

Научная статья

Статья в открытом доступе

УДК 621

doi: 10.30987/2782-5957-2023-6-12-20

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ПСЕВДОСРЕДЫ

Владимир Александрович Дмитриев<sup>1✉</sup>, Александр Федорович Денисенко<sup>2</sup>, Любовь Юрьевна Подкругляк<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

<sup>1</sup> dmitriev\_v\_a@mail.ru

<sup>2</sup> sammortor@yandex.ru

<sup>3</sup> podkruglak@mail.ru

### Аннотация

Рассмотрены вопросы анализа тепловой картины шпиндельного узла станка. Разработана методика получения регрессионных моделей в среде MS Excel. Предложена линейная регрессионная модель изменения контактного термического сопротивления без учета взаимодействия факторов в тепловой модели соединений деталей станка. Используя инструмент «Корреляция», выполнена сравнительная оценка значимости и отсева части факторов путем анализа парных коэффициентов линейной

корреляции. С помощью инструмента «Регрессия» на основе метода наименьших квадратов (МНК) выполнена численная оценка параметров предложенных моделей и проверка их качества; доказана гомоскедастичность остатков регрессии; выполнен анализ статистической эквивалентности построенных моделей.

**Ключевые слова:** корреляция, регрессия, метод наименьших квадратов, гомоскедастичность, линейная регрессионная модель, сопротивление.

Ссылка для цитирования:

Дмитриев В.А. Исследование неполной линейной регрессионной модели термического сопротивления контактной псевдосреды / В. А. Дмитриев, А. Ф. Денисенко, Л. Ю. Подкругляк // Транспортное машиностроение. – 2023. - № 06. – С. 12-20. doi: 10.30987/2782-5957-2023-6-12-20.

Original article

Open Access Article

## STUDY OF INCOMPLETE LINEAR REGRESSION MODEL OF THERMAL RESISTANCE OF THE COUPLING PSEUDO-MEDIUM

Vladimir Aleksandrovich Dmitriev<sup>1✉</sup>, Aleksandr Fedorovich Denisenko<sup>2</sup>, Lyubov Yuryevna Podkruglyak<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Samara State Technical University, Samara, Russia

<sup>1</sup> dmitriev\_v\_a@mail.ru

<sup>2</sup> sammortor@yandex.ru

<sup>3</sup> podkruglak@mail.ru

### Abstract

The problems of analyzing the thermal pattern of the spindle assembly of the machine are considered. A technique for obtaining regression models in MS Excel environment is developed. A linear regression model of changing the contact thermal resistance is proposed without taking into account the interaction of factors in the thermal model of the joints of machine

parts. Using the *Correlation* tool, a comparative assessment of the significance and elimination of some factors are performed by analyzing matching linear correlation coefficients. With the help of the *Regression* tool based on the least squares method (LSM), a numerical evaluation of the parameters of the proposed models and their quality check are performed; the ho-

moscedasticity of the regression residues is proved; the statistical equivalence of the constructed models is analyzed.

*Reference for citing:*

Dmitriev VA, Denisenko AF, Podkruglyak LYu. Study of incomplete linear regression model of thermal resistance of the coupling pseudo-medium. *Transport Engineering*. 2023; 6:12-20. doi: 10.30987/2782-5957-2023-6-12-20.

## Введение

Для разработки зависимостей, учитывающих условия формирования контактного термического сопротивления (КТС), необходимо выделить существенные факторы, влияющие на это сопротивление [1,2].

Значительное число действующих факторов и различие степени их влияния приводят к выводу, что для их всестороннего учета в тепловой модели в соединении деталей следует расположить псевдослой (псевдосреду), обладающий рядом характеристик [3].

В работе [4] приведены результаты прогнозирования тепловой картины шпиндельных узлов станка, влияющих на точность обработки, в условиях псевдосреды,

**Keywords:** correlation, regression, least squares method, homoscedasticity, linear regression model, correlation.

состоящей из площадок фактического контакта и полостей, заполненных воздухом или маслом. Определены четыре фактора, оказывающих доминирующее влияние на КТС: толщина псевдосреды, номинальное давление в контакте, предел текучести контактирующего материала и параметр, определяющий расположение зоны фактического контакта [5,6]. На основе ПФЭ  $2^4$  с учетом 3-х кратного дублирования опытов получена адекватная регрессионная модель

$(\sigma_{ад}^2 = 0,0001578, \sigma_y^2 = 0,0002335, F_{расч} = 0,678 < F_{кр(0,05;5;32)} = 2,512)$  изменения температуры  $\Delta T, ^\circ\text{K}$  в зоне контакта в виде:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{34}x_3x_4 + b_{123}x_1x_2x_3 + e_i \quad (1)$$

Следует отметить, что надежно дублировать параметры толщины псевдосреды и предел текучести контактирующего материала вряд ли возможно в силу нерегулярного профиля шероховатости и неизбежного рассеивания значений предела текучести, полученных в результате испытаний образцов на растяжение или взятых из справочных источников. С одной стороны, чем больше статистических данных получено за счет дублирования при определении уравнения регрессии, тем точнее должна быть определена искомая зависимость. Однако само количество статистических данных не может обеспечить получение достоверной зависимости, если в действительности такой зависимости между исследуемыми величинами не существует. Дублирование опытов существенно занижает дисперсии коэффициентов регрессии  $\sigma_{bi}^2$  и дисперсии воспроизводимости опытов  $\sigma_y^2$ , увеличивая дисперсию

адекватности модели регрессии  $\sigma_{ад}^2$ , что существенно влияет на величину расчетного значения  $F$ -критерия и в итоге - на вывод об адекватности модели регрессии в целом.

Применение МНК,  $t$ -тестов,  $F$ -тестов для оценки регрессии оправдано лишь в том случае, когда ошибки (остатки) регрессии  $\varepsilon_i$  имеют нулевое математическое ожидание и одинаковую дисперсию. Свойство одинаковой дисперсии ошибки  $\varepsilon_i$  называется гомоскедастичностью. Если дисперсии ошибки различны для разных наблюдений (разных  $X_i$ ), это явление называется гетероскедастичностью. Поэтому необходима статистическая оценка остатков регрессии. Избежать подобной неопределенности эксперимента позволяет использование технологии корреляционного и регрессионного анализа в среде MS Excel или LibreOffice [7,8].

## Методика коррекции математической модели регрессии

Средствами надстройки программы «Пакет анализа» с использованием встроенных функций Мастера функций, инструментов «Корреляция» и «Регрессия» на основе метода наименьших квадратов выполним численную оценку параметров линейной регрессионной модели (1) без учета взаимодействий факторов и проверки её качества по плану ПФЭ  $2^4$  (рис.1).

На рис.1 в табл.1 приведены уровни и интервалы варьирования факторов, а в табл.2 – матрица планирования полного факторного эксперимента ПФЭ  $2^4$  в кодированном виде и правило чередования знаков в строках матрицы. В столбце G11:G26 приведены опытные результаты измерений зависимой переменной  $\Delta T = Y_{оп}$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
3	Таблица 1. Уровни и интервалы варьирования факторов										
4	Уровни факторов										
5	Верхний	1	$x1=h$ 175	$x2=q$ 175	$x3=\sigma$ 400	$x4=l$ 4,15					
6	Нижний	-1	1	1	150	0					
7	Основной	0	4	88	275	2,075					
8	Интервал варьирования $\Delta x_i$	$\Delta x_i$	3	87	125	2,075					
9	Таблица 2. Матрица ПФЭ $2^4$ (-1), а, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd										
10	№ опыта	X0	X1	X2	X3	X4	Y <sub>оп</sub>	Y <sub>рег</sub>	(Y <sub>оп</sub> -Y <sub>рег</sub> ) <sup>2</sup>	(Y <sub>рег.ср</sub> -Y <sub>рег</sub> ) <sup>2</sup>	
11	1	1	-1	-1	-1	-1	0,163	0,222	0,0035	0,0267	
12	2	1	1	-1	-1	-1	0,883	0,737	0,0213	0,1233	
13	3	1	-1	1	-1	-1	0,028	-0,128	0,0243	0,2638	
14	4	1	1	1	-1	-1	0,123	0,387	0,0696	0,0000	
15	5	1	-1	-1	1	-1	0,17	0,335	0,0271	0,0026	
16	6	1	1	-1	1	-1	0,933	0,849	0,0070	0,2148	
17	7	1	-1	1	1	-1	0,123	-0,015	0,0192	0,1610	
18	8	1	1	1	1	-1	0,463	0,499	0,0013	0,0129	
19	9	1	-1	-1	-1	1	0,177	0,272	0,0091	0,0129	
20	10	1	1	-1	-1	1	0,973	0,787	0,0346	0,1610	
21	11	1	-1	1	-1	1	0,06	-0,078	0,0190	0,2148	
22	12	1	1	1	-1	1	0,23	0,437	0,0428	0,0026	
23	13	1	-1	-1	1	1	0,185	0,385	0,0399	0,0000	
24	14	1	1	-1	1	1	1,003	0,899	0,0107	0,2638	
25	15	1	-1	1	1	1	0,122	0,035	0,0076	0,1233	
26	16	1	1	1	1	1	0,537	0,549	0,0002	0,0267	
27							$\Sigma =$	6,173	0,3372	1,6103	
28		$\sigma x_i =$	1,033	1,033	1,033	1,033	Y <sub>рег. ср</sub>	0,3858	S <sup>2</sup> (y) =	0,03066	
29						$\sigma y =$	0,36032	Ст. ошибка	S(y) =	0,175	
30	Таблица 3. Определение значений коэффициентов парной линейной корреляции $r_{x_i x_j}$										
31	x1x2	x1x3	x1x4	x2x3	x2x4	x3x4	x1y	x2y	x3y	x4y	
32	0	0	0	0	0	0	0,738	-0,502	0,161	0,072	
33							Таблица 5		Таблица 4		
34	Определение уравнения линейной регрессии						Проверка значимости коэф. корреляции				
35	$b_i$	0,025	0,056	-0,175	0,257	0,386	t <sub>табл</sub>	значение	вывод	t <sub>кр</sub> (0,05; n-2)	
36	$S_{b_i} = \sigma_i$	0,0438	0,0438	0,0438	0,0438	0,0438	t <sub>(x1y)</sub> =	4,086	значим	2,145	
37	R <sup>2</sup>	0,827	0,175	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	t <sub>(x2y)</sub> =	2,171	значим		
38	F <sub>расч</sub>	13,13	11,00	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	t <sub>(x3y)</sub> =	0,611	не значим		
39	SS	1,6103	0,3372	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	t <sub>(x4y)</sub> =	0,269	не значим		
40							Таблица 7		Таблица 6		
41	Y <sub>рег</sub> = 0,386+0,257X1-0,175X2+0,056X3+0,025X4						Оценка достоверности R <sup>2</sup> (F <sub>расч</sub> ; k; df)				
42	Оценка достоверности коэффициентов уравнения						$\alpha$	1- $\alpha$	Вывод		
43	t <sub>i</sub> = b <sub>i</sub> /σ <sub>i</sub>	0,573	1,284	3,999	5,878	8,814	0,00036	0,99964	Уравнение достоверно		
44	$\beta$ -распр.	0,578	0,226	0,002	0,00011	0,000003					
45	1- $\beta$	0,422	0,774	0,998	0,9999	0,999997					

Рис. 1. Численная оценка параметров регрессионной модели с помощью функции ЛИНЕЙН

Fig. 1. Numerical estimation of the regression model parameters using the LINEAR

С помощью встроенной функции «Корреляция» в табл.3 и табл.4 рис. 1 выполнена сравнительная оценка значимости и отсева части факторов путем анализа парных коэффициентов линейной корреляции  $r_{y,x}$ . Анализ таблиц показал, что факторы  $X_1$ - $X_4$  между собой линейно независимы; наибольшее значимое прямое влияние на изменение температуры  $\Delta T$  в зоне контакта оказывает фактор  $X_1$  и обратное чуть менее значимое влияние - фактор  $X_2$ . Факторы  $X_3$  и  $X_4$  существенно меньше связаны с функцией отклика  $Y$ .

Оценим значимость коэффициентов корреляции  $r_{x_3y}$  и  $r_{x_4y}$ . С этой целью рассмотрим две гипотезы. Основную  $H_0: r_{xy} = 0$  и альтернативную  $H_1: r_{xy} \neq 0$ . Для проверки нулевой гипотезы рассчитаем соответственно в ячейках  $H38$  и  $H39$   $t$ -статистику Стьюдента по формуле [9]:

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}}, \quad (2)$$

где  $n$  – число строк матрицы,  $n = 2^4 = 16$ .

Сравним полученное значение с критическим значением  $t_{кр}(v, \alpha)$  распределения Стьюдента с помощью встроенной функции СТЬЮДРАСПОБР ( $v, \alpha$ ) при числе

### Основные результаты и обсуждение

Получим модель регрессии и оценим коэффициенты уравнения множественной линейной регрессии без учета взаимодействия факторов. В среде MS Excel поиск модели регрессии чаще всего осуществляется следующими способами:

- с помощью встроенной функции ЛИНЕЙН;

- с помощью инструмента «Регрессия» из Пакета анализа;

- графическим способом – построением линии тренда на диаграмме с показом уравнения регрессии и расчетного значения коэффициента детерминации  $R^2$ .

Статистическая функция ЛИНЕЙН ( $Y$ ;  $X$ ; константа; статистика) возвращает линейное уравнение регрессии, позволяет

$$Y_{регp} = 0,386 + 0,257X_1 - 0,175X_2 + 0,056X_3 + 0,025X_4 \quad (4)$$

В ячейках  $I27$  и  $J27$  соответственно приведены результаты расчета регресси-

степеней свободы  $v = n - 2 = 14$  и уровне значимости  $\alpha = 0,05$ :

$$t_{кр(0,05;14)} = 2,145.$$

Так как  $t_{(x_3y)} = 0,611 < 2,145$  и  $t_{(x_4y)} = 0,269 < 2,145$ , то нет оснований отказаться от нулевой гипотезы  $r_{xy} = 0$  и поэтому найденные коэффициенты корреляции незначимы.

Определим частные коэффициенты корреляции и тесноту их связи с функцией отклика

$$r_{yx_i/x_j} = \frac{r_{yx_i} - r_{yx_j}r_{x_ix_j}}{\sqrt{(1-r_{yx_j}^2)(1-r_{x_ix_j}^2)}}, \quad (3)$$

$$r_{yx_1/x_2} = 0,853; r_{yx_1/x_3} = 0,747; r_{yx_1/x_4} = 0,739$$

теснота связи высокая.

$$r_{yx_2/x_1} = -0,743; r_{yx_2/x_3} = -0,508; r_{yx_2/x_4} = -0,503$$

теснота связи умеренная.

$$r_{yx_3/x_1} = 0,238; r_{yx_3/x_2} = 0,186; r_{yx_3/x_4} = 0,161$$

теснота связи низкая.

$$r_{yx_4/x_1} = 0,106; r_{yx_4/x_2} = 0,083; r_{yx_4/x_3} = 0,073$$

теснота связи низкая.

Низкая теснота связи частных коэффициентов корреляции подтверждает незначимость факторов  $X_3$  и  $X_4$ .

оценить коэффициенты уравнения множественной линейной регрессии в виде

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i$$

и получить данные для оценки достоверности. Синтаксис операций требует введения массивов матриц  $Y$ ,  $X$ ; выделения диапазона ячеек для вывода результата операции, в котором всегда 5 строк, а число столбцов на единицу больше числа независимых аргументов  $X$ ; ввода формулы операции и нажатия комбинации клавиш CTRL+SHIFT+ENTER. В столбце  $H11:H26$  табл.2 приведены результаты  $\Delta T = Y_{регp}$ , полученные по уравнению

онной и остаточной суммы квадратов, которые совпадают с значениями в ячейках

В39 и С39, полученными с помощью статистической функции ЛИНЕЙН. В ячейке В37 приведено расчетное значение коэффициента детерминации  $R^2$ , которое показывает долю вариации изменения температуры в зоне контакта  $\Delta T = Y_{\text{рег}}$ , находящейся под воздействием выбранных независимых факторов  $X_i$ . Значение  $R^2 = 0,827$  показывает, что примерно 83% вариации  $\Delta T$  определяется значениями факторов  $X_1 - X_4$  на основании полученной множественной линейной функции регрессии. В качестве меры точности регрессии принимают несмещенную оценку дисперсии остаточной компоненты, определяемую как отношение суммы квадратов уровней остаточной компоненты (ячейка J27 в табл.2) к величине  $(n-k-1)$ , где  $k$  – количество факторов, включенных в модель (ячейка J28). Корень квадратный из этой величины называется стандартной ошибкой оценки регрессии  $S_e = 0,175$  (ячейка J29). Аналогичный результат, полученный с помощью статистической функции ЛИНЕЙН, приведен в ячейке С37.

Оценим достоверность самой величины  $R^2$  с помощью  $F$  распределения, которое определяет  $\alpha$  – вероятность того, что зависимость  $y$  от  $x$  отсутствует. Статистическая функция Excel ФРАСП ( $F_{\text{расч}}$ ;  $k$ ;  $df$ ) возвращает величину  $\alpha$ ; следовательно,  $(1-\alpha)$  – вероятность того, что такая зависимость существует. Значение числа степе-

ней свободы  $df = n - (k + 1)$  приведено в ячейке С38. В табл.5 рис. 1 в ячейке В38 приведено расчетное значение  $F$ -критерия, а табл.6 рис. 1 в ячейке G43 приведен результат оценки достоверности величины  $\alpha$ : близкое к единице значение  $(1-\alpha)$  свидетельствует о достоверности полученного уравнения регрессии.

Оценка достоверности коэффициентов уравнения линейной регрессии, выполненная с помощью распределения Стьюдента и статистической функции Excel СТЬЮДРАСП, показала (табл.7 рис. 1), что достоверность коэффициентов  $b_3$  и  $b_4$  должна быть поставлена под сомнение. Проверка значимости факторов с использованием частных  $F$ -критериев Фишера [10] подтвердила, что факторы  $X_3$  и  $X_4$  не целесообразно включать в модель.

Тогда уравнение множественной регрессии (1) примет вид:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + e_i, \quad (5)$$

где  $e_i$  – остатки регрессии.

Найдем коэффициенты линейного уравнения регрессии (5) с помощью инструмента «Регрессия» пакета Анализ данных (рис.2). Факторы  $X_1$  и  $X_2$  выбраны как наиболее тесно связанные с результирующей переменной  $Y$ .

На рис. 2 приведены результаты использования инструмента «Регрессия» и получено адекватное уравнение регрессии:

$$Y_{\text{рег}} = 0,386 + 0,257 X_1 - 0,175 X_2 + e_i \quad (6)$$

Сравнивая результаты регрессии по 2-х факторной модели (6) с результатами, полученными с помощью статистической функции ЛИНЕЙН по 4-х факторной модели (4), видим, что коэффициенты  $b_0$ , а также  $b_1$  и  $b_2$  при независимых переменных  $X_1$  и  $X_2$  полностью совпадают в обоих случаях.

Выполним оценку остатков регрессии (6). В Excel нет встроенных тестов на гетероскедастичность, но можно вручную провести тест Голдфелда–Куандта [11]. Нулевая гипотеза теста – остатки модели гомоскедастичны, альтернативная – остатки гетероскедастичны. Характер графиков

остатков (рис. 2) показывает, что остатки модели примерно одинаковы по модулю и распределены примерно симметрично.

Для численной оценки сначала все наблюдения упорядочим по возрастанию и разделим на три группы: в первой группе имеем  $n_1 = 6$  наименьших значений остатков, в третьей группе имеем  $n_2 = 6$  наибольших значений, наблюдениями средней группы пренебрегаем (рис. 3).

Расчетная статистика теста Голдфелда–Куандта имеет вид:

$$F_{(n_2-k;n_1-k)} = \frac{ESS_2 / (n_2 - k)}{ESS_1 / (n_1 - k)}, \quad (7)$$

где  $n_1, n_2$  - количество наблюдений в каждой группе;  $k$  - количество параметров, оцененных в регрессии; статистика имеет

$F$ -распределение со степенями свободы числителя ( $n_2 - k$ ) и знаменателя ( $n_1 - k$ ).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ уравнения: $Y_{регр} = 0,386 + 0,257X_1 - 0,175X_2 + e$						
2	Множественный R	0,892	Параметры	df	SS	MS	F	Значимость F	
3	R-квадрат	0,796	Регрессия	2	1,54971	0,77485	25,323	3,28155E-05	
4	Нормированный R-квадрат	0,764	Остаток	13	0,397777	0,03060			
5	Стандартная ошибка	0,175	Итого	15	1,94748				
6	Наблюдения	16							
7									
8	Параметры	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%		
9	Y-пересечение	0,386	0,04373	8,822	7,5408E-07	0,291337711	0,480287289		
10	X1	0,257	0,04373	5,884	5,3756E-05	0,162837711	0,351787289		
11	X2	-0,175	0,04373	-4,003	0,00150305	-0,269537289	-0,080587711		
12									
13	Вывод остатка								
14	Наблюдение	Предсказанное Yоп	Остатки e	$e^2$					
15	1	0,3035625	-0,1405625	0,019757816					
16	2	0,8181875	0,0648125	0,00420066					
17	3	-0,0465625	0,0745625	0,005559566					
18	4	0,4680625	-0,3450625	0,119068129					
19	5	0,3035625	-0,1335625	0,017838941					
20	6	0,8181875	0,1148125	0,01318191					
21	7	-0,0465625	0,1695625	0,028751441					
22	8	0,4680625	-0,0050625	2,56289E-05					
23	9	0,3035625	-0,1265625	0,016018066					
24	10	0,8181875	0,1548125	0,02396691					
25	11	-0,0465625	0,1065625	0,011355566					
26	12	0,4680625	-0,2380625	0,056673754					
27	13	0,3035625	-0,1185625	0,014057066					
28	14	0,8181875	0,1848125	0,03415566					
29	15	-0,0465625	0,1685625	0,028413316					
30	16	0,4680625	0,0689375	0,004752379					
31			$\Sigma =$	0,397777					



Рис. 2. Вывод итогов инструмента «Регрессия»  
Fig. 2. Output of the results of the Regression tool

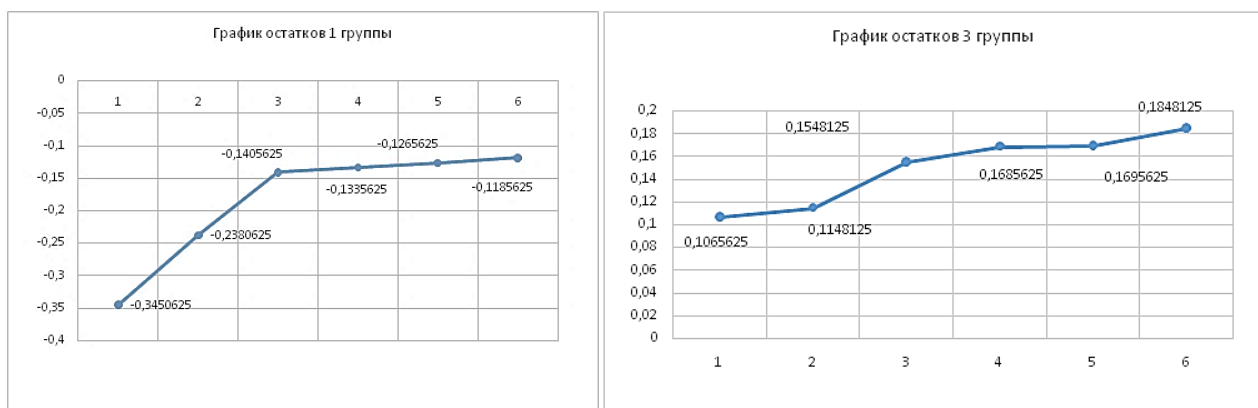


Рис. 3. Графики остатков регрессии по двум группам  
Fig. 3. Graphs of regression residuals for two groups

Используя суммы квадратов остатков ( $ESS$ ) в оцененных регрессиях (табл.1), рассчитываем тестовую статистику по формуле (7); при этом в числителе -

наибольшая из двух дисперсий – «сумма квадратов остатков, деленная на степень свободы» ( $ESS_1/(n_1 - k)$ ) или  $ESS_2/(n_2 - k)$ . Сравниваем полученное значение  $F_{расч}$  с

критическим  $F_{кр}$  при выбранном уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Если значение  $F_{расч}$  превышает критическое  $F_{кр}$ , то нулевая гипотеза о гомоскедастичности отклоняется и в остатках модели присутствует гетероскедастичность.

Иначе ( $F_{расч} < F_{кр}$ ) остатки модели признаются гомоскедастичными. Рассчитаем по формуле (7)  $F$ -статистику:

$$F_{(n_2-k; n_1-k)} = \frac{0,2434/(6-3)}{0,1398(6-3)} = 1,741.$$

Таблица 1

Проверка остатков модели регрессии на гомоскедастичность

Table 1

*Checking the residuals of the regression model for homoscedasticity*

Ранжированные остатки первой группы $e_i$	$e_i^2$	Ранжированные остатки третьей группы $e_i$	$e_i^2$
-0,3450625	0,119068129	0,1065625	0,011355566
-0,2380625	0,056673754	0,1148125	0,01318191
-0,1405625	0,019757816	0,1548125	0,02396691
-0,1335625	0,017838941	0,1685625	0,028413316
-0,1265625	0,016018066	0,1695625	0,028751441
-0,1185625	0,014057066	0,1848125	0,03415566
ESS <sub>2</sub> = 0,243413773		ESS <sub>1</sub> = 0,139824805	

С помощью встроенной функции ФРАСПОБР ( $\alpha; n_1-k; n_2-k$ ) имеем  $F_{кр(0,05; 3; 3)} = 9,277$ . Так как  $F_{расч} < F_{кр}$ , то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о гомоскедастичности остатков модели регрессии.

Проведем анализ статистической эквивалентности построенных моделей (4) и (6) посредством сравнения их остаточных дисперсий. Для сравнения остаточных дисперсий  $S_{ост1}^2$  (ячейка E4, рис.2) и  $S_{ост2}^2$  (ячейка C39, рис.1) вычисляется статистика:

$$F = \frac{\max(0,3977; 0,3372)}{\min(0,3977; 0,3372)} = \frac{0,3977}{0,3372} = 1,179.$$

При  $\alpha = 0,05$ ,  $v_1 = n - k - 1 = 16 - 2 - 1 = 13$  и  $v_2 = n - k - 1 = 16 - 4 - 1 = 11$  с помощью встроенной функции ФРАСПОБР находим  $F_{кр(0,05; 13; 11)} = 2,761$ .

Так как расчетное  $F < F_{кр}$ , то обе модели (4) и (6) одинаково адекватно описывают результаты эксперимента, но предпочтение следует отдать более простой модели (6), имеющей меньшее число коэффициентов. В противном случае, если  $F > F_{кр}$ , предпочтение следует отдать модели с меньшей остаточной дисперсией.

Запись математической модели в реальных физических величинах:

$$x_1 = \frac{h - 4 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}}; x_2 = \frac{q_a - 88 \cdot 10^6}{87 \cdot 10^6} \quad (8)$$

$$\Delta T = 0,221 + 0,085 \cdot 10^6 h - 0,002 \cdot 10^{-6} q_a, \text{ } ^\circ\text{K} \quad (9)$$

Проверим, например, результаты регрессии модели (6) по 1-й и 16-й строкам предсказанных значений (рис. 2). После

подстановок натуральных значений факторов с учетом (8) в уравнение (9) и преобразований получим:

$$\Delta T_1 = 0,221 + 0,085 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 10^6 - 0,002 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} = 0,304$$

$$\Delta T_{16} = 0,221 + 0,085 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 10^6 - 0,002 \cdot 175 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} = 0,466$$

Указанные значения близки результатам моделирования (ячейки B15 и B30 рис. 2).

## Выводы

1. Доминирующее влияние на контактное термическое сопротивление псев-

досреды в тепловой модели соединения деталей станка оказывают два фактора:  $X_1$

- толщина псевдосреды и  $X_2$  - номинальное давление в контакте.

2. С помощью инструмента MS Excel «Регрессия» получено адекватное линейное уравнение множественной регрессии (6) для двух факторов.

3. С помощью теста Голдфелда–Куандта доказана гомоскедастичность остатков регрессии.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Хохлов В.М., Хохлова С.В., Петраков Д.И. Расчет соединений. Брянск, ООО «ВИМАХО», 2007. – 208 с.
2. Меснянкин С.Ю., Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел/ Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 9. С. 945-970.
3. М.В. Зернин, А.П. Бабин, А.В. Мишин, В.Ю. Бурак. Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды»/ Вестник Брянского государственного технического университета. 2007. № 4(16). С. 62-73.
4. Денисенко А.Ф., Подкруглыак Л.Ю. Построение регрессионной модели термического сопротивления контактной псевдосреды. / Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2021. т. 23, №3. С. 47-54.
5. Денисенко А.Ф., Подкруглыак Л.Ю. Разработка тепловой модели шпиндельной опоры металлорежущего станка/ Известия Самарского научного центра Российской академии наук, т. 22, № 3, 2020. С. 49-55.

## REFERENCES

1. Khokhlov VM, Khokhlova SV, Petrakov DI. Calculation of joints. Bryansk: VIMAKHO; 2007.
2. Mesnyankin SYu, Vikulov AG, Vikulov DG. Modern view on the problems of thermal contacting of solids. Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences) 2009;179(9):945-970.
3. Zernin MV, Babin AP, Mishin AV, Burak VYu. Modeling of contact interaction using the provisions of the mechanics of the contact pseudo-medium. Bulletin of the Bryansk State Technical University. 2007;4(16):62-73.
4. Denisenko AF, Podkruglyak LYu. Construction of a regression model of thermal resistance of a contact pseudo medium. Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2021;23(3):47-54.
5. Denisenko AF, Podkruglyak LYu. Development of the heat model of the spindle support metal-cutting machine. Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2020;22(3):49-55.

4. Анализ статистической эквивалентности построенных линейных моделей (4) и (6) без учета взаимодействия факторов показал, что обе модели одинаково адекватно описывают результаты эксперимента, но предпочтение следует отдать более простой модели (6), имеющей меньшее число коэффициентов.

6. A F Denisenko and L Y Podkruglyak. Heat model of a spindle support of a precession metal cutting machine/ IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 971 (2020) 022020. doi:10.1088/1757-899X/971/2/022020.
7. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997. – 384 с.
8. Кеткина О.С. Возможности MS Excel для регрессионного анализа. Электронный текстовый ресурс. – Уральский федеральный университет, 2020. – 43 с. [www.study.urfu.ru](http://www.study.urfu.ru)
9. Закс Л. Статистическое оценивание. Пер. с нем. Под ред. Ю. П. Адлера, В. Г. Горского. – М.: Статистика, 1976. – 598 с.
10. Решение задачи на множественную регрессию в Excel. Электронный текстовый ресурс. – 9с. [https://www.matburo.ru/ex\\_ec.php?p1=ecexcel](https://www.matburo.ru/ex_ec.php?p1=ecexcel)
11. Хайман Д.Н. Современная микроэкономика: анализ и применение. В 2-х т. Т.1. М.: Финансы и статистика, 1992. С.160. - 384с.

6. Denisenko AF, Podkruglyak LYu. Heat model of a spindle support of a precession metal cutting machine. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 971. 2020: 022020. doi:10.1088/1757-899X/971/2/022020
7. Kuritsky BYa. Search for optimal solutions using Excel 7.0. St. Petersburg: BHV-St. Petersburg; 1997.
8. Ketkina OS. MS Excel capabilities for regression analysis [Internet]. Ural Federal University; 2020. Available from: [www.study.urfu.ru](http://www.study.urfu.ru)
9. Zaks L. Statistical evaluation. In: Adler YuP, Gorsky VG, editors. Moscow: Statistika; 1976.
10. Solving the multiple regression problem in Excel [Internet]. Available from: [https://www.matburo.ru/ex\\_ec.php?p1=ecexcel](https://www.matburo.ru/ex_ec.php?p1=ecexcel)
11. Hayman DN. Modern microeconomics: analysis and application. Moscow: Finance and Statistics; 1992.



### Информация об авторах:

**Дмитриев Владимир Александрович** - доцент, к.т.н., тел. 8-917-148-31-18, доцент кафедры «Технология машиностроения, станки и инструменты» СамГТУ.

**Денисенко Александр Федорович** - профессор, д.т.н., тел. 8-927-654-04-35, профессор кафедры

**Dmitriev Vladimir Aleksandrovich** - Associate Professor, Candidate of Technical Sciences of the Department of Technology of Mechanical Engineering, Machines and Tools at SamSTU; phone: 8-917-148-31-18

**Denisenko Aleksandr Fedorovich** - Professor, Doctor of Technical Sciences of the Department of Technolo-

gy of Mechanical Engineering, Machines and Tools at SamSTU; phone: 8-927-654-04-35

**Подкругляк Любовь Юрьевна** – аспирант, тел. 8-903-335-05-95, старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, станки и инструменты» СамГТУ.

**Podkruglyak Lyubov Yuryevna** – Postgraduate Student, Senior Lecturer of the Department of Technology of Mechanical Engineering, Machines and Tools at SamSTU; phone: 8-903-335-05-95.

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.**

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**The authors declare no conflicts of interests.**

**Статья опубликована в режиме Open Access.**

**Article published in Open Access mode.**

**Статья поступила в редакцию 14.03.2023; одобрена после рецензирования 10.05.2023; принята к публикации 26.05.2023. Рецензент – Хандожко А.В., доктор технических наук, профессор Брянского государственного технического университета, главный редактор журнала «Транспортное машиностроение».**

**The article was submitted to the editorial office on 14.03.2023; approved after review on 10.05.2023; accepted for publication on 26.05.2023. The reviewer is Khandozhko A.V., Doctor of Technical Sciences of Bryansk State Technical University, Editor-in-chief of the journal *Transport Engineering*.**