
**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И КОНФИГУРАЦИИ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ
НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ СТРУКТУРУ
И СКОРОСТЬ РОСТА НОРМАЛЬНЫХ МОД****INFLUENCE OF THE MAGNETIC FIELD AND THE MEAN FLOW
CONFIGURATION ON SPATIAL STRUCTURE AND GROWTH RATE
OF NORMAL MODES****В.И. Мордвинов***Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, v_mordv@iszf.irk.ru***Е.В. Девятова***Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, devyatova@iszf.irk.ru***В.М. Томозов***Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, tom@iszf.irk.ru***V.I. Mordvinov***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, v_mordv@iszf.irk.ru***E.V. Devyatova***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, devyatova@iszf.irk.ru***V.M. Tomozov***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, tom@iszf.irk.ru*

Аннотация. В первой части работы представлены результаты численных экспериментов с магнетогидродинамической моделью «мелкой воды» для оценки степени влияния магнитного поля на развитие неустойчивостей, обусловленных комбинацией неоднородностей среднего потока и среднего магнитного поля. Расчеты нормальных мод подтвердили полученный ранее при численном моделировании результат о различном влиянии слабого и сильного магнитных полей на неустойчивость дифференциального вращения. Расчеты показали, что слабое магнитное поле стабилизирует развитие неустойчивостей, сильное усиливает ее. Азимутальные неоднородности дифференциального вращения во всех случаях способствуют развитию неустойчивостей. Во второй части работы рассматривается пространственная структура нормальных мод, делается попытка интерпретации крутильных колебаний, наблюдаемых в атмосферах Земли и Солнца. Как показали расчеты, причиной возникновения регулярных осесимметричных возмущений может быть формирование циклонического вихря над полюсом, характерное для земной атмосферы, и, возможно, для атмосферы Солнца. Форму крутильных колебаний имеет наименее затухающая нормальная мода устойчивого полярного циклона. Аномалии течения, усиление в зимний период антициклонического вихря в умеренных широтах разрушают осесимметричные колебания и приводят к быстрому росту нормальных мод, имеющих в своем спектре сферические гармоники с более высокими степенями и зональными волновыми числами.

Ключевые слова: гидродинамика, атмосфера, нормальные моды, магнитное поле, крутильные колебания.

Abstract. The first part of the work presents the results of numerical experiments with the magnetohydrodynamic model of “shallow water” to assess the degree of influence of the magnetic field on the development of instabilities conditioned by a combination of inhomogeneities in the mean flow and the mean magnetic field. Normal mode calculations have confirmed the earlier obtained result on the different influence of weak and strong magnetic fields on the instability of differential rotation. Calculations have shown that a weak magnetic field stabilizes the development of instabilities, whereas a strong magnetic field, on the contrary, enhances the instability. Azimuthal inhomogeneities of differential rotation in all cases contribute to the development of instabilities. In the second part of the work, we examine the spatial structure of normal modes and make an attempt to interpret the torsional oscillations observed in the atmospheres of Earth and the Sun. Calculations have shown that regular axisymmetric disturbances can be caused by the formation of a cyclonic vortex above the pole, which is characteristic of Earth's atmosphere and, possibly, of the Sun's atmosphere. The least damped normal mode of a stable polar cyclone has a structure of torsional oscillations. Flow anomalies and the development of an anticyclonic eddy in winter at midlatitudes destroy torsional oscillations and lead to a rapid amplification of normal modes, which are more complex in structure.

Keywords: hydrodynamics, atmosphere, normal modes, magnetic field, torsional oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Особый интерес в геофизической гидродинамике представляют механизмы формирования крупномасштабных полей и их пространственной структуры на временных масштабах, превышающих периоды вращения астрофизических объектов. Часть аномалий крупномасштабных полей формируется под действием внешних факторов, например особенностей притока лучистой и тепловой энергии к атмосферам планет, однако некоторые аномалии полей не связаны прямо с внешними факторами, а обусловлены внутренней динамикой среды. В атмосфере Земли это квазистационарные Северо-Атлантическая и Северо-Тихоокеанская депрессии, субтропические антициклоны в тропосфере, блокинг, полярные вихри в стратосфере, бегущие волны с периодами 4, 5, 10, 16, 25... сут и т. д. [Крупномасштабные, 1988; Branstator, Held, 1995]; на Солнце — крупномасштабные магнитные поля, связанные с комплексами активности, активными долготами и солнечной цикличностью [Miesch, 2005; Бумба, 1979; Бумба, Макаров, 1989; Bumba, Howard, 1965; Tikhomolov, 2005; Мордвинов и др., 2012, 2013]. Относительно механизмов формирования этих аномалий нет единого мнения. Некоторые из них могут быть следствием раскачки собственных колебаний системы, другие — результатом развития нелинейных процессов, например обрушения волн Россби (блокирующие антициклоны в атмосфере Земли), взаимодействия бегущих и стационарных планетарных волн [Крупномасштабные, 1988].

Формирование крупномасштабных аномалий магнитного поля на Солнце, вероятнее всего, происходит в тахоклине — тонком переходном слое между зонами лучистого равновесия и конвекции [Cally et al., 2003; Dikpati, Gilman, 2001; Gilman et al., 2007]. При сверхкритических горизонтальных градиентах скорости и докритических вертикальных градиентах температуры в этом слое может развиваться двумерная турбулентность, переносящая энергию возмущений в направлении малых волновых чисел. Этот эффект хорошо известен и на Солнце, и в земной атмосфере [Miesch, 2005; Данилов, Гурарий, 2000]. В ряде работ оценивалось влияние магнитного поля на темпы развития неустойчивостей [Cally et al., 2003; Dikpati, Gilman, 2001; Gilman et al., 2007; Gilman, Fox, 1997]. Расчеты показали рост неустойчивости при увеличении среднего магнитного поля. Однако по другим оценкам магнитное поле должно стабилизировать течение [Мишин, Томозов, 2014]. Можно ли согласовать эти противоположные точки зрения — вопрос пока открытый. Выполненные нами численные эксперименты в эволюционной модели с вмороженным магнитным полем показали, что такая возможность существует: слабые поля могут стабилизировать течение, а сильные — раскачивать [Mordvinov et al., 2019]. Однако численные расчеты динамики течений зависят от многих параметров: шагов по времени и пространству, количества гармоник в разложении, пространственной структуры возмущений в начальный момент времени и про-

странственной структуры среднего потока. В представленной работе мы продолжаем исследования, начатые в [Mordvinov et al., 2019], однако вместо сложных численных расчетов динамики течений используем более простой и широко используемый метод нормальных мод [Дымников, Скиба 1986; Дымников, Филатов 1988].

В этом методе возмущения поля скорости и магнитного поля задаются в виде произведения экспоненты на некоторую произвольную функцию пространственных координат

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = e^{\sigma t} \psi_0(\lambda, \mu),$$

$$\chi'(\lambda, \mu, t) = e^{\sigma t} \chi_0(\lambda, \mu),$$

где λ — долгота; $\mu = \cos\theta$, θ — полярный угол, и подставляются в линеаризованную систему уравнений. Эти колебания называются нормальными модами. Коэффициенты σ и функции ψ_0 , χ_0 , характеризующие нормальные моды, в общем случае являются комплексными и вычисляются в процессе решения задачи на собственные значения некоторого линейного оператора. Нормальная мода является растущей при $\text{Re}(\sigma) > 0$, затухающей при $\text{Re}(\sigma) < 0$, нейтральной при $\text{Re}(\sigma) = 0$ и стационарной при $\text{Im}(\sigma) = 0$. В каждой точке пространства мода описывает гармоническое колебание с одним и тем же периодом, но разными амплитудами и начальными фазами. Величины σ , ψ_0 , χ_0 зависят от физических параметров задачи: пространственной структуры среднего потока и структуры среднего магнитного поля, вязкости жидкости и магнитной вязкости.

В отличие от исследований, рассматривавших устойчивость только осесимметричных течений на Солнце, в частности, многочисленных исследований Gilman с соавторами [Dikpati, Gilman, 2001; Dikpati, Gilman, 2005; Gilman, 1967; Gilman, Fox, 1997; Gilman et al., 2007], мы учитываем также влияние на развитие неустойчивости долготных неоднородностей стационарного среднего течения и стационарного среднего магнитного поля, которые могут быть обусловлены проникающей конвекцией и/или реликтовым магнитным полем. В этом, кроме предложенного метода анализа, состоит новизна предлагаемой работы.

На больших пространственных масштабах земная атмосфера конвективно устойчива как и тахоклин на Солнце, однако горизонтально неоднородна, особенно в области струйных течений, поэтому в ней могут формироваться как стационарные крупномасштабные аномалии типа субтропических антициклонов или полярных вихрей, так и бегущие возмущения: волны Россби в умеренных широтах, волны Кельвина, планетарно-гравитационные волны в тропиках [Гилл, 1986]. Интересными объектами являются регулярные колебания в полях скорости, давления и температуры в диапазоне 5–25 сут [Мордвинов, Латышева, 2013; Зоркальцева и др., 2019], выделяемые после предварительной фильтрации и зонального усреднения. Колебания распространяются

в меридиональном направлении на большие расстояния. Мы назвали эти колебания крутильными по аналогии с похожими колебаниями на Солнце. С помощью одноточечных корреляций со сдвигом во времени установлена пространственная структура и динамика колебаний, однако их природа до сих пор не выяснена. На Солнце крутильные колебания хорошо известны [Altrock et al., 2006]. Универсальность этого явления позволяет предположить, что в его основе лежат какие-то общие свойства крупномасштабных гидродинамических течений. В работе [Mordvinov, Zorkaltseva, 2022] мы обратили внимание на то, что структура крутильных колебаний напоминает структуру одной из нормальных мод при достаточно реалистичной конфигурации среднего потока. В данной работе мы продолжаем это исследование.

В первой части работы выполнено исследование степени неустойчивости осесимметричного течения с профилем дифференциального вращения Солнца, предложенным в работе [Kitchatinov, Rüdiger, 2009] и неосесимметричного течения, как в работе [Мордвинов и др., 2013], с учетом магнитного поля. Во второй части работы изучается структура нормальных мод, рассмотрены нормальные моды течения, обусловленного комбинацией полярного циклонического вихря и антициклонического вихря в умеренных широтах. В стилизованной форме эта комбинация отражает крупномасштабные особенности течений в стратосфере. Основное внимание обращено на осесимметричные моды, напоминающие крутильные колебания [Зоркальцева и др., 2019].

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ. МОДЕЛЬ

Для описания гидродинамической составляющей течения используем баротропную квазигеострофическую модель [Dikpati, Gilman, 2001]. Областью применения моделей данного типа в физике атмосферы являются исследования дальних связей, планетарных волн, низкочастотных колебаний (Северо-Атлантическое колебание, Арктическая/Антарктическая осцилляция), условий возникновения и динамики крупномасштабных аномалий в атмосфере, межполушарные взаимодействия [Крупномасштабные, 1988]. Особенно оправдано применение двумерных квазигеострофических моделей в стратосфере, где отсутствует вертикальная конвекция, а горизонтальный масштаб аномалий метеорологических полей существенно больше, чем в тропосфере [Гилл, 1986].

Для исследований Солнца в гидродинамическую модель включают силу Лоренца и дополняют уравнение вихря уравнением динамики магнитного поля. Дальнейшие преобразования зависят от задачи и метода исследований. Например, в работе [Fournier et al., 2022] используют подобную модель для оценки влияния вязкости на планетарные волны. Для исследования начальной фазы развития неустойчивостей полученную систему уравнений линеаризуют и либо выполняют численные расчеты эволюции возмуще-

ний, либо рассчитывают характеристики нормальных мод [Dikpati, Gilman, 2001; Dikpati, Gilman, 2005; Gilman, Fox, 1997]. В работе [Mordvinov et al., 2019] мы пошли по первому пути, сейчас используем второй метод, более простой и универсальный.

Основой гидродинамической модели является уравнение квазигеострофического потенциального вихря

$$\frac{\partial(L\psi)}{\partial t} = -\frac{1}{R^2} J(\psi, \Delta\psi) - \frac{2\Omega}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - r\Delta\psi - K\Delta^3(\Delta\psi) - f(\psi), \quad (1)$$

где $J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial\lambda} \frac{\partial g}{\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu} \frac{\partial g}{\partial\lambda}$ — оператор Якоби;

$L\psi \equiv (\Delta - L_D^2)\psi$; R — радиус Солнца; ψ — функция тока; $l = 2\Omega\mu$ — параметр Кориолиса; Ω — угловая скорость вращения Солнца; $L_D \equiv \sqrt{g h_0} / l \approx \sqrt{g h_0} / 2\Omega \sin 45^\circ$ — радиус деформации Россби — Обухова; h_0 — средняя толщина однородного слоя жидкости; λ — долгота; $\mu = \cos\theta$; θ — полярный угол; $r = 1/T_0$ — коэффициент рэлеевского трения; K — коэффициент турбулентной гипервязкости. Значение K выбрано таким, чтобы гипервязкость третьей степени равнялась обычной турбулентной вязкости для дипольной гармоники в разложении функции тока [Мордвинов и др., 2013]. Функция $f(\psi)$ характеризует форсинг, обусловленный мелкомасштабными вихрями.

Если известно стационарное решение уравнения, то форсинг f может быть определен из соотношения

$$f = G(\bar{\psi}) = -\frac{1}{R^2} [J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, l h_T / h_0)] - \frac{2\Omega}{R^2} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\lambda} - r\Delta\bar{\psi} - K\Delta^3(\Delta\bar{\psi}).$$

В этом случае исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial(L\psi)}{\partial t} = G(\psi) - G(\bar{\psi}).$$

Так как оператор Якоби является нелинейным,

$$G(\psi) - G(\bar{\psi}) \neq G(\psi - \bar{\psi}).$$

Упрощение становится возможным, если стационарное решение уравнения вихря обладает зональной или меридиональной симметрией. В этом случае операторы Якоби равны нулю и в выражении для f остаются только линейные члены.

Если жидкость замагничена, в уравнение (1) необходимо включить вертикальную компоненту вихря силы Лоренца. Если магнитное поле горизонтально и $\text{div}(\mathbf{H}) = 0$ выражение для этой компоненты принимает вид [Mordvinov et al., 2019]

$$\text{rot}[(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}]_z = (\mathbf{H}\nabla) \text{rot} \mathbf{H}_z = (\mathbf{H}\nabla) \Delta\chi, \quad (2)$$

где χ — магнитная функция тока, связанная с вектором горизонтального магнитного поля \mathbf{H} соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{k} \times \nabla\chi = \left(-\mathbf{i} \frac{\partial\chi}{\partial y}, \mathbf{j} \frac{\partial\chi}{\partial x}, 0 \right).$$

В абсолютной гауссовой системе единиц (сантиметр—грамм—секунда) коэффициент k_0 равен $1/(4\pi\rho)$, индукция магнитного поля измеряется в гаусах. Так как плотность плазмы предполагается постоянной, введем новую переменную $\chi' = \chi\sqrt{k_0}$. (Размерность магнитного поля в этом случае будет такой же, как и скорости — см/с). В основании конвективной зоны плотность $\rho \approx 10^{-2}$ г/см³ и множитель $\sqrt{k_0}$ численно равен

$$\sqrt{k_0} = \sqrt{1/(4\pi\rho)} = \sqrt{10^2/(4\pi)} = \sqrt{25/\pi} = 2.82.$$

С учетом силы Лоренца уравнение потенциального вихря принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L\psi)}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} [J(\psi, \Delta\psi) - J(\chi, \Delta\chi)] - \\ & -\frac{2\Omega}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - r\Delta\psi - K\Delta^3(\Delta\psi) - G(\bar{\psi}). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку поле скорости завихрено, уравнение индукции магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} - F_{\text{мп}}. \quad (4)$$

Если взять ротор от (4) и выразить \mathbf{H} через магнитную функцию тока, получим уравнение для χ

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\chi}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} \{J(\psi, \Delta\chi) - J(\chi, \Delta\psi)\} - \\ & -r_m\Delta\chi - K_m\Delta^3(\Delta\chi). \end{aligned} \quad (5)$$

где r_m, K_m — параметры магнитной вязкости. Будем предполагать, что крупномасштабные аномалии течения отражают конфигурации наиболее быстро растущих или наиболее медленно затухающих возмущений малой амплитуды. Представим функции тока в виде $\psi = \bar{\psi} + \psi'$, $\chi = \bar{\chi} + \chi'$. Учитывая малость возмущений $\psi' \ll \bar{\psi}$, $\chi' \ll \bar{\chi}$, линеаризуем уравнения (3) и (5). Уравнения для возмущений функций тока ψ' и χ' примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta - L_D^2)\psi'}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} \{ [J(\psi', \Delta\bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \Delta\psi')] - \\ & - [J(\chi', \Delta\bar{\chi}) + J(\bar{\chi}, \Delta\chi')] \} - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} - \\ & - r\Delta\psi' - K\Delta^3(\Delta\psi'), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\chi'}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} \{ [J(\psi', \Delta\bar{\chi}) + J(\bar{\chi}, \Delta\chi')] - \\ & [J(\chi', \Delta\bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \Delta\psi')] \} - r_m\Delta\chi' - K_m\Delta^3(\Delta\chi'). \end{aligned}$$

где $\bar{\psi}$ и $\bar{\chi}$ — средние функции тока, удовлетворяющие системе стационарных уравнений.

Предположим $\bar{\chi} = \alpha_1\bar{\psi}$, $\alpha_1 = \text{const}$. Это означает, что в стационарном потоке жидкость течет вдоль силовых линий магнитного поля. Уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta - L_D^2)\psi'}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} \{ [J(\psi' - \alpha_1\chi', \Delta\bar{\psi}) + \\ & J(\bar{\psi}, \Delta(\psi' - \alpha_1\chi'))] \} - \frac{2\Omega}{R^2} \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} - r\Delta\psi' - \\ & - K\Delta^3(\Delta\psi'), \\ \frac{\partial\Delta\chi'}{\partial t} = & -\frac{1}{R^2} \{ J((\alpha_1\psi' - \chi'), \Delta\bar{\psi}) - \\ & - J(\bar{\psi}, \Delta(\alpha_1\psi' - \chi')) \} - r_m\Delta\chi' - K_m\Delta^3(\Delta\chi'). \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения α_1 используем условие: при скорости, равной 1 м/с, коэффициент должен быть таким, чтобы напряженность магнитного поля равнялась 1 Гс. Можно показать, что в этом случае $\alpha_1 = 0.0035$. В линеаризованной задаче эволюция возмущений не зависит от амплитуды возмущений в начальный момент времени, но зависит от коэффициента α_1 . В численных экспериментах мы будем задавать значения α_1 соответствующими напряженностям поля 1, 10, 100, 1000 и 10000 Гс.

Динамика возмущений ψ', χ' , определяемая системой уравнений (7), зависит от многих параметров: характеристик дифференциального вращения, структуры среднего потока и среднего магнитного поля, турбулентной вязкости и характеристик рэлеевского трения. Исследуем зависимость неустойчивости среднего потока от двух параметров: коэффициента α_1 и амплитуды аномалий дифференциального вращения. Представим функцию тока среднего течения в виде суммы дифференциального вращения и возмущения среднего потока $\bar{\psi}(\mu, \lambda) = \bar{\psi}_s(\mu) + \bar{\psi}_{\text{ас}}(\mu, \lambda)$. Профиль дифференциального вращения будем задавать в форме, предложенной в работе [Kitchatinov, Rüdiger, 2009]:

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 - a \left((1-f) \cos^2 \theta + f \cos^4 \theta \right) \right), \quad (8)$$

где Ω_0 — угловая скорость дифференциального вращения Солнца на экваторе, коэффициенты a, f определяют крутизну профиля дифференциального вращения. Характерные времена рэлеевского затухания примем равными $T = 500$ и $T = 1000$ оборотов.

Примем $r_m = r, K_m = K$. Возмущение среднего потока будем задавать в виде сферической гармоники $k^* P_6^5(\mu) \cos(5\lambda)$ [Мордвинов и др., 2013]. Поскольку амплитуда возмущения среднего потока k — величина относительная, на рис. 1 для визуального контроля показаны суммарные распределения функции тока дифференциального вращения и аномалий дифференциального вращения при значениях k , используемых в работе.

Для анализа неустойчивости среднего потока представим возмущение функции тока в виде нормальной моды [Дымников, Филатов, 1988], а функции ψ_0, χ_0 запишем в виде суммы сферических гармоник

$$\begin{aligned} \psi_0(\lambda, \mu, t) = & e^{\sigma t} \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda), \\ \chi_0(\lambda, \mu, t) = & e^{\sigma t} \sum_{\gamma} \chi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

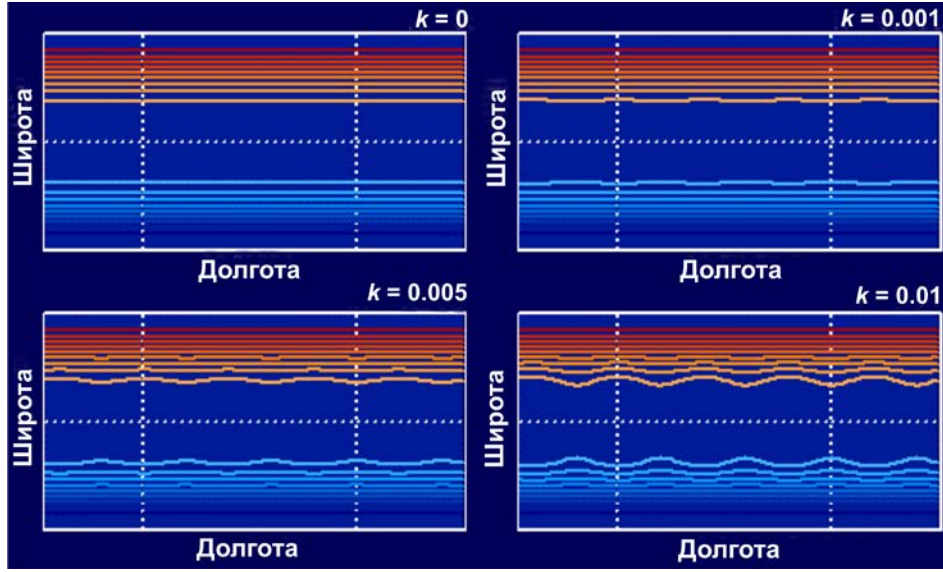


Рис. 1. Функции тока суммы осесимметричного дифференциального вращения и аномалий $k^* P_6^5(\mu) \cos(5\lambda)$ при различных значениях k

где σ — комплексная частота; $\gamma=(m, n)=(m_\gamma, n_\gamma)$ — волновой вектор; m — зональное волновое число; n — степень сферической функции $Y_\gamma(\lambda, \mu) = P_n^m e^{im\lambda}$. Следуя [Gilman, Fox, 1997], примем для гидродинамических и магнитных возмущений комплексную частоту σ одинаковой, что, вообще говоря, не очевидно.

Приведем уравнения (7) к безразмерному виду и подставим решения в виде (9). Выберем в качестве масштаба длины радиус Солнца, а в качестве масштаба времени — Ω^{-1} . Введем обозначения

$$r_1 = \frac{1}{\Omega} \left\{ r + Kn^3 (n+1)^3 / a^6 \right\},$$

$$k'_n = n(n+1),$$

$$k_n = (n(n+1) + F^2),$$

где $F = R/L_D$ — число Фруда. Учитывая свойство сферических функций $\Delta Y_\gamma = -n(n+1)Y_\gamma/R^2$, получаем после интегрирования по сферической поверхности уравнения для коэффициентов разложения функций тока ψ_γ, χ_γ

$$\begin{aligned} k_n \sigma \psi_\gamma &= \psi_\gamma (-n(n+1)r_1 + i2m) + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \left[\sum_\gamma (\psi_\gamma - \alpha_1 \chi_\gamma) \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G_n) dS \right], \\ k'_n \sigma \chi_\gamma &= \chi_\gamma (n(n+1)r_1) + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \sum_\gamma (\alpha_1 \psi_\gamma - \chi_\gamma) \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G'_n) dS. \end{aligned} \quad (10)$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} A_{\gamma\gamma'} \psi_\gamma + B_{\gamma\gamma'} \chi_\gamma &= \sigma' \psi_{\gamma'}, \\ A'_{\gamma\gamma'} \psi_\gamma + B'_{\gamma\gamma'} \chi_\gamma &= \sigma' \chi_{\gamma'}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$A_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{k_n \Omega} \left\{ \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G_n) dS \right\} +$$

$$\delta_{\gamma\gamma'} [i2m' - r_1 n' (n'+1)],$$

$$B_{\gamma\gamma'} = -\frac{\alpha_1}{k_n \Omega} \left\{ \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G_n) dS \right\},$$

$$A'_{\gamma\gamma'} = \frac{\alpha_1}{k_n \Omega} \left\{ \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G'_n) dS \right\},$$

$$B'_{\gamma\gamma'} = -\frac{1}{k_n \Omega} \left\{ \int_S Y_\gamma^* J(Y_\gamma, G'_n) dS \right\} - \delta_{\gamma\gamma'} [r_1 n' (n'+1)],$$

$$G_n = \Delta \bar{\psi} + k_n \bar{\psi}, \quad G'_n = \Delta \bar{\psi} - k_n \bar{\psi}, \quad \sigma' = \sigma / \Omega.$$

Подставляя G_n, G'_n в выражения для элементов матриц $A_{\gamma\gamma'}, B_{\gamma\gamma'}, A'_{\gamma\gamma'}, B'_{\gamma\gamma'}$, вычисляем двойные интегралы с помощью квадратур. Интеграл по переменной λ рассчитывается с использованием квадратурной формулы прямоугольников, а интеграл по переменной μ — с использованием квадратуры Гаусса [Дымников, Скиба, 1986]:

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \approx \sum_{k=1}^K C_k f(\mu_k),$$

где μ_k — корни полиномов Лежандра $P_k(\mu)$.

$$C_k = \frac{2(1-\mu_k)^2}{[KP_{k-1}(\mu_k)]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Число узлов по переменной λ составляло 144, по переменной μ — 64.

Если сформировать блочную матрицу $D = \begin{pmatrix} A_{\gamma\gamma'} & B_{\gamma\gamma'} \\ A'_{\gamma\gamma'} & B'_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\gamma\gamma'} & \alpha B_{\gamma\gamma'} \\ \alpha_1 A'_{\gamma\gamma'} & B'_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix}$ и вектор $x = \begin{pmatrix} \psi_\gamma \\ \chi_\gamma \end{pmatrix}$, то

Таблица 1

Характерные времена роста возмущений дифференциального вращения с параметрами $a=0.5, f=0.8$ при различных амплитудах аномалий дифференциального вращения и величины магнитного поля при числе гармоник $N=13$ и $T_0=500$.

	$\alpha_1=0.0$	$\alpha_1=0.0035$	$\alpha_1=0.035$	$\alpha_1=0.35$	$\alpha_1=3.5$	$\alpha_1=35$
$k=0$	$T=21.15$	$T=22.06$	$T=24.36$	$T=39.13$	$T=5.33$	$T=0.58$
$k=0.001$	$T=20.41$	$T=21.21$	$T=24.56$	$T=29.9$	$T=2.32$	$T=0.23$
$k=0.005$	$T=9.12$	$T=9.18$	$T=9.69$	$T=6.46$	$T=0.49$	$T=0.04$
$k=0.01$	$T=4.42$	$T=4.45$	$T=4.61$	$T=2.84$	$T=0.25$	$T=0.02$

систему (11) можно переписать в виде матричного уравнения на собственные значения и собственные функции матрицы D

$$Dx = \sigma'x. \tag{12}$$

Собственные числа σ' определяют частоты (комплексные) нормальных мод, а собственные вектора x — пространственную структуру нормальных мод. И те и другие зависят от конфигурации среднего потока и среднего магнитного поля, параметризации вязкости и т. д. Вещественная часть частоты σ' определяет инкремент амплитуды нормальной моды, мнимая — частоту колебаний.

Исследовать зависимость нормальных мод от внешних факторов можно теоретически и экспериментально. Один из теоретических методов, принадлежащий Э. Шредингеру, в основных чертах сводится к следующему [Марчук и др., 1986]. При изменении внешних факторов оператор D в уравнении (12) меняется, и мы приходим к задаче

$$\tilde{D}\tilde{x} = \tilde{\sigma}\tilde{x}. \tag{13}$$

В общем случае решение уравнения (13) требует анализа спектра как исходного, так и возмущенного операторов. Предположим, возмущение оператора D определяется параметром ε , так что \tilde{D} представляет собой аналитическую функцию, регулярную в окрестности точки $\varepsilon=0$:

$$\tilde{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i D^{(i)}, \tag{14}$$

где $D^{(0)}=D, D^{(i)}$ — некоторые линейные операторы.

Собственное значение $\tilde{\sigma} = \sigma(\varepsilon)$ и собственная функция $\tilde{x} = x(\varepsilon)$ оператора \tilde{D} также могут быть представлены в виде рядов по степеням ε

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &\equiv \sigma(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(0)} = \sigma_0, \\ \tilde{x} &\equiv x(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x^{(i)}, \quad x^{(0)} = x_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя ряды в уравнение (13), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (D - \sigma_0 E)x^{(0)} &= 0, \\ (D - \sigma_0 E)x^{(1)} &= f_1, \\ \dots & \\ (D - \sigma_0 E)x^{(n)} &= f_n, \\ \dots & \end{aligned} \tag{16}$$

в которой правые части определяются по формулам

$$f_n = \sum_{i=1}^n \sigma^{(i)} x^{(n-i)} - \sum_{i=1}^n D^{(i)} x^{(n-i)}. \tag{17}$$

Для разрешимости (16) необходимо потребовать выполнения условия ортогональности f_n элементу x_0^* — решению сопряженной однородной задачи $D^* x_0^* = \bar{\sigma}_0 x_0^*$:

$$(f_n, x_0^*) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{18}$$

Поскольку собственные функции $x(\varepsilon)$ определяются из (16) с точностью до множителя, обычно вводят дополнительные условия нормировки, например $(x(\varepsilon), x_0^*) = 1$. Соотношение (18) и условие нормировки позволяют определить коэффициенты разложения $\sigma(\varepsilon)$ и, воспользовавшись системой (16), собственные функции $x^{(n)}$.

Метод Шредингера известен давно, однако его применение сталкивается с рядом трудностей. Поэтому для оценки зависимости нормальных мод от внешних факторов мы воспользовались численными расчетами, меняя параметры задачи и рассчитывая собственные функции и собственные частоты оператора задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Рассмотрим сначала дифференциальное вращение Солнца с параметрами $a=0.5, f=0.8$. В табл. 1 приведены характерные времена роста наиболее быстро растущих нормальных мод при разных амплитудах аномалий дифференциального вращения k и разных коэффициентах α_1 , характеризующих величину стационарного магнитного поля. Видно, что осесимметричное дифференциальное вращение $k=0$ при выбранных параметрах неустойчиво и в отсутствие магнитного поля возрастает в e раз за 21.15 оборотов. Это подтверждает оценки, полученные нами ранее [Мордвинов и др., 2012, 2013]. Будем увеличивать магнитное поле начиная с $\alpha_1=0.0035$ (1 Гс) до $\alpha_1=35$ (10000 Гс). Магнитное поле меняет характерные времена развития неустойчивостей. Поле 1, 10, 100 Гс замедляет развитие неустойчивости, однако дальнейшее усиление магнитного поля в 10 раз сокращает характерное время роста неустойчивостей приблизительно в 8 раз, а при величине поля 10000 Гс рост неустойчивостей ускоряется примерно в 70 раз. Во всех случаях значительное влияние на скорость роста возмущений оказывает амплитуда k аномалий дифференциального вращения. Увеличение амплитуды в 10 раз сокращает характерное время роста возмущений в 5–10 раз. Аналогичная зависимость

Таблица 2

Характерные времена роста возмущений дифференциального вращения с параметрами $a=0.5$, $f=0.8$ при различных амплитудах аномалий дифференциального вращения и величины магнитного поля, $T_0=1000$, для каждого значения k : в верхней строке — при числе гармоник $N=13$, в нижней — при $N=15$.

	$\alpha_1=0.0$	$\alpha_1=0.0035$	$\alpha_1=0.035$	$\alpha_1=0.35$	$\alpha_1=3.5$	$\alpha_1=35$
$k=0$	$T=20.71$ $T=20.94$	$T=21.58$ $T=21.85$	$T=23.77$ $T=26.34$	$T=39.63$ $T=23.56$	$T=5.44$ $T=2.99$	$T=0.59$ $T=0.33$
$k=0.001$	$T=19.99$ $T=20.20$	$T=20.77$ $T=21.06$	$T=23.96$ $T=25.98$	$T=30.08$ $T=21.89$	$T=2.34$ $T=1.66$	$T=0.23$ $T=0.15$
$k=0.005$	$T=9.04$ $T=5.98$	$T=9.09$ $T=6.02$	$T=9.60$ $T=6.40$	$T=6.46$ $T=5.79$	$T=0.49$ $T=0.38$	$T=0.04$ $T=0.03$
$k=0.01$	$T=4.41$ $T=1.77$	$T=4.43$ $T=1.78$	$T=4.59$ $T=1.99$	$T=2.84$ $T=2.94$	$T=0.25$ $T=0.19$	$T=0.02$ $T=0.01$

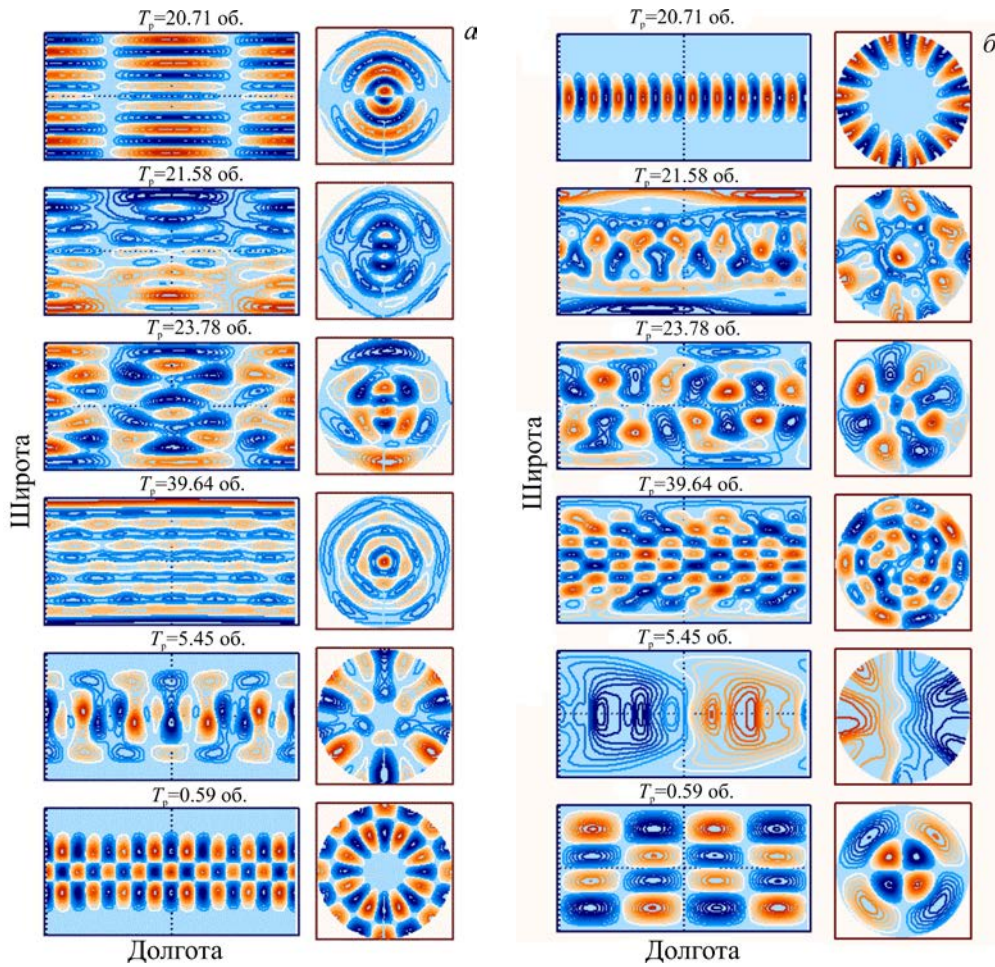


Рис. 2. Пространственные распределения наиболее быстро растущих нормальных мод $\psi'_0(\lambda, \mu) = \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda)$ (a);

$\chi'_0(\lambda, \mu) = \sum_{\gamma} \chi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda)$ (б) при разных величинах магнитного поля $\alpha_1=0.0$, $\alpha_1=0.0035$, $\alpha_1=0.035$, $\alpha_1=0.35$, $\alpha_1=3.5$,

$\alpha_1=35$ (сверху вниз); T_p — время увеличения амплитуды нормальной моды в e раз

неустойчивостей от магнитного поля и аномалий среднего потока сохраняется при уменьшении трения и увеличении количества сферических гармоник в разложении функций тока (табл. 2). При выборе количества гармоник в разложении мы опирались на результаты работы [Мордвинов и др., 2013], в которой была проанализирована зависимость темпов роста неустойчивостей при изменении n от 5 до 30 без магнитного поля. Особенно сильная зависимость

инкрементов роста от n была зафиксирована при $n > 15$.

Видно, что при включении магнитного поля зависимость от количества гармоник сохраняется.

На рис. 2 для примера приведены пространственные распределения наиболее быстро растущих нормальных мод

$$\psi'_0(\lambda, \mu) = \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda),$$

Таблица 3

То же, что в табл. 1, для параметров дифференциального вращения $a=0.2, f=0.2$ и $T_0=500$.

	$\alpha_1=0.0$	$\alpha_1=0.0035$	$\alpha_1=0.035$	$\alpha_1=0.35$	$\alpha_1=3.5$	$\alpha_1=35$
$k=0$	$T=\infty$	$T=5805.80$	$T=580.58$	$T=58.05$	$T=4.86$	$T=0.58$
$k=0.001$	$T=1782.83$	$T=1456.64$	$T=225.03$	$T=49.31$	$T=3.2$	$T=0.26$
$k=0.005$	$T=9.56$	$T=9.58$	$T=9.93$	$T=5.80$	$T=0.47$	$T=0.04$
$k=0.01$	$T=3.27$	$T=3.33$	$T=4.07$	$T=2.34$	$T=0.24$	$T=0.02$

Таблица 4

То же, что в табл. 2, для параметров дифференциального вращения $a=0.2, f=0.2, T_0=1000$, для каждого значения k : в верхней строке — при числе гармоник $N=13$, в нижней — при $N=15$.

	$\alpha_1=0.0$	$\alpha_1=0.0035$	$\alpha_1=0.035$	$\alpha_1=0.35$	$\alpha_1=3.5$	$\alpha_1=35$
$k=0$	$T=\infty$	$T=5926.23$	$T=592.62$	$T=59.26$	$T=4.89$	$T=0.59$
	$T=\infty$	$T=3300.99$	$T=330.09$	$T=33.0$	$T=3.3$	$T=0.33$
$k=0.001$	$T=640.65$	$T=610.5$	$T=209.66$	$T=49.43$	$T=3.23$	$T=0.27$
	$T=17201.1$	$T=948.12$	$T=186.45$	$T=30.74$	$T=2.03$	$T=0.15$
$k=0.005$	$T=9.47$	$T=9.49$	$T=9.83$	$T=5.80$	$T=0.47$	$T=0.04$
	$T=4.81$	$T=4.92$	$T=6.20$	$T=5.87$	$T=0.36$	$T=0.03$
$k=0.01$	$T=3.26$	$T=3.32$	$T=4.06$	$T=2.34$	$T=0.24$	$T=0.02$
	$T=1.54$	$T=1.56$	$T=1.71$	$T=2.68$	$T=0.19$	$T=0.01$

$$\chi'_0(\lambda, \mu) = \sum_{\gamma} \chi_{\gamma} Y_{\gamma}(\mu, \lambda)$$

при нулевой амплитуде аномалий среднего потока $k=0$, дифференциальном вращении с параметрами $a=0.5, f=0.8$ и времени рэлеевского затухания $T_0=1000$ оборотов Солнца. В разложении функций тока учитывалось 13 сферических гармоник. Распределения нормированы на максимальные значения $\psi'_0(\lambda, \mu)$ и $\chi'_0(\lambda, \mu)$. Нанесены изолинии от -0.9 до $+0.9$. Изолинии отрицательных значений функций тока синие, а изолинии положительных значений — красные. Пространственные распределения нормальных мод построены в двух проекциях — цилиндрической (слева) и стереографической (справа).

Видно, что пространственные структуры нормальных мод при разных величинах среднего магнитного поля сильно различаются. Как правило, наиболее неустойчивыми оказываются гармоники с большими волновыми векторами γ . Крупномасштабные нормальные моды с малыми γ более устойчивы. Особый интерес (см. рис. 2) представляют осесимметричная нормальная мода функции тока при $\alpha_1=0.35$ (100 Гс), (крутильные колебания) (панель *a*, четвертое сверху распределение) и дипольная мода магнитной функции тока при $\alpha_1=3.5$ (1000 Гс) (секторная структура фотосферного магнитного поля) (панель *b*, пятое сверху распределение). Эти моды можно сопоставлять с данными наблюдений. Однако, учитывая сильную зависимость нормальных мод от параметров моделирования, интерпретация реальных крупномасштабных структур магнитного поля и поля скорости в терминах нормальных мод представляется пока преждевременной, по крайней мере, без специального исследования.

Рассмотрим дифференциальное вращение с параметрами $a=f=0.2$. Ранее мы показали, что без магнитного поля осесимметричное вращение с такими параметрами устойчиво [Мордвинов и др., 2012,

2013]. Магнитное поле и аномалии среднего потока меняют ситуацию. В табл. 3, 4 приведены результаты расчетов характерных времен роста наиболее неустойчивых нормальных мод при коэффициентах α_1 от 0.0035 до 35 и разных амплитудах k аномалий среднего потока. Во всех случаях течения становятся неустойчивыми, однако характерные времена роста амплитуды возмущений больше, чем при параметрах дифференциального вращения $a=0.5, f=0.8$.

Подведем итоги расчетов нормальных мод течений с вмороженным магнитным полем. Расчеты показывают, что увеличение амплитуды аномалий дифференциального вращения и усиление магнитного поля в диапазоне 1000–10000 Гс во всех случаях приводят к быстрому росту неустойчивости течения. Характерное время роста возмущений сокращается более чем на порядок. Увеличение амплитуды аномалий дифференциального вращения в наибольшей степени проявляется в диапазоне $k=0.01-0.001$. Слабое магнитное поле стабилизирует течение. Это подтверждает результаты численных расчетов в работе [Mordvinov et al., 2019]. Однако более сильной все же оказывается зависимость скорости роста неустойчивостей от амплитуды аномалий среднего потока.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА НОРМАЛЬНЫХ МОД НЕОДНОРОДНОГО СРЕДНЕГО ПОТОКА

Для исследования зависимости пространственной структуры нормальных мод от внешних факторов используем более простую геострофическую модель течения без магнитного поля. Включение магнитного поля значительно усложняет задачу и не вполне оправданно, так как количество информации о крупномасштабных структурах магнитного поля и ее интерпретация недостаточны для сопоставления с результатами расчетов.

Нашей задачей будет расчет нормальных мод и их анализ для среднего течения, основной особенностью которого являются квазистационарные образования — осесимметричный полярный циклонический вихрь и антициклонический вихрь в средних широтах. Подобная конфигурация близка к конфигурации течений в земной стратосфере. В работе [Mordvinov, Zorkaltseva, 2022] мы обратили внимание на то, что среди наиболее неустойчивых мод таких течений появляются осесимметричные возмущения, напоминающие крутильные колебания.

Как и в предыдущем разделе, будем использовать в расчетах простую геострофическую модель

$$\frac{\partial(L\psi)}{\partial t} = -\frac{1}{R^2}J(\psi, \Delta\psi) - \frac{2\Omega}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - r\Delta\psi - K\Delta^3(\Delta\psi) - f(\psi), \quad (19)$$

где R — радиус Земли.

Линеаризуя уравнение, раскладывая по сферическим гармоникам и представляя возмущения в виде нормальных мод, приходим к уравнению на собственные числа и собственные вектора матрицы, характеризующей взаимодействия нормальных мод со средним потоком,

$$A_{n'}\psi_{n'} = \sigma'\psi_{n'}, \quad (20)$$

где

$$A_{n'} = \frac{1}{k_n\Omega} \left\{ \int_S Y_{n'}^* J(Y_{n'}, G_n) dS \right\} + \delta_{n'} [i2m' - r_1 n'(n'+1)],$$

$$G_n = \Delta\bar{\psi} + k_n\bar{\psi}, \quad k_n = n(n+1) + F^2,$$

$F \equiv a/L_D$ — число Фруда.

Компонентами собственных векторов являются коэффициенты разложения по сферическим гармоникам.

В предыдущем разделе мы с помощью квадратур вычисляли двойные интегралы, входящие в выражения для элементов матрицы $A_{n'}$. Сейчас мы воспользуемся методом коэффициентов взаимодействия, часто используемым при численном моделировании общей циркуляции атмосферы. Для этого разложим функцию тока $\bar{\psi}$ среднего течения по сферическим гармоникам $\bar{\psi}(\lambda, \mu) = \sum_{n'} \bar{\psi}_{n'} Y_{n'}(\mu, \lambda)$

и подставим в выражение для оператора $G_n = \Delta\bar{\psi} + k_n\bar{\psi} = \sum_{n'} \bar{\psi}_{n'} (k_n - k_{n'}) Y_{n'}$. Формула для вычисления компонент матрицы $A_{n'}$ принимает вид

$$A_{n'} = \frac{1}{\Omega} \left\{ \sum_{n'} \bar{\psi}_{n'} \left(\frac{k_n - k_{n'}}{k_{n'}} \right) \int_S Y_{n'}^* J(Y_{n'}, Y_{n'}) dS \right\} + \delta_{n'} [i2m' - r_1 n'(n'+1)] \quad (21)$$

В этом выражении скалярное произведение

$$\int_S Y_{n'}^* J(Y_{n'}, Y_{n'}) dS = \frac{i}{2} \int_S Y_{n'}^* \left[m_{n'} Y_{n'} \frac{\partial Y_{n'}}{\partial \mu} - m_{n'} Y_{n'} \frac{\partial Y_{n'}}{\partial \mu} \right] dS \quad (22)$$

является математическим выражением механизма нелинейного резонансного взаимодействия трех сферических функций (триады). Аналитические вычисления коэффициентов взаимодействия позволяют получить правила отбора ненулевых значений коэффициентов, что существенно упрощает алгоритм решения задачи. Мы использовали в расчетах коэффициенты взаимодействия для $N=13$ и $N=15$ сферических гармоник в разложении, как и в первой части работы.

Будем задавать структуру среднего потока в виде суммы гауссиан $\bar{\psi} \sim \pm \exp\{-kp^2\}$. Здесь p — ортодромия — расстояние между центром вихря и произвольной точкой на сфере; k — коэффициент, характеризующий ширину гауссианы. В радианах ширина гауссианы связана с коэффициентом k соотношением $\Delta = 1/\sqrt{2k}$.

Расчеты показали, что при выбранных параметрах моделирования все нормальные моды полярного циклона при ширине гауссианы $>50^\circ$ ($>25^\circ$ от полюса) являются затухающими, а при ширине $>77^\circ$ ($>39^\circ$ от полюса) наименее затухающими являются две моды — осесимметричная ($n=6, m=0$) и дипольная ($n=1, m=-1$). Спектры наименее затухающих мод и их пространственная структура в стереографической и цилиндрической проекциях при ширине циклона 77° показаны на рис. 3. Таким образом, можно предположить, что наблюдаемые в атмосфере осесимметричные крутильные колебания являются наименее затухающими нормальными модами полярного циклонического вихря.

Осесимметричные колебания оказываются достаточно устойчивыми и при численном счете. На рис. 4, a показаны результаты расчета эволюции осесимметричной нормальной моды за 28 сут при численной экстраполяции с шагом по времени 0.01 сут. Нормальная мода задавалась в качестве начальных условий. На каждом шаге по времени возмущение взаимодействовало с полярным циклоном. На панели b для сравнения показаны результаты расчета эволюции дипольной моды за тот же период времени. Хорошо видно, как быстро эволюционировал диполь и вместо него формировалась характерная спиральная структура. При статистической обработке данных наблюдений за большие интервалы времени такие структуры действительно выделяются. К сожалению, период колебаний (6.28 сут) и для осесимметричной, и для дипольной мод оказывается меньше и периода крутильных колебаний (~ 15 сут), и периода колебаний двумерных волн Россби [Branstator, Held, 1995]. Возможно, причиной различий является слишком простая геометрия среднего потока и/или принятые в расчетах параметры моделирования.

Посмотрим, как изменятся нормальные моды при появлении антициклона в умеренных широтах. На рис. 5 показаны результаты расчетов нормальных мод для течения, обусловленного суперпозицией полярного циклонического вихря и антициклонического вихря с центром на широте 60° N. Функция тока задавалась в виде суммы двух гауссиан

$$\bar{\psi} = 0.5 \exp\{-kp^2\} - 0.35 \cdot 0.2l \exp\{-klp^2l\}.$$

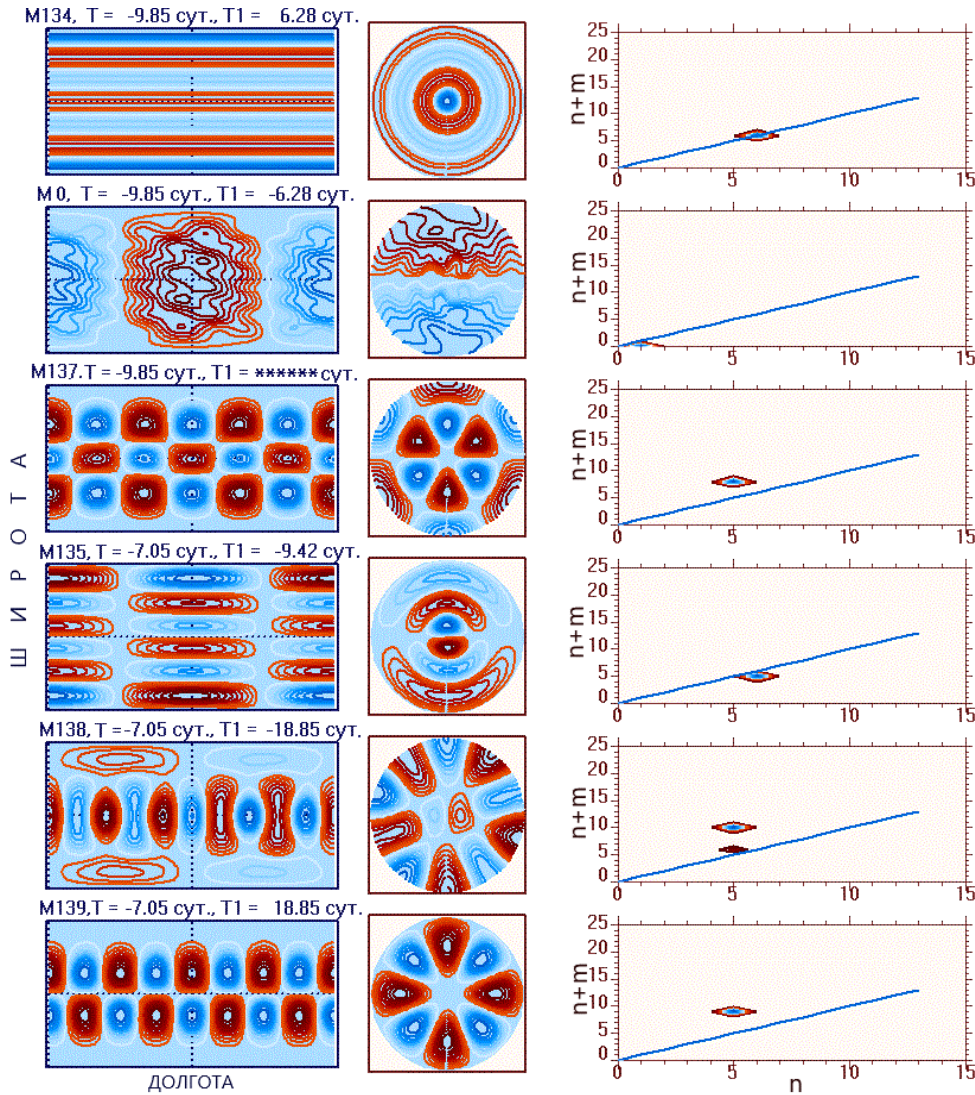


Рис. 3. Пространственная структура наименее затухающих нормальных мод полярного циклона в цилиндрической (слева) и стереографической (в центре) проекциях. Время T определяет характерное время экспоненциального затухания моды, T_1 — период колебания моды, знак перед T_1 — направление переноса моды на восток (+) или на запад (-). В относительных единицах (от -0.9 до $+0.9$) нанесены изолинии функции тока: синие соответствуют отрицательным значениям, красные — положительным. Справа — спектральный состав нормальной моды: ось X — степень сферической функции n , ось Y — сумма $n+m$, где m — зональное волновое число. Прямая синяя линия соответствует осесимметричным гармоникам при $m=0$

Параметр l менялся в пределах от 0 до 5 (сверху вниз). При возрастании l от 1 до 5 амплитуда антициклонического вихря возрастала в пять раз, одновременно уменьшалась ширина антициклона. И то и другое способствовало возрастанию неустойчивости течения. На рис. 5, ε приведены распределения функций тока $\bar{\psi}$. На рис. 5, a, b в цилиндрической и стереографической проекциях показаны моды, имеющие наибольшие инкременты, на рис. 5, ε — спектры нормальных мод.

Видно, как усложняется структура наиболее быстро растущих мод с увеличением амплитуды и уменьшением ширины антициклона. Для полярного циклона наименее затухающей является осесимметричная мода. В наиболее неустойчивой конфигурации течения с сильным антициклоном самая быстро растущая нормальная мода представляет собой сумму трех сферических гармоник (см. рис. 5, ε , нижняя панель).

На рис. 6 показаны спектры нормальных мод: a — при $N=13$ (соотв. рис. 5); b — при $N=15$.

Цвета изолиний меняются от темно-синих при возрастании неустойчивости среднего потока, т. е. при увеличении амплитуды антициклона (сверху вниз на рис. 5). При $N=13$ спектр быстро растущих мод ограничен степенями гармоник 5 и 7. При увеличении разрешения до $N=15$ в спектре появляются сферические функции со степенями 3 и 4. Темпы роста наиболее неустойчивых гармоник при этом становятся меньше, т. е. течение оказывается более устойчивым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы представлены результаты численных экспериментов с магнитогидродинамической моделью мелкой воды для оценки степени влия-

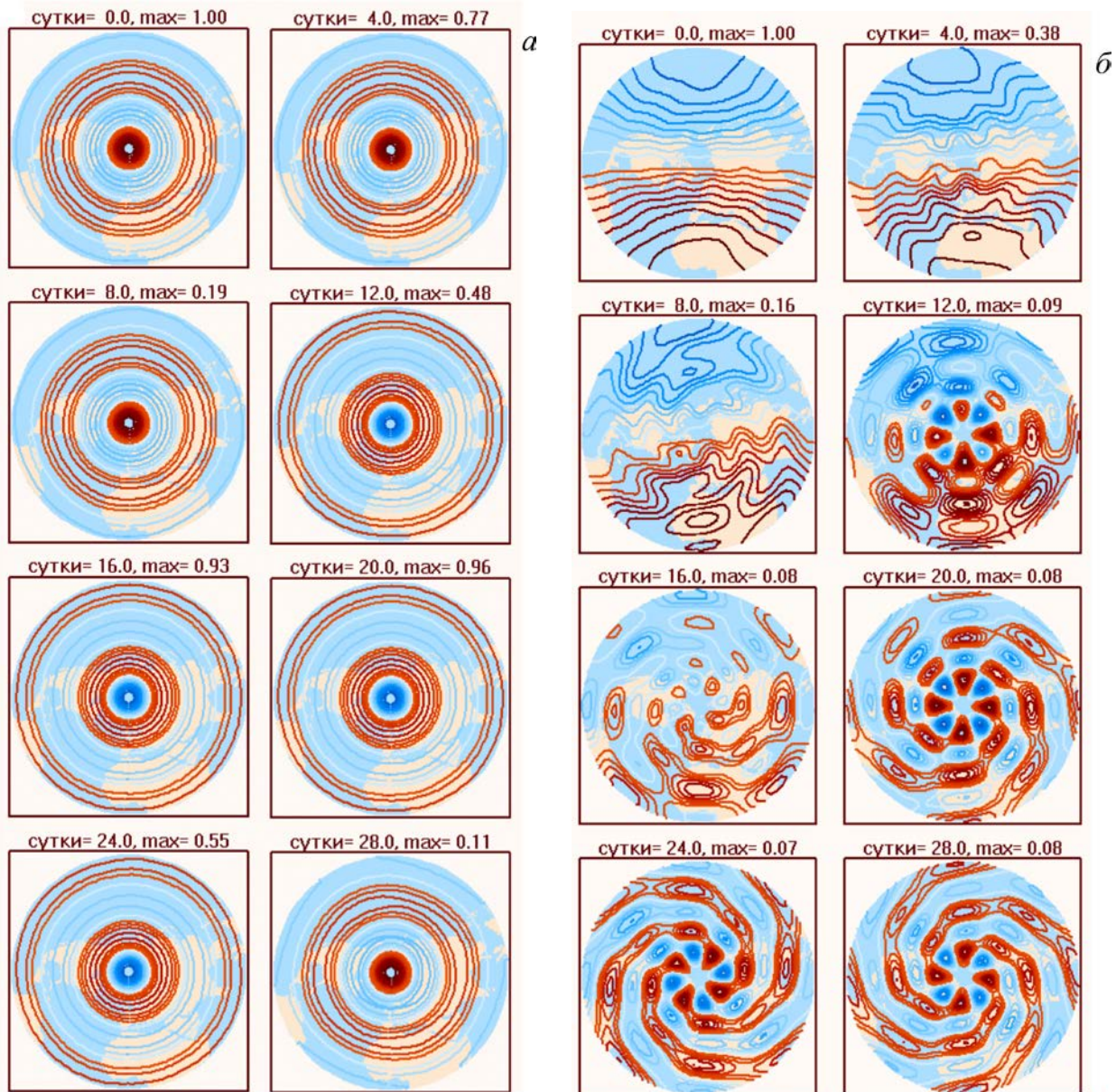


Рис. 4. Результаты численной экстраполяции со временем осесимметричной (а) и дипольной (б) нормальных мод. Интервал времени экстраполяции — 28 сут, шаг по времени при численном счете — 0.01 сут. Интервал времени между кадрами (слева направо и сверху вниз) — 4 сут. В относительных единицах от -0.9 до $+0.9$ в стереографической проекции на карты нанесены изолинии функции тока нормальных мод

ния магнитного поля на развитие неустойчивостей некоторого стационарного потока с замороженным магнитным полем. Магнитная функция тока предполагалась пропорциональной функции тока среднего течения, представляющего собой сумму функции тока дифференциального вращения и сферической гармоники шестой степени. Силу трения обеспечивали рэлевоуское трение и гипервязкость третьей степени. В рамках принятых приближений выполнены расчеты нормальных мод среднего течения с замороженным магнитным полем. В разложении функций тока учитывались 13 и 15 сферических гармоник. Расчеты нормальных мод подтвердили полученный нами ранее в численном эксперименте результат о различном влиянии слабого и сильного магнитных полей на неустойчивость дифференциального вращения. Слабое магнитное поле стабилизирует развитие неустойчи-

вости, сильное, наоборот, усиливает ее. Полученные зависимости инкремента неустойчивостей от величины среднего магнитного поля согласуются и с утверждениями о стабилизирующей роли магнитного поля [Мишин, Томозов, 2014], и с выводами об усилении неустойчивостей при включении в модельные расчеты магнитного поля [Cally et al., 2003; Dikpati, Gilman, 2001; Gilman et al., 2007; Gilman, Fox, 1997]. Азимутальные неоднородности дифференциального вращения во всех случаях способствовали развитию неустойчивостей.

Во второй части работы объектом исследования была пространственная структура нормальных мод. Изучалась возможность объяснения с помощью нормальных мод крутильных колебаний в атмосферах Земли и Солнца. Для упрощения расчетов влияние магнитного поля на течение не учитывалось,

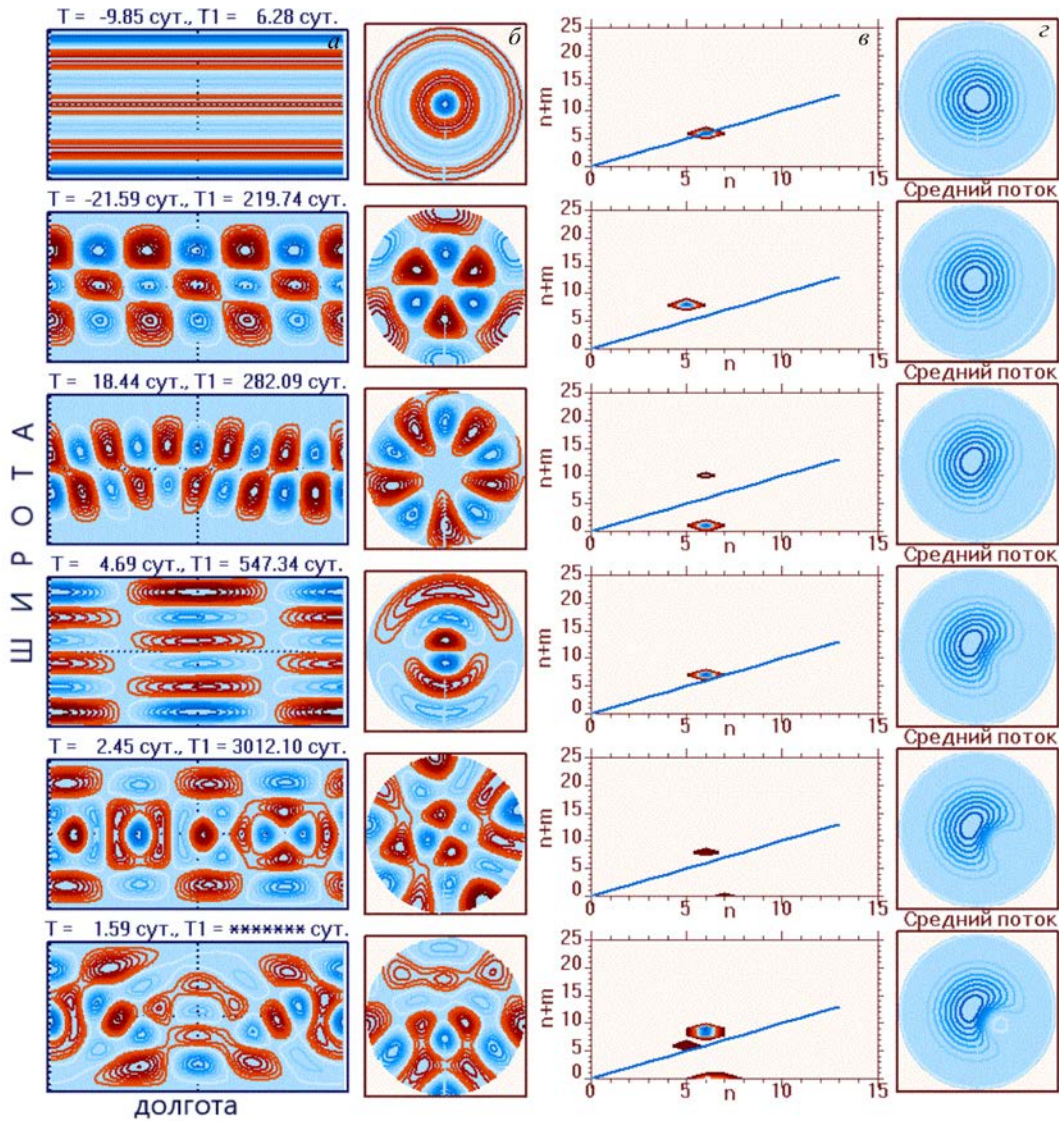


Рис. 5. Пространственная структура нормальных мод, имеющих наибольшие инкременты, в цилиндрической (а) и стереографической (б) проекциях, спектры нормальных мод (в) и конфигурация среднего потока (г) при разных параметрах антициклона

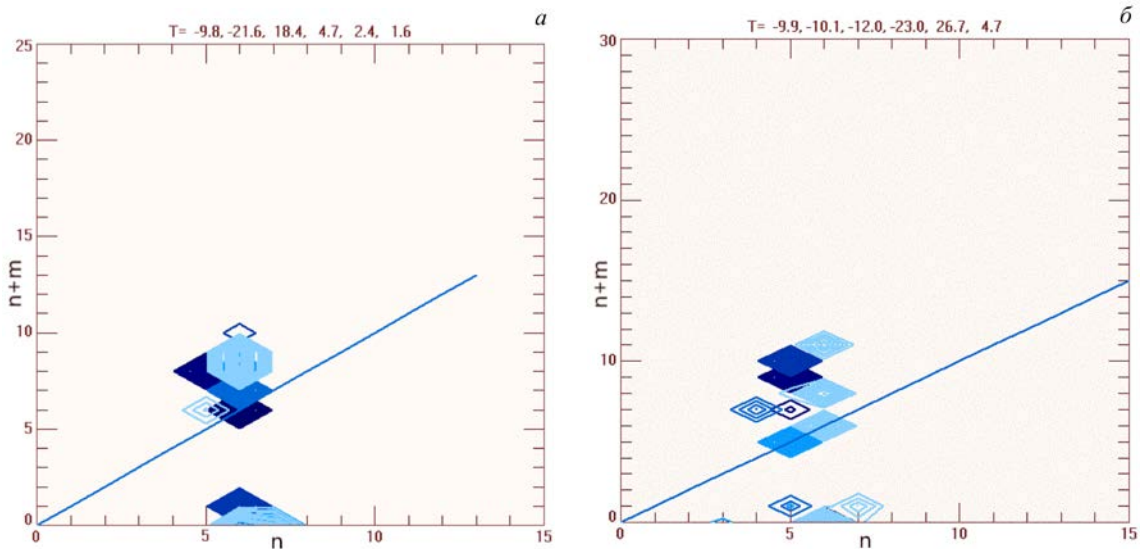


Рис. 6. Спектры нормальных мод с наибольшими инкрементами для потока полярный циклон + антициклон, слева — при $N=13$ (соответствуют рис. 5), справа — при $N=15$. Амплитуды антициклона менялись от минимальных до максимальных (темно-синие и светло-синие изолинии)

т. е. модель в большей степени соответствовала условиям атмосферы Земли. Основной компонентой среднего течения был осесимметричный полярный вихрь. Подобная конфигурация течения характерна для земной атмосферы и, вероятно, для атмосферы Солнца. Расчеты показали, что крупномасштабный циклонический вихрь над полюсом устойчив, что следовало ожидать, причем наименее затухающими являлись две моды — осесимметричная мода, напоминающая крутильные колебания, и горизонтальная дипольная. Крупномасштабные аномалии среднего потока (антициклонический вихрь в умеренных широтах Северного полушария) нарушали устойчивость полярного вихря. Осесимметричная и дипольная моды по-прежнему оставались слабо затухающими, однако появлялись быстро растущие нормальные моды, имеющие, как правило, более сложную пространственную структуру.

Основные результаты носят в большей степени качественный характер, так как расчеты инкрементов нормальных мод и тем более их пространственной структуры в очень сильной степени зависят от принятых допущений, структуры модели, конфигураций среднего течения и среднего магнитного поля. Для количественных выводов о структуре нормальных мод и инкрементов роста нормальных мод все эти параметры необходимо уточнять.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (субсидия № 075-ГЗ/Ц3569/278).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бумба В. *Крупномасштабные магнитные поля на Солнце. Проблемы солнечной активности*. М.: Мир, 1979. С. 50–74.
- Бумба В., Макаров В.И. Фоновые магнитные поля на Солнце. Солнечные магнитные поля и корона: *Труды XIII Консультативного совещания по физике Солнца*. 1989. Т. 1, Новосибирск: Наука, С. 51–71.
- Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*. В 2-х томах. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.
- Данилов С.Д., Гурарий Д. Квазидвумерная турбулентность. *УФН*. 2000. Т. 170, № 9. С. 921–969.
- Дымников В.П., Скиба Ю.Н. Баротропная неустойчивость зонально-несимметричных атмосферных потоков. *Вычислительные процессы и системы*. Вып. 4. М.: Наука, 1986. С. 63–104.
- Дымников В.П., Филатов А.Н. *Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов*. Отдел вычислительной математики АН СССР. М.: 1988. С. 1–140.
- Зоркальцева О.С., Мордвинов В.И., Девятова Е.В. Методика расчета крутильных колебаний в атмосфере по данным архивов NCEP/NCAR, MERRA-2, ECMWF ERA-40 и ERA-Interim. *Солнечно-земная физика*. 2019. Т. 5, № 1. С. 90–99. DOI: [10.12737/szf51201910](https://doi.org/10.12737/szf51201910).
- Крупномасштабные динамические процессы в атмосфере*. М.: Мир, 1988. 430 с.
- Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах. *Вычислительные процессы и системы*. М.: Наука, 1986. 272 с.
- Мишин В.В., Томозов В.М. Проявления неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в атмосфере Солнца, солнечном ветре и магнитосфере Земли. *Солнечно-земная физика*. 2014. Вып. 25. С. 10–20.
- Мордвинов В.И., Латышева И.В. *Теория общей циркуляции атмосферы, изменчивость крупномасштабных движений*. 2013. Иркутск. Изд-во ИГУ. 193 с.
- Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Гидродинамические неустойчивости в тахоклине, обусловленные вариациями толщины слоя. *Солнечно-земная физика*. 2012. Вып. 20. С. 3–8.
- Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Гидродинамические неустойчивости в тахоклине, обусловленные вариациями толщины слоя и неоднородностями среднего потока. *Солнечно-земная физика*. 2013. Вып. 23. С. 3–12.
- Altrock R., Howe R., Ulrich R. Solar torsional oscillations and their relationship to coronal activity. *American Astronomical Society, SPD Meeting, BAAS* 38. 2006. Vol. 38. P. 258. http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=2006SPD....37.3203A.
- Branstator G., Held I. Westward propagating normal modes in the presence of stationary background waves. *J. Atmos. Sci.* 1995. Vol. 52. P. 247–262.
- Bumba V., Howard R. Large-scale distribution of solar magnetic fields. *Astrophys. J.* 1965. Vol. 141, no. 4. P. 1502–1512.
- Cally P.S., Dikpati M., Gilman P.A. Three-dimensional magnetoshear instabilities in the solar tachocline. *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. Papers*. 2003. Vol. 339, iss. 4. P. 957–972.
- Dikpati M., Gilman P.A. Analysis of hydrodynamic stability of solar tachocline latitudinal differential rotation using a shallow-water model. *Astrophys. J. Papers*. 2001. Vol. 551. P. 536–564. DOI: [10.1086/320080](https://doi.org/10.1086/320080).
- Dikpati M., Gilman P.A. A shallow-water theory for the Sun's active longitudes. *Astrophys. J.* 2005. Vol. 635, iss. 2. P. L193–L196.
- Fournier D., Gizon L., Hyst L. Viscous inertial modes on a differentially rotating sphere: Comparison with solar observations. *Astron. Astrophys.* 2022. Vol. 664. P. 1–16. DOI: [10.1051/0004-6361/202243473](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243473).
- Gilman P.A. Stability of baroclinic flows in a zonal magnetic field. Part 1–3. *J. Atmos. Sci.* 1967. Vol. 24, no. 2. P. 101–143.
- Gilman P.A., Fox P.A. Joint instability of latitudinal differential rotation and toroidal magnetic fields below the solar convection zone. *Astrophys. J.* 1997. Vol. 484, no. 1. P. 439–454.
- Gilman P.A., Dikpati M., Miesch M.S. Global MHD instabilities in a three-dimensional Thin-Shell Model of solar tachocline. *Astrophys. J. Suppl. Ser. Papers*. 2007. Vol. 170. P. 203–227. DOI: [10.1086/512016](https://doi.org/10.1086/512016).
- Kitchatinov L.L., Rüdiger G. Stability of latitudinal differential rotation in stars. *Astron. Astrophys.* 2009. Vol. 504, no. 2. P. 303–307.
- Miesch M.S. Large-scale dynamics of the convection zone and tachocline. *Living Reviews in Solar Physics*. 2005. Vol. 2, no. 1. P. 1–139.
- Mordvinov V.I., Zorkaltseva O.S. Normal Mode as a Cause of Large-Scale Variations in the Troposphere and Stratosphere. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Phys.* 2022. Vol. 58, no. 2. P. 140–149.
- Mordvinov V.I., Olemskoy S.V., Latyshev S.V. Influence of mean magnetic field and magnetic field of the velocity disturbances on the development of hydrodynamic instabilities in tachocline. *Proc. SPIE. 11208, 25th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Phys.* 1120803 (18 December 2019). 2019. DOI: [10.1117/12.2538285](https://doi.org/10.1117/12.2538285).
- Tikhomolov E.M. Large-scale vortical flows and penetrative convection in the Sun. *Nuclear Phys. A*. 2005. Vol. 758, no. 1. P. 709–712.

Как цитировать эту статью:

Мордвинов В.И., Девятова Е.В., Томозов В.М. Влияние магнитного поля и конфигурации среднего течения на пространственную структуру и скорость роста нормальных мод. *Солнечно-земная физика*. 2023. Т. 9, № 4. С. 134–146. DOI: [10.12737/szf-94202315](https://doi.org/10.12737/szf-94202315).