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. Algebraicheskie poverkhnosti dlya sudovykh korpusov [Analytical surfaces for ship hulls]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya* [RUDN Journal of Engineering Researches]. 2021, V. 22, I. 3, pp. 283–292. DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-3-283-292. (in Russian)
 15. Mamieva I.A. Analiticheskie poverkhnosti dlya parametricheskoy arkhitektury v sovremennykh zdaniyakh i sooruzheniyakh [Analytical surfaces for parametric architecture in modern buildings and constructions]. *Akademiya. Arkhitektura i stroitel'stvo* [Academia. Architecture and construction]. 2020, I. 1, pp. 150–165. (in Russian)
 16. Rynkovskaya M.I. Raschet i primeneniye gelikoidal'nykh obolochek [Application and Analysis of Right Helicoidal Shells]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya* [RUDN Journal of Engineering Researches]. 2009, I. 3, pp. 113–116. (in Russian)
 17. Sal'kov N.A. Obshchie printsipy zadaniya lineychatykh poverkhnostey. Chast'2 [General principles of definition of linear surfaces. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2019, V. 7, I. 4, pp. 14–27. (in Russian)
 18. Simenko A.I., Kopeikin R.R. and Simenko E.V. Modelirovaniye i vizualizatsiya poverkhnostey, ih osobennosti i primeneniye [Simulation and Visualization of Surfaces, Their Features and Applications]. *Sovremennyye obrazovatel'nye tekhnologii v prepodavanii estestvenno-nauchnykh i gumanitarnykh disciplin: Sbornik nauchnykh trudov IV Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferencii, Sankt-Peterburg, 11–12 aprelya 2017 goda* / Otv. red. A.B. Mahovikov. Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskij gornyy universitet, 2017, pp. 888–895. (in Russian)
 19. Strashnov S.V. Velaroidal'nye poverkhnosti i poverkhnosti velaroidal'nogo tipa [Velaroidal shells and shells of the velaroidal type]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2022, V. 10, I. 2, pp. 11–19. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19. (in Russian)
 20. Strashnov S. V., Rynkovskaya M. I. Funkcional'nye vozmozhnosti sredy Wolfram Mathematica dlya vizualizatsii krivuh linii i poverkhnostey [To the Question of the Classification for Analytical Surfaces]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 1, pp. 36–43. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43 (in Russian)
 21. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction. *Building and Reconstruction*, 2021, I. 6, pp. 63–72. DOI: 10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72.
 22. Jasion P., Magnucki K. Buckling and post-buckling analysis of an untypical shells of revolution // *Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proceedings of the 6th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*. 2016, pp. 766–771. DOI: 10.1201/9781315641645-125.
 23. Jasion P., Magnucki K. Elastic buckling of clothoidal-spherical shells under external pressure — theoretical study. *Thin-Walled Structures*. 2015, V. 86, pp. 18–23. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.001.
 24. Kheyfets A.L., Galimov D., Shleykov I. Kinematic and analytical surfaces programming for solution of architectural designing tasks. *GraphiCon-2001 Proceedings*, 2001, pp. 283–286.
 25. Kolmanich S., Guid N. The flattening of arbitrary surfaces by approximation with developable strips. *From Geometric Modeling to Shape Modeling* (U. Cugini, M. Wozny, eds.). Kluwer Academic Publishers; 2001. p. 35–44. DOI: 10.1007/978-0-387-35495-8_4.
 26. Krivoschapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019, V. 15, I. 3, pp. 201–209. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209.
 27. Krivoschapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021, V. 27, I. 6, pp. 553–561. DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561.
 28. Nick B. Different domes for a sky dome // *3D Warehouse / Trimble Inc. The Netherlands*, 2014. URL: <https://3dwarehouse.sketchup.com/model/95afa0a51717cfc0763cd81c1b401a16/Different-domes-for-a-sky-dome> (дата обращения: 26.12.2022).
 29. Postle B. Methods for creating curved shell structures from sheet materials. *Buildings*, 2012, 2, pp. 424–455. DOI: 10.3390/buildings2040424.
 30. Stadler W., Krishnan V. Natural structural shapes for shells of revolution in the membrane theory of shells. *Structural Optimization*. March 1989, V. 1, I. 1, pp 19–27.
 31. Van Mele T., Rippmann M., Lachauer L. and Block P. Geometry-based understanding of structures. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2012, 53, pp. 1–5.