

НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 512.772

DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-2-7-17

И.А. Беглов

Канд. техн. наук, преподаватель,
Российский технологический университет МИРЭА,
кафедра инженерной графики,
Россия 119571, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78

Моделирование конхоидальных кривых с использованием квазисимметрии относительно эллиптической оси

Аннотация. В данной статье приводятся результаты исследования геометрических свойств конхоиды Никомеда и косой конхоиды. Косая конхоида в данной работе моделируется новым способом, а именно квазисимметрией относительно эллиптической оси. Используемый способ является преобразованием четвёртого порядка плоскости относительно кривой второго порядка. То есть, прямая при квазисимметрии отображается в кривую четвёртого порядка. Образ прямой в данном случае состоит из двух ветвей, которые стремятся к двум асимптотам. Квазисимметрия позволяет получать косую конхоиду, как частный случай при определённых условиях, а в общем случае — множество других конхоидальных кривых. Применение данного способа позволило обнаружить новые геометрические свойства конхоидальных кривых, в частности найти неопределённое ранее конструктивное соответствие между точками, принадлежащими разным ветвям косой конхоиды. В работе сформулированы и доказаны три утверждения, а именно: 1) Образ прямой при её квазисимметрии относительно окружности есть конхоида Никомеда, 2) образ окружности при её квазисимметрии относительно окружности есть кривая шестого порядка, 3) образ прямой параллельной большой полуоси эллипса при её квазисимметрии относительно данного эллипса есть две симметричных относительно малой полуоси эллипса косых конхоиды. Также, выведены уравнения рассматриваемых кривых и их асимптот в общем случае.

Результаты выполненных в данной работе исследований расширяют возможности применения конхоидальных кривых при решении задач инженерной геометрии. Например, при моделировании различных физических явлений и процессов, а также при инженерном и архитектурном проектировании.

Ключевые слова: квазисимметрия, квазивращение, конхоида Никомеда, косая конхоида, конхоидальные кривые.

I.A. Beglov

Candidate of Technical Sciences, Teacher,
Russian Technological University MIREA,
Department of Engineering Graphics,
78, Vernadsky Ave., Moscow, 119571, Russia

Modeling of Conchoidal Curves Using Quasi-Symmetry with Respect to the Elliptic Axis

Abstract. This article presents the results of a study of the geometric properties of the Nicomed conchoid and the oblique conchoid. In this paper, the oblique conchoid is modeled in a new way, namely by quasi-symmetry with respect to the elliptic axis. The method used is a fourth-order transformation of the plane relative to the second-order curve. That is, a straight line with quasi-symmetry is mapped into a fourth-order curve. The image of a straight line in this case consists of two branches that tend to two asymptotes. Quasi-symmetry makes it possible to obtain an oblique conchoid, as a special case under certain conditions, and in the general case, many other conchoidal curves. The use of this method made it possible to discover new geometric properties of conchoidal curves, in particular, to find a previously undescribed constructive correspondence between points belonging to different branches of the oblique conchoid. The paper formulates and proves three statements, namely: 1) The image of a straight line with its quasi-symmetry with respect to a circle is a Nicomedes conchoid, 2) the image of a circle with its quasi-symmetry with respect to a circle is a curve of the sixth order, 3) the image of a straight parallel major semiaxis of an ellipse with its quasi-symmetry with respect to a given ellipse is two symmetrical oblique conchoids with respect to the minor semiaxis of an ellipse. Also, the equations of the curves under consideration and their asymptotes in the general case are derived.

The results of the research carried out in this paper expand the possibilities of using conchoidal curves in solving problems of engineering geometry. For example, when modeling various physical phenomena and processes, as well as in engineering and architectural design.

Keywords: quasi-symmetry, quasi-rotation, Nicomed's conchoid, oblique conchoid, conchoidal curves.

1. Введение

Моделирование кривых линий является частью прикладных задач инженерной геометрии. Подходы к её решению разнообразны [13] и могут выбирать-ся в зависимости от сути конкретной задачи. Конструктивный подход эффективно используется в компьютерной графике [5] и позволяет моделировать аналитические кривые. Сплайн, как инструмент систем автоматизированного проектирования, позволяет решать более сложные задачи данного типа. Разработке теории построения различных сплайнов посвящены работы [10–12; 27; 28]. Также эффективным численным методом моделирования кривых является применение функционально-воксельных компьютерных моделей [21]. Однако на сегодняшний день в компьютерном геометрическом моделировании не теряют актуальность алгебраические кривые второго [7; 8; 12; 17], третьего [11], четвёртого [20] и более высоких порядков. Например, конхоиды.

Конхоидальные кривые имеют широкое применение. С их использованием моделируют процессы и явления в астрономии, а также в механике, оптике и других разделах физики. Конхоиды используются при проектировании технических поверхностей деталей с криволинейными формами и при архитектурном проектировании. Свойства конхоид исследовались геометрами на протяжении веков. Конхоида Никомеда носит имя известного математика, получившего её при попытке поиска точного геометрического решения задачи деления угла на три равные части. Решение задачи трисекции угла не может быть найдено, так как оно сводится к поиску точек пересечения прямой с конхоидой. Найти такие точки с помощью циркуля и линейки не представляется возможным. Однако геометрические свойства конхоид достаточно изучены, что и позволяет использовать эти кривые линии в различных областях науки и техники. В данной статье приведены некоторые геометрические свойства конхоид, выявленные при исследовании свойств соответствия квазисимметрии, выстраиваемого относительно кривых второго порядка. Квазисимметрия — это соответствие индуцируемое квазивращением на конусе инцидентном конике, которая является осью квазивращения. В случае, когда вершина такого конуса совпадает с фокусом коники, он вырождается в двойную плоскость. Подробные результаты исследования свойств соответствия «квазивращение» представлены в работах [2–4; 22–26], анализ частных случаев квазисимметрии точки на плоскости приведён в работе [1].

2. Постановка задачи

Доказать возможность моделирования конхоид с применением квазисимметрии относительно кривых второго порядка. На базе свойств квазисимметрии выявить геометрические свойства моделируемых с её применением конхоид. Раскрыть возможности моделирования различных кривых на базе квазисимметрии и описать их общие свойства.

3. Теория

Аппарат квазивращения индуцирует в пространстве R^3 бесконечное множество соответствий квазисимметрии относительно криволинейной оси второго порядка [24; 25]. В данной статье рассматривается возможность моделирования алгебраических кривых высоких порядков на основе квазисимметрии относительно кривых второго порядка на плоскости.

3.1. Соответствие «квазисимметрия» прямой относительно окружности на плоскости

Квазисимметрия относительно окружности на плоскости (рис. 1) является дву-двузначным соответствием, при котором соответствующие друг другу пространства R_1^2 и R_2^2 принадлежат одной плоскости. При квазисимметрии относительно окружности AS_{ic} (A — axis, S — symmetry, c — circle) любой точке A , принадлежащей пространству R_1^2 , соответствует пара точек A' и A'' принадлежащих пространству R_2^2 , и наоборот:

$$A \in R_1^2, \quad AS_{ic}(A) \rightarrow A', A'' \in R_2^2,$$

$$L \in R_2^2, \quad AS_{ic}(L) \rightarrow L', L'' \in R_1^2,$$

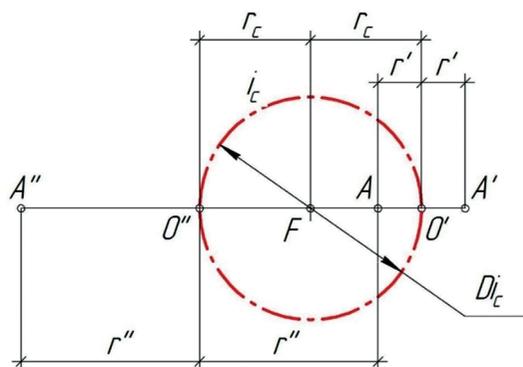


Рис. 1. Квазисимметрия точки A относительно окружности i_c

Согласно аппарату квазисимметрии, любой паре точек A' и A'' в пространстве R_1^2 можно привести в соответствие одну точку относительно круговой оси i_c , если центр окружности i_c задан и лежит на прямой $A'A''$. При этом диаметр оси-окружности равняется половине длины отрезка $A'A''$:

$$D_{ic} = r' + r'' = \frac{A'A''}{2}.$$

Поместим две тройки точек $\{A, A', A''\}$ и $\{F, O', O''\}$ на числовую ось x с началом в одной из них, например, в точке A . Тогда любые две точки из одной тройки и одна точка из другой тройки зададут оставшиеся три точки. Рассмотрим задачу: заданы точки $A(0)$, $A'(2)$ и $F(3)$, найти $A''(x_{A''})$, $O'(x_{O'})$, $O''(x_{O''})$.

Координаты искоемых точек определяются по формулам:

$$x_{O'} = \frac{1}{2}(x_A - x_{A'}) = \frac{1}{2}(2 - 0) = r' = 1,$$

$$x_{O''} = x_F + (x_F - x_{O'}) = (r' + r_c) + r_c = 5,$$

$$x_{A''} = 2x_{O''} = 2r'' = 10.$$

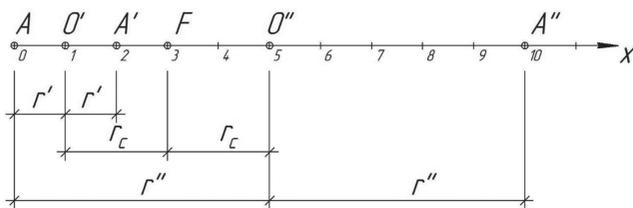


Рис. 2. Расположение точек A, A', A'', F, O', O'' на числовой оси x

На рис. 2 приведено графическое представление решения поставленной задачи.

Рассматриваемую группу точек можно разделить на две категории по принадлежности пространствам R_1^2 и R_2^2 соответственно:

$$\begin{aligned} A, F, O', O'' &\in R_1^2, \\ A', A'', F, O', O'' &\in R_2^2. \end{aligned}$$

Если рассматривать пару точек A', A'' как единый геометрический объект — образ точки A , то соответствие «квасисимметрия» (AS_{ic}) пространств R_1^2 и R_2^2 является взаимно однозначным, а значит, может называться преобразованием одного пространства R^2 [9; 14; 19]. Для обоснования данного суждения рассмотрим несколько примеров квазисимметрии линий относительно окружности на плоскости (рис. 3) и докажем ряд утверждений:

Утверждение 1: образ прямой при её квазисимметрии относительно окружности есть конхоида Никомеда. Докажем это.

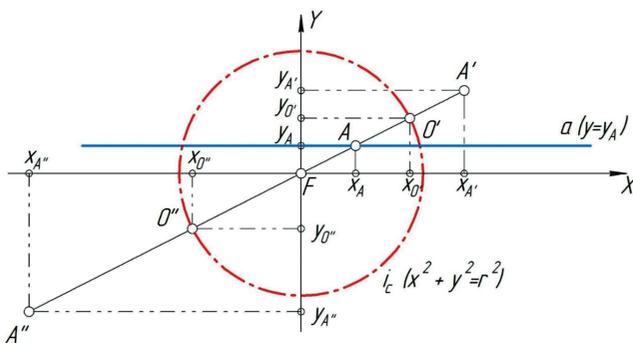


Рис. 3. Квазисимметрия точки A , принадлежащей прямой a относительно окружности i_c

Поместим окружность i_c в систему координат XU так, чтобы центр окружности совпал с началом координат системы. Прямую a расположим, например, параллельно оси абсцисс. Применим аппарат квазисимметрии к произвольной точке $A \in a$. Прямая FA пересекает i_c в двух точках O', O'' . Ординаты и абсциссы точек A', A'' рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} y_{A',A''} &= 2y_{O',O''} - y_A, & (1) \\ x_{A',A''} &= 2x_{O',O''} - x_A. & (2) \end{aligned}$$

Так как точки O', O'' принадлежат прямой FA и окружности i_c ($FA \cap i_c = O', O''$), то координаты точек O', O'' являются решением системы уравнений, описывающих прямую FA и окружность i_c :

$$\begin{cases} y = \frac{y_A}{x_A} x \\ y^2 + x^2 = r_c^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$y_{O',O''} = \pm \frac{r_c y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}. \quad (4)$$

Формулу расчёта ординаты точек A', A'' получим, подставив формулу (4) в формулы (1), а абсциссы выведем из уравнения прямой AF (3):

$$y_{A',A''} = \pm \frac{2r_c y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} - y_A, \quad (5)$$

$$x_{A',A''} = \frac{x_A}{y_A} y_{A',A''}. \quad (6)$$

При помощи уравнений (5) и (6) вычисляются соответствующие координаты точек A', A'' . Выведем зависимость $y_{A',A''}$ от $y_A, x_{A',A''}$. Для этого выразим из (6) x_A и подставим полученное выражение в (5). При этом $y_{A',A''} \rightarrow y, x_{A',A''} \rightarrow x$. После упрощения записи получим:

$$(y + y_A)^2 (x^2 + y^2) = 4r_c^2 y^2. \quad (7)$$

Уравнение (7), как известно из работы [16], описывает конхоиду Никомеда, при $y_A = \text{const}$. Если принять значение $y_A = 1$, а $r_c = 2$ и подставить их в уравнение (7), то получим:

$$(y + 1)^2 (x^2 + y^2) = 4(2^2 y^2). \quad (8)$$

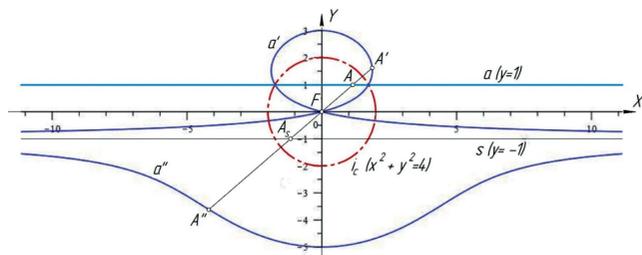


Рис. 4. Конхоида Никомеда, полученная как образ (a', a'') прямой a преобразованием «квасисимметрия» относительно окружности i_c

Уравнение (8) описывает кривую, квазисимметричную прямой $a (y = 1)$ относительно окружности $i_c (x^2 + y^2 = 4)$. На рис. 4 присутствует прямая s , ко-

торая является её асимптотой. Прямая s располагается симметрично прямой a относительно начала координат. Точка A_s лежит на асимптоте s и на прямой AF . Построение конхоиды основано на том, что её точки A' и A'' , лежащие на прямой AF , проходящей через её полюс F , отстоят на равные расстояния l от точки A_s , лежащей на линии-прообразе, т.е. на асимптоте s . Величина l равняется диаметру окружности i_c : $l = D_{i_c}$. Это равенство следует из формул:

$$D_{i_c} = r' + r'' = \frac{|A'A''|}{2}, \quad 2l = |A'A''|.$$

В работе [16] так же упоминается о циссоиде конхоиды Никомеда, которой является окружность с радиусом, равным $2l$. Однако ни в одной из работ [6; 16; 18] не упоминается о том, что для каждой конхоиды Никомеда существует прямая-прообраз относительно окружности с центром в полюсе данной кривой и диаметром, равным константе l . Таким образом, преобразование «квасисимметрия» прямой относительно окружности — это ещё один способ моделирования конхоиды Никомеда.

Отметим, что обе ветви a' и a'' конхоиды Никомеда (см. рис. 4) описываются уравнением (8) и являются единым геометрическим объектом.

3.2. Соответствие «квасисимметрия» окружности относительно окружности на плоскости

Рассмотрим соответствие «квасисимметрия» окружности относительно круговой оси. Для удобства аналитического описания поместим центр F круговой оси i_c в начало полярной системы координат, а центр L образующей окружности a с радиусом p будем смещать по оси абсцисс на величину h . Формулы (1), (2), переведённые в полярные координаты, принимают вид:

$$\rho = \pm 2r_c - q. \tag{9}$$

Уравнение (9) является общей формулой соответствия «квасисимметрия» относительно окружности (AS) с центром в полюсе полярной системы координат, где ρ — это радиус-вектор образа, r_c — радиус круговой оси квазисимметрии, q — радиус-вектор прообраза. При $q = f(\varphi)$ — уравнение (9) приобретает вид:

$$\rho(\varphi) = \pm 2r_c - q(\varphi),$$

где φ — это переменный параметр равный углу наклона радиус-вектора точки прообраза.

Утверждение 2: образ окружности при её квазисимметрии относительно окружности есть кривая шестого порядка. Докажем это.

Уравнение окружности со смещённым центром по оси абсцисс в полярной системе координат имеет вид:

$$q = h \cos \varphi \pm \sqrt{p^2 - h^2 (\sin \varphi)^2}. \tag{10}$$

Подставим правую часть выражения (10) вместо q в выражение (9) и получим уравнение образа окружности при её квазисимметрии относительно круговой оси.

$$\rho = \pm 2r_c - h \cos \varphi \pm \sqrt{p^2 - h^2 (\sin \varphi)^2}. \tag{11}$$

График кривой линии, которую описывает уравнение (11) при заданных константах ($r_c = 3$, $h = -2$, $p = 4$), изображён на рис. 5. По виду данной кривой линии можно предположить, что она является конхоидой окружности. Такое предположение также является закономерным, учитывая, что образ прямой при квазисимметрии относительно окружности является конхоидой прямой линии. Для проверки данного предположения сравним уравнение (11) с общим уравнением конхоиды окружности, известной из источника (<https://mathcurve.com/courbes2d/conchoiddecercle/conchoiddecercle.shtml>):

$$\rho = v \left(\cos \varphi \pm \sqrt{k^2 - (\sin \varphi)^2} \pm l \right). \tag{12}$$

В уравнении (12) коэффициент v — это расстояние от полюса конхоиды до центра её производящей окружности, k — отношение радиуса R производящей окружности к значению v , l — отношение постоянной величины расстояния c между соответствующими точками конхоиды и производящей окружности s к значению a . Запишем эти соотношения:

$$k = \frac{R}{v}, \quad l = \frac{c}{v}. \tag{13}$$

Для того чтобы установить соответствие между коэффициентами уравнений (11) и (12), приведём уравнение (11) к форме уравнения (12). Вынесем коэффициент h за скобки и получим:

$$\rho = -h \left(\cos \varphi \pm \sqrt{\frac{p^2}{h^2} - (\sin \varphi)^2} \pm \frac{2r}{h} \right). \tag{14}$$

Сравнив уравнения (14) и (12), можно сделать вывод, что квазисимметрия окружности относительно круговой оси образует конхоиду окружности.

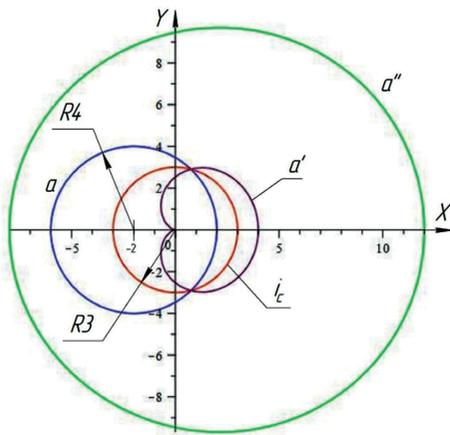


Рис. 5. Образ (a', a'') окружности a в соответствии «квазисимметрия» относительно круговой оси i_c

Найдём формулы расчёта радиуса производящей окружности и положения полюса такой конхоиды, а также постоянную величину расстояния c между соответствующими точками конхоиды и производящей окружности s. Для этого приравняем соответствующие коэффициенты уравнений (12) и (14) и выразим целевые величины:

$$v = -h, \quad R = -p, \quad c = 2r_c. \quad (15)$$

Соотношения (15) позволяют рассчитать положение центра и радиус производящей окружности s конхоиды (a', a''), изображённой на рис. 6.

$$v = 2, \quad R = 4, \quad c = 6.$$

Соотношения (15) показывают, что окружность s располагается симметрично окружности a относительно точки F. Отметим, что образующая точка A, лежащая на окружности a, также симметрична точке A_s, лежащей на окружности s. относительно точки F.

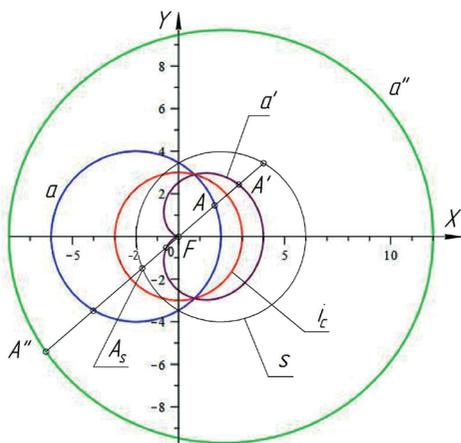


Рис. 6. Конхоида окружности s относительно полюса F и образ окружности a в соответствии «квазисимметрия» относительно круговой оси i_c

Уравнение конхоиды окружности в декартовой системе координат имеет вид:

$$(x^2 + y^2 + c^2 - b^2)^2 (y^2 + x^2 + 2ax + a^2) = 4c^2 (x(x+a) + y^2)^2.$$

Очевидно, что при раскрытии скобок максимальная степень переменной будет шестой, следовательно, полученная кривая имеет шестой порядок. В работе [24] порядок такой кривой был определён графически с тем же результатом.

Моделирование кривых линий соответствием «квазисимметрия» можно осуществлять, используя алгоритм, описанный в третьей главе данной работы. При квазисимметрии на плоскости параметр β в уравнениях (1) принимает значение 2π . Параметрические уравнения, описывающие образы кривых, полученные с использованием квазисимметрии на плоскости относительно окружности ($\theta = \varphi, u = r_c, c = 0$), принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= \mp 2 \left(r_c \pm \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \right) \cos(\varphi) + x_i \\ y &= \mp 2 \left(r_c \pm \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \right) \sin(\varphi) + y_i \\ z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где x_i и y_i — это правые части параметрических уравнений кривой-прообраза с параметром φ . На рис. 7 представлены различные кривые, полученные при $r = 3$ и различных x_i и y_i .

3.3. Квазисимметрия относительно эллипса на плоскости

Так же, как в случае с круговой осью, можно реализовать квазисимметрию различных кривых на плоскости относительно эллипса, параболы и гиперболы на базе алгоритма, описанного в статье [23]. Для этого в параметрических уравнениях, описывающих поверхность квазивращения:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos\beta + 1)\cos\theta + x_i \\ y &= r(\cos\beta + 1)\sin\theta + y_i \\ z &= r\sin\beta, \end{aligned}$$

параметр β нужно приравнять к π . Запишем параметрические уравнения образов кривых в соответствии «квазисимметрия» относительно эллипса:

$$\begin{aligned} x &= \mp 2r \cos\theta + x_i \\ y &= \mp 2r \sin\theta + y_i \\ z &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

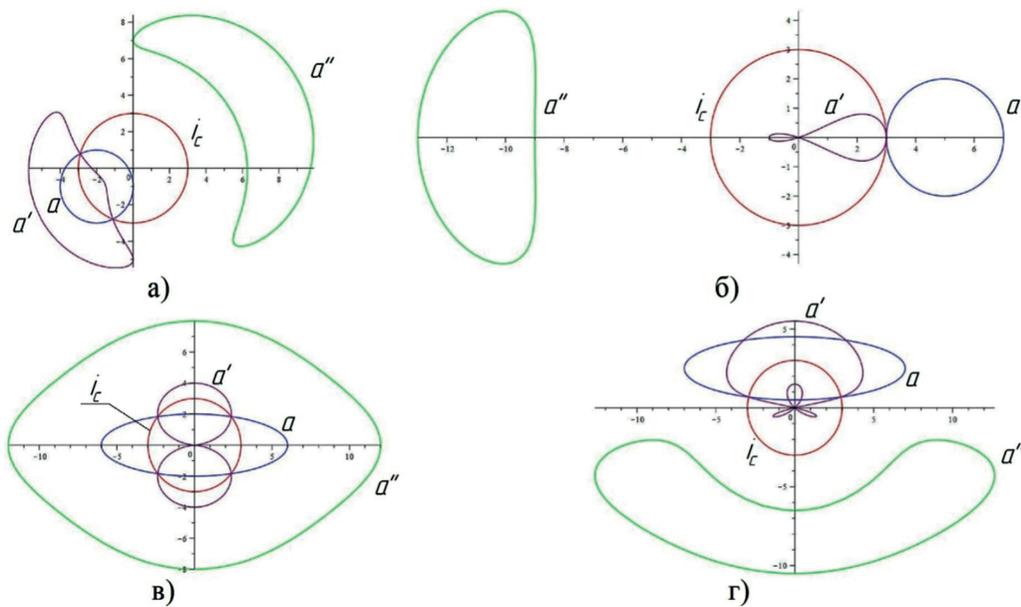


Рис. 7. Преобразы кривой линии a в соответствии «квасисимметрия» относительно окружности i_c : а, б) прообраз — окружность; в, г) прообраз эллипс

В уравнениях (17) значения величин r, θ, x_r, y_r , при заданных параметрах кривой-прообраза и оси, являются функциями от одного параметра, который определяет точку, принадлежащую прообразу. При построении квазисимметрии образующей кривой относительно эллипса указанные величины, согласно формулам приведённым в статье [23], являются функциями от параметра t .

$$x = x_t(t), \quad y = y_t(t), \quad r = r(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (18)$$

Также в статье [23] раскрыт геометрический смысл величин (18). На рис. 8 представлены графики кривых, полученных с использованием квазисимметрии прямой линии l относительно эллиптической оси i_e . Размеры большой и малой полуосей эллипса i_e были приняты соответственно $a = 5, b = 4$. Центр эллипса i_e совпадает с началом координат. Прямая l на рис. 8, а, б, в располагается параллельно малой полуоси эллипса i_e . На рис. 8, г, д, е прямая l параллельна большой полуоси эллипса i_e . На рис. 8, ж, з, и прямая l располагается под углом $\pi/4$ к большой полуоси эллипса i_e .

Визуально кривые изображённые, на рис. 8, г, д, е, похожи на конхоиду Дюрера, параметрические уравнение которой имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{ncost}{cost - sint} + mcost \\ y = msint. \end{cases} \quad (19)$$

График конхоиды Дюрера представлен на рис. 9. Различия в уравнениях (19) и (17), а также различия в конструктивных схемах построения конхоиды Дюрера и квазисимметрии прямой относительно эллипса говорят о том, что эти кривые имеют только визуальное сходство, но не являются одной и той же алгебраической кривой. Упомянутые непреодолимые различия состоят в том, что коэффициент m из (19) является константой, а аналогичный ему коэффициент $2r$ из (17) является функцией от одного из параметров. Существует такая кривая, что при её квазивращении величина r будет постоянной, однако в параметрическом уравнении для ординаты её образа будет присутствовать слагаемое, равное переменному значению ординаты прообраза. Такого слагаемого в уравнениях (19) нет. Отметим также, что конхоида Никомеда не является частным случаем конхоиды Дюрера, но является частным случаем квазисимметрии прямой относительно эллипса при $a = b$.

Рассмотрим конструктивное построение исследуемых кривых линий (рис. 9). На рис. 10 изображено построение квазисимметрии точки A относительно эллиптической оси i_e , а также схема развёртывания ломаной $AS'F2A''$ на числовую ось. Развёртка ломаной $AS'F2A''$ представлена на рис. 11. При создании алгоритма соответствия «квасисимметрия» были выявлены следующие соотношения для определения положения точек-образов $A1' \in F2S1', A1'' \in F2S1''$:

$$|A1'S1'| = |AS1'|, \quad |A1''S1''| = |AS1''|.$$

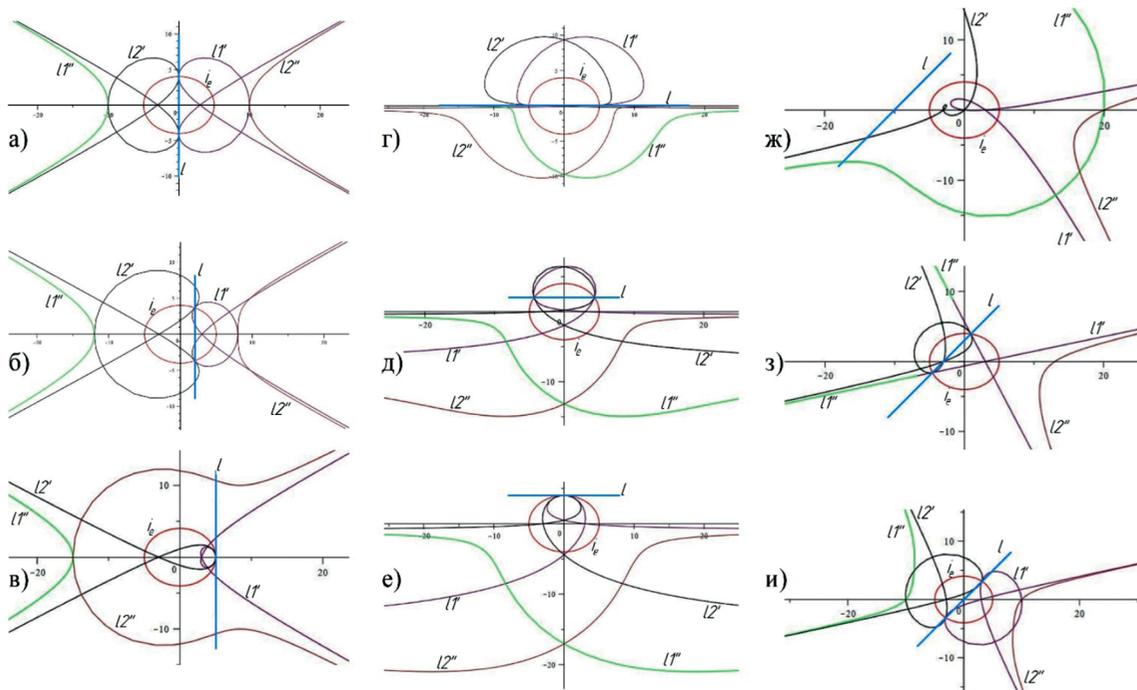


Рис. 8. Различные алгебраические кривые, полученные как образы прямой a в соответствии «квасисимметрии» относительно эллиптической оси i_e

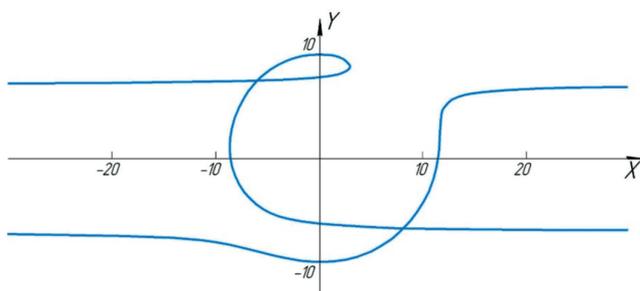


Рис. 9. Конхоида Дюрера при $n = 1,5$ и $m = 10$

Согласно свойствам эллипса, для любой A справедливым будет выражение:

$$|S1'F2| + |F2S1''| + |S1'S1''| = 4a,$$

Учитывая при этом, что $|A1''S1''| - |A1'S1'| = |S1'S1''|$, получим выражение, справедливое для любой точки A при её квазисимметрии относительно эллипса:

$$|A1''A| - |A1'A| = 4a.$$

Отметим, что при равенстве полуосей эллипса ломанная $AS'F2A''$ становится прямой, а кривые, получаемые с использованием квазисимметрии прямой линии, становятся конхойдой Никомеда.

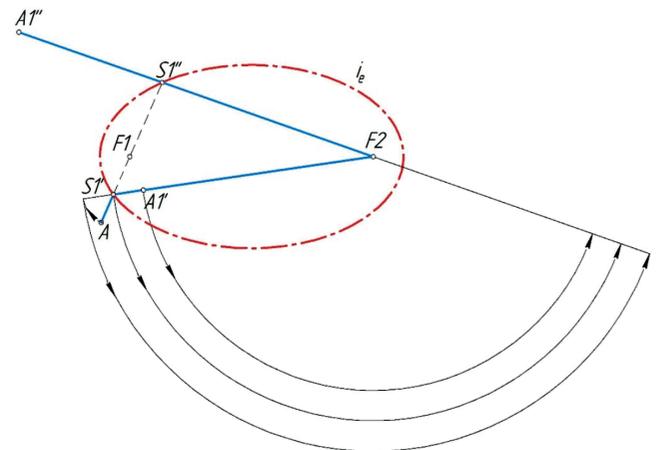


Рис. 10. Схема получения развёртки ломаной $AS'F2A''$

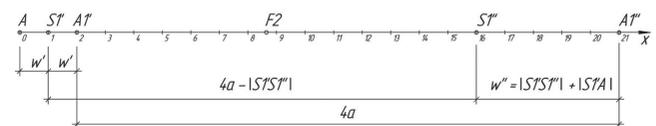


Рис. 11. Развёртка ломаной $AS'F2A''$ на числовой оси

Анализируя вид кривых, показанных на рис. 8, можно сделать предположение о том, что они стремятся к прямым асимптотам. Проверим наличие этого свойства аналитически. Для этого найдём предел функции $y = y(t)$ при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.

конхоиды прямой и окружности, косую конхоиду прямой, а также другие плоские кривые четвёртого и более высоких порядков. Полученные результаты подтверждают общность конструктивного описания планиметрического формообразования плоских кривых высоких порядков. Описанный способ позволя-

ет геометрически моделировать плоские кривые и использовать конструктивные геометрические методы исследования их свойств. Соответствие «квазисимметрия» для различных конхоидальных кривых является общим способом формообразования, раскрывающим их уникальные свойства.

Литература

1. Антонова И.В. Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях [Текст] / И.В. Антонова, И.А. Беглов, Е.В. Соломонова // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 3. — С. 36–50. — DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840.
2. Беглов И.А. Атлас поверхностей квазивращения: атлас [Текст] / И.А. Беглов. — М.: ИНФРА-М, 2022. — 76 с.
3. Беглов И.А. Математическое описание метода вращения точки вокруг криволинейной оси второго порядка [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян, И.В. Антонова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 39–46. — DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268.
4. Беглов И.А. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. — 2017. — № 3. — С. 45–50. — DOI: 10.12737/article_59bfa4eb0bf488.99866490.
5. Бойков А.А. Разработка и применение языка геометрических построений для создания компьютерных геометрических моделей [Текст] / А.А. Бойков // Проблемы машиноведения: материалы V Международной научно-технической конференции, Омск, 16–17 марта 2021 года. — Омск, 2021. — С. 423–429. — DOI: 10.25206/978-5-8149-3246-4-2021-423-429.
6. Бермант А.Ф. Геометрический справочник по математике. Атлас кривых Ч. 1 [Текст] / А.Ф. Бермант. — М.: ОНГИЗ НКТП, 1937. — 209 с.
7. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 4: геометрические места точек, равноудаленных от двух сфер [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, Д.С. Пех // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 12–29. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29.
8. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 22–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34.
9. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии [Текст] / Г.С. Иванов. — М.: Машиностроение, 1998. — 157 с.
10. Короткий В.А. Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами [Текст] / В.А. Короткий, И.Г. Витовтов // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 3–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19.
11. Короткий В.А. Конструирование G2-гладкой составной кривой на основе кубических сегментов Безье [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 12–28. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-12-28.
12. Короткий В.А. Формообразование линий и поверхностей на основе кривых второго порядка в компьютерном геометрическом моделировании [Текст]: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / В.А. Короткий. — Нижний Новгород, 2018. — 38 с.
13. Панчук К.Л. Математические основы геометрического моделирования кривых линий [Текст] / К.Л. Панчук, В.Ю. Юрков, Н.В. Кайгородцева. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2020. — 198 с.
14. Пеклич В.А. Высшая начертательная геометрия [Текст] / В.А. Пеклич. — М.: АСБ, 2000. — 344 с.
15. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов [Текст] / П.К. Рашевский. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 428 с.
16. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения [Текст] / А.А. Савелов. — М.: Либроком, 2014. — 294 с.
17. Сальков Н.А. Об одном способе формирования коник [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12.
18. Смогоржевский А.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка [Текст] / А.С. Смогоржевский, Е.С. Столова. — М.: Физматгиз, 1961. — 263 с.
19. Согомонян К.А. Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование) [Текст] / К.А. Согомонян. — Ереван: Айастан, 1990. — 214 с.
20. Сунцов О.С. Исследование отражения от криволинейных зеркал на плоскости в программе Wolfram Mathematica [Текст] / О.С. Сунцов, Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 29–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45.
21. Сычева А.А. Функционально-воксельное моделирование кривых Безье [Текст] / А.А. Сычева // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 63–72. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-63-72.

12. Korotkij V.A. *Formoobrazovanie linij i poverhnostej na osnove krivyh vtorogo poryadka v kompyuternom geometricheskom modelirovanii*. Dokt. Diss. 05.01.01 [Shaping of lines and surfaces based on second-order curves in computer geometric modeling. Doct. Diss. 05.01.01]. Nizhnij Novgorod, 2018. 38 p. (in Russian)
13. Panchuk K.L., Yurkov V.YU., Kajgorodceva N.V. *Matematicheskie osnovy geometricheskogo modelirovaniya krivyh linij* [Mathematical foundations of geometric modeling of curved lines]. Omsk, OmGTU Publ., 2020. 198 p. (in Russian)
14. Peklich V.A. *Vysshaya nachertatel'naya geometriya* [Higher Descriptive Geometry]. Moscow, ASB Publ., 2000. 344 p. (in Russian)
15. Rashevskij P.K. *Kurs differencial'noj geometrii uchebnik dlya gosudarstvennyh universitetov* [Differential Geometry Course: Textbook for public universities]. Moscow, LKI Publ., 2008. 428 p. (in Russian)
16. Savelov A.A. *Ploskie krivyye. Sistematika, svojstva, primeneniya* [Flat curves. Systematics, properties, applications]. Moscow, Librokom Publ., 2014. 294 p. (in Russian)
17. Sal'kov N.A. Ob odnom sposobe formirovaniya konik [About one way of forming conics]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2022. V. 10. I. 4. Pp. 3–12. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12. (in Russian)
18. Smogorzhevskij A.S., Stolova E.S. *Spravochnik po teorii ploskih krivyh tret'ego poryadka* [Handbook of the theory of plane curves of the third order]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 263 p. (in Russian)
19. Sogomonyan K.A. *Linejno-konstruktivnye metody formoobrazovaniya (geometricheskoe modelirovanie)* [Linear-constructive methods of shaping (geometric modeling)] Erevan, Ajastan Publ., 1990. 214 p. (in Russian)
20. Suncov O.S., ZHiharev L.A. Issledovanie otrazheniya ot krivolinyjnyh zerkal na ploskosti v programme Wolfram Mathematica [Investigation of reflection from curved mirrors on a plane in the Wolfram Mathematica program]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021. V. 9. I. 2. Pp. 29–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45. (in Russian)
21. Sycheva A.A. Funkcional'no-voksel'noe modelirovanie krivyh Bez'e [Functional voxel modeling of Bezier curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021. V. 9. I. 4. Pp. 63–72. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-63-72. (in Russian)
22. Beglov I.A. Application of quasi-rotation surface segments in architectural prototyping / I.A. Beglov, V.V. Rustamyan and R.A. Verbitskiy // Journal of Physics: conference series, 15, Omsk, 9–11 Novembre 2021. Omsk, 2022. P. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/2182/1/012002.
23. Beglov I.A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces / I.A. Beglov. // Journal of physics: conference series: 5. Omsk, 16-17 March 2021. Omsk, 2021. P. 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.
24. Beglov I.A. Generation of the surfaces via quasi-rotation of higher order / I.A. Beglov. // Journal of physics: conference series: IV International Scientific and Technical Conference «Mechanical Science and Technology Update», MSTU 2020, Omsk, 17–19 March 2020. Omsk: Institute of physics publishing, 2020. P. 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012032.
25. Beglov I.A. N-n-digit interrelations between the sets within the R^2 plane generated by quasi-rotation of R^3 space / I.A. Beglov. // Journal of physics: conference series: IV International Scientific and Technical Conference «Mechanical Science and Technology Update», MSTU 2020, Omsk, 17–19 March 2020. Omsk: Institute of physics publishing, 2020. P. 012033. DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012033.
26. Beglov I.A. Plane tangent to quasi-rotation surface / I.A. Beglov, K.L. Panchuk. // CEUR Workshop Proceedings: 30, Saint Petersburg, 22–25 September 2020. Saint Petersburg, 2020.
27. Panchuk K.L. Spatial spline construction through the Monge model / K.L. Panchuk, T.M. Myasoedova, Yu.A. Rogoza. // CEUR Workshop Proceedings: 30, Saint Petersburg, 22–25 September 2020. Saint Petersburg, 2020. DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-3-60.
28. Panchuk K.L. Spline curves formation given extreme derivatives / K.L. Panchuk, T.M. Myasoedova, E.V. Lyubchinov // Mathematics. 2021. V. 9 (1). Pp. 1–29. DOI: 10.3390/math9010047.