

DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-4-15-31

О.С. Сунцов

Студент,
Российский технологический университет МИРЭА,
Россия, 119571, Москва, пр-т Вернадского, 78

Л.А. Жихарев

Ассистент,
Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), кафедра инженерной
графики,
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

А.В. Ефремов

Ст. преподаватель,
Российский технологический университет МИРЭА,
Россия, 119571, Москва, пр-т Вернадского, 78

Исследование трехмерного отражения от криволинейных зеркал с применением инструментов компьютерной алгебры

Аннотация. Данная статья является продолжением исследования процесса отражения различных объектов от криволинейных зеркал. Так, ранее в работах был описан геометрический способ построения результатов отражений, который был реализован математически в статье при помощи принципов аналитической геометрии. Полученные аналитические уравнения образов были визуализированы в программе *Wolfram Mathematica* с возможностью динамически изменять параметры зеркала и отражаемого объекта. Однако в перечисленных работах были рассмотрены лишь случаи отражения на плоскости. В данном же исследовании уделяется внимание более сложному случаю — отражению в трехмерном пространстве.

В статье было рассмотрено отражение точки от поверхностей второго порядка: цилиндра, конуса, однополостного и двуполостного гиперболоидов, сферы, эллиптического и гиперболического параболоидов, и от тора — поверхности четвертого порядка. Как и раньше, результат отражения, полученный в каждом из случаев, сопровождается программным кодом для *Wolfram Mathematica*, позволяющим читателю самостоятельно моделировать процесс отражения при различных исходных параметрах.

Кроме того, были проанализированы связи между полученными результатами — как связи между образами различных трехмерных отражений, так и связи результатов трехмерных отражений с их плоскими аналогами. В частности, на основе этого была сформулирована гипотеза о связи кривизны Гаусса зеркала и размерности объекта, получаемого в результате отражения.

По результатам работы были сделаны выводы и обозначены перспективы для дальнейших исследований. Одной из них является получение аналитического механизма описания сложных геометрических поверхностей при помощи набора более простых объектов. Данная возможность позволит повысить эффективность деятельности специалистов при работе с отражениями от сложных поверхностей в таких сферах, как авиастроение (для создания аэродинамических поверхностей и воздуховодов), медицина, судостроение и т.п.

Ключевые слова: агеометрия отражения, отражение в трехмерном пространстве, криволинейные зеркала, параметрические уравнения кривых, *Wolfram Mathematica*, кривизна Гаусса.

O.S. Suntsov

Student,
MIREA — Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

L.A. Zhikharev

Assistant,
Moscow Aviation Institute (National Research University),
Department of Engineering Graphics,
4, Volokolamsk Highway, Moscow, 125993, Russia.

A.V. Efremov

Senior Lecturer,
MIREA — Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

Investigation of Three-Dimensional Reflections from Curved Mirrors Using Computer Algebra Tools

Abstract. This article is a continuation of the study of the process of reflection of various objects from curved mirrors. So, earlier in the works [18; 20], a geometric method of constructing the results of reflections was described, which was implemented mathematically in the article [38] using the principles of analytical geometry [6; 11–14; 30]. The obtained analytical equations of the reflection results were visualized in the *Wolfram Mathematica* [24] program with the ability to dynamically change the parameters of the mirror and the reflected object. However, in the listed works, only cases of reflection on the plane were considered. In this study, attention is paid to a more complex case — reflection in three-dimensional space.

The article considered the reflection of a point from surfaces of the second order: a cylinder, a cone, a single-cavity and double-cavity hyperboloids, a sphere, elliptical and hyperbolic paraboloids, and from a torus — a surface of the fourth order. As before, the reflection result obtained in each of the cases is accompanied by a program code for *Wolfram Mathematica*, which allows the reader to independently simulate the reflection process with different initial parameters.

In addition, the relationships between the results obtained were analyzed — both the relationships between the results of various three-dimensional reflections, and the relationship of the results of three-dimensional reflections with the results of similar plane reflections. In particular, on the basis of this, a hypothesis was formulated about the relationship between the curvature of the Gaussian mirror and the dimension of the object obtained as a result of reflection.

Based on the results of the work, conclusions were drawn and prospects for further research were outlined. One of them is to obtain an analytical mechanism for describing complex geometric surfaces using a set of simpler objects. This feature will increase the efficiency of specialists when working with reflections from complex surfaces in areas such as aircraft construction (for creating aerodynamic surfaces and air ducts), medicine [40], shipbuilding [7; 31; 42], etc.

Keywords: reflection geometry, reflection in three-dimensional space, curved mirrors, parametric equations of curves, *Wolfram Mathematica*, the Gaussian curvature.

Введение

Геометрические построения находят своё применение во многих областях прикладных наук. К примеру, схемы распространения световых лучей используют в оптической физике для моделирования оптических систем, приборов и явлений [3; 21; 44; 46]. В современной науке также актуально применение численных методов решения прикладных задач, в основе алгоритмов которых лежат геометрические правила трассировки лучей света [34; 35; 41; 43; 45]. Также много работ посвящены математическому моделированию задач геометрической акустики имеющих большое значение при проектировании зданий «акустической» направленности, например, концертных залов, театров и т.п. [8; 33; 36]

Представленная работа актуальна обратным подходом – использованием физического явления – отражения света от криволинейных зеркал для развития теории геометрических построений. Предложенная в работе модель отражения позволяет создавать и исследовать новые кривые и поверхности, а также устанавливает новое правило формообразования.

Задачи исследования:

- математически точное получение образа точки при ее отражении от различных поверхностей;
- установление взаимосвязей между образами, полученными отражением точки от некоторых квадрик – плоскости, цилиндра, конуса, однополостного и двуполостного гиперболоидов;
- оценка образов, полученных отражением точки от прочих квадрик.

В работе используются аналитические методы исследования для получения более точных результатов, по сравнению с численными методами. В частности, используется метод аналитической геометрии, так как он является стандартным при решении задач, в которых два объекта описаны аналитически и необходимо аналитически описать опре-

деленный процесс, связывающий эти два объекта. Так, одним из классических примеров подобного рода задач является нахождение координат точки пересечения прямой и плоскости, когда и прямая, и плоскость описаны математическими уравнениями [11; 28]. Несмотря на простоту этого примера, в настоящей работе при решении более сложных задач к нему приходится регулярно обращаться.

Подкрепление выводов осуществляется при помощи визуального сравнения двумерных и трехмерных графиков – т.е. графический метод применяется в качестве вспомогательного.

Базовые случаи отражения

В данной работе под словом «отражение» понимается процесс, результатом которого является образ некоторого объекта. Образ при этом – геометрическое место точек, симметричных точкам отражаемого объекта (прообраза) относительно касательных прямых (в случае отражения на плоскости от плоских кривых, т.е. в случае «плоского отражения») или касательных плоскостей (в случае отражения в трехмерном пространстве от поверхностей, т.е. в случае «трехмерного отражения») в каждой из точек зеркала.

Прежде чем рассматривать отражение точки от поверхностей второго и более порядков, необходимо обратиться к случаю, к которому сводятся все остальные – отражение точки от плоскости. Чтобы понять его принцип, удобно вернуться к аналогичному случаю на плоскости – отражению точки от прямой, рассмотренному в предыдущей работе [38]. Геометрическое построение процесса отражения точки от прямой показано на рис. 1.

На рис. 1 показаны: A – отражаемый объект, прообраз (точка), a – зеркало (прямая), B – точка падения луча на зеркале и A^* – результат отражения (в оптической физике для обозначения такого объекта применяют термин «мнимое изображение» [17];

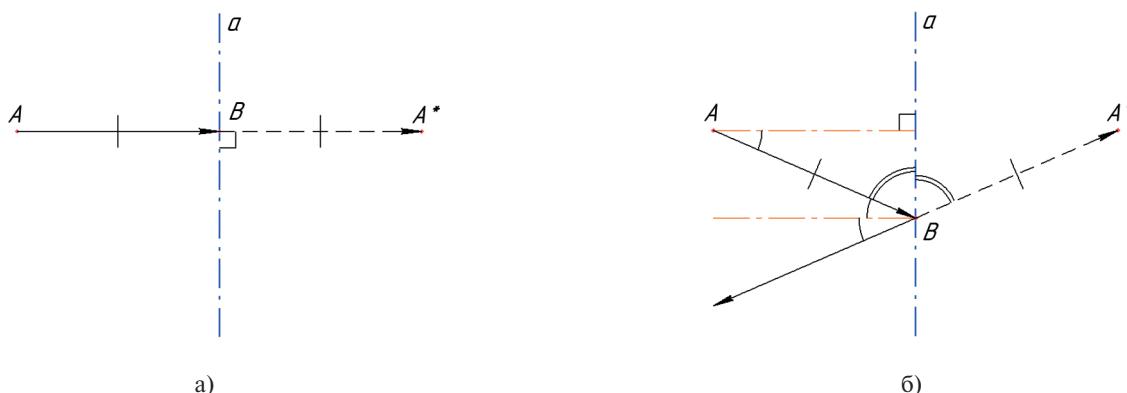


Рис. 1. Отражение точки от прямой на плоскости (а – точка падения B принадлежит перпендикуляру, б – точка падения B не принадлежит перпендикуляру) [38]

18]; в геометрии же более распространено понятие «образ»). Способ построения данного отражения общезвестен и описан в работах [18–20; 38].

Сравнение рис. 1, а и 1, б позволяет увидеть, что в случае отражения от прямой, образ не зависит от выбора точки падения луча на зеркале. При этом это же свойство характерно и для отражения точки от плоскости. Алгоритм построения отражения от плоскости также аналогичен случаю отражения от прямой. Так, на рис. 2 показано, что для построения результата отражения точки от плоскости достаточно провести нормаль к плоскости через отражаемую точку и симметрично отложить на ней расстояние, равное расстоянию от исходной точки до плоскости.

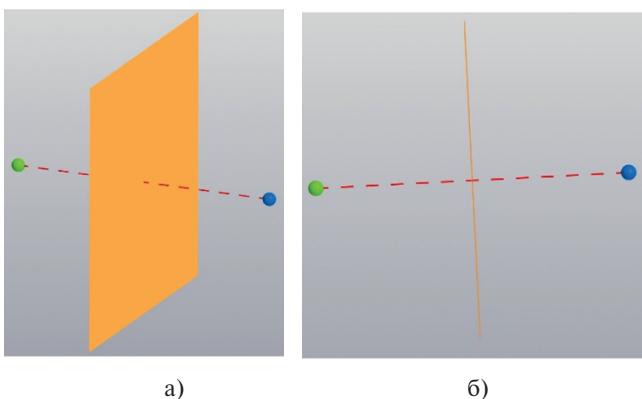


Рис. 2. Отражение точки от плоскости (а – общий вид, б – вид, на котором плоскость проецируется в прямую)

Как было обозначено выше, построение отражений любого объекта от любого зеркала на плоскости сводится к случаю отражения точки от прямой, а построение любого отражения в пространстве сводится к случаю отражения точки от плоскости. Алгоритм данного сведения на плоскости был подробно описан в работе [38]. В случае отражения точки от поверхностей алгоритм абсолютно аналогичен. Только в каждой из точек зеркала вместо касательных прямых строятся касательные плоскости, а через отражаемую точку проводятся не перпендикуляры, а нормали (к каждой из касательных плоскостей).

Отражение точки от цилиндрической поверхности

В первую очередь рассмотрим поверхность, наиболее тесно связанную с плоскими зеркалами – цилиндрическую. Эта связь обусловлена тем, что она по своей природе является плоской кривой, выдавленной перпендикулярно своей плоскости на высоту цилиндра. Образ, полученный в результате применения алгоритма, описанного в [38] и адаптированного для трехмерного пространства, представ-

лен на рис. 3. Положение отражаемой точки для наглядности показано при помощи сферы малого радиуса.

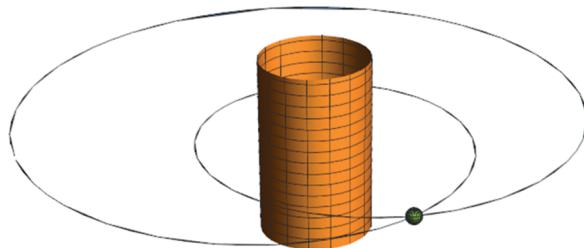


Рис. 3. Отражение точки от цилиндрической поверхности

Программный код для самостоятельного построения данного образа в *Wolfram Mathematica* приведен в приложении 1.

В данном случае была рассмотрена эллиптическая цилиндрическая поверхность. Как видно на рис. 3, результат отражения – одномерный объект (кривая). При этом заметно его сходство с кривой, которая была получена при отражении точки от окружности на плоскости в [38] (рис. 4).

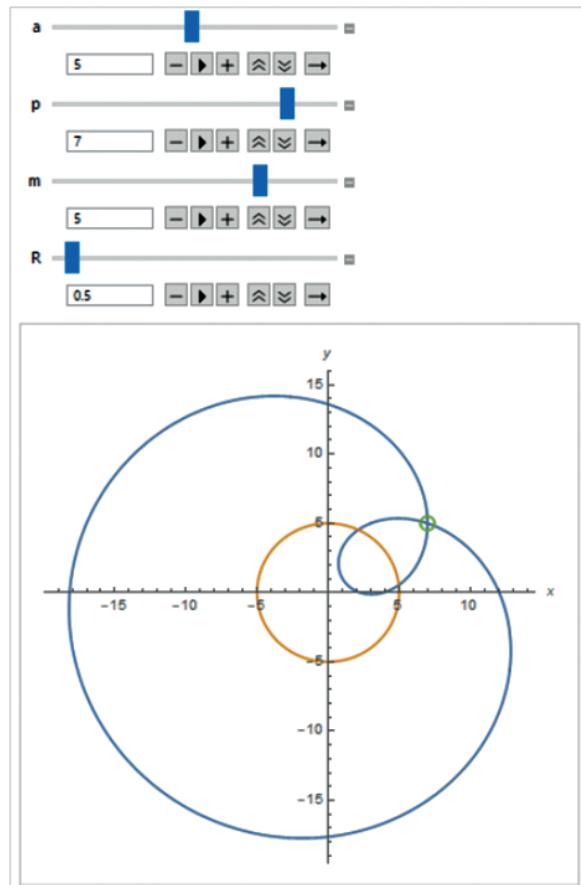


Рис. 4. Отражение точки от окружности на плоскости [38]

Для того чтобы убедиться в неслучайности замеченного сходства, сравним параметрические уравнения, полученные в обоих случаях. Для удобства вместо эллиптического рассмотрим круговой цилиндр. Тогда параметрические уравнения, описывающие его, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + 2\cos v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v) \\y &= y_0 + 2\sin v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v) \\z &= z_0\end{aligned}\quad (1)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты отражаемой точки в пространстве, a – радиус цилиндра, v – параметр, меняющийся от 0 до 2π .

Параметрические уравнения, описывающие кривую-образ, изображенную на рис. 4, были выведены в [38] и имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + 2\cos v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v) \\y &= y_0 + 2\sin v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v)\end{aligned}\quad (2)$$

где x_0, y_0 – координаты отражаемой точки на плоскости, a – радиус окружности, v – параметр, меняющийся от 0 до 2π .

Сравнение групп уравнений (1) и (2) позволяет понять, что проекция кривой, получающейся в результате отражения точки от цилиндрической поверхности (рис. 3), на плоскость, перпендикулярную оси, описывается теми же уравнениями, что и результат отражения точки от окружности на плоскости (рис. 4). При этом анализ третьего уравнения группы (1) позволяет понять, что полученная кривая принадлежит плоскости, проходящей через отражаемую точку и перпендикулярной оси цилиндра (в данном случае для удобства восприятия цилиндр задан таким образом, что его ось совпадает с осью OZ системы координат).

А теперь обоснуем полученные результаты другим путем – анализируя алгоритм геометрического построения результата отражения в данном конкретном примере.

Итак, в общем случае сначала в произвольной точке зеркала-поверхности строится касательная плоскость. Далее процесс сводится к базовому отражению исходной точки от данной плоскости. Точка, получаемая в результате этого отражения, является одной из точек искомого образа – результата отражения исходной точки от цилиндрической поверхности. В общем случае, при повторении данного алгоритма в результате получается образ-поверхность, каждая из точек которого соответствует одной определенной точке зеркала, т.е. размерности образа и

зеркала совпадают. Однако в случае цилиндрической поверхности это не так. Из-за того, что эта поверхность имеет направление, в котором ее главная кривизна равна нулю [11; 13; 30], то одни и те же плоскости являются касательными к поверхности в различных точках. Иными словами, существует направление, вдоль которого можно провести такую плоскость, которая будет касательной к поверхности во всех точках данного направления. У цилиндрической поверхности такое направление определяется ее образующими.

Так, из-за того, что вдоль образующих касательные плоскости для всех параллелей цилиндра совпадают, однозначное соответствие точек образа точкам зеркала исчезает. Иначе говоря, в данном случае каждая точка образа является результатом отражения исходной точки от множества точек зеркала, а не от одной единственной. Таким образом, размерность образа уменьшается на единицу, и результатом отражения становится кривая, которая могла бы получиться при отражении исходной точки от одной лишь параллели цилиндра, лежащей в ее плоскости.

Отражение точки от конической поверхности

Перейдем к чуть более сложной поверхности второго порядка – к конусу. Результат отражения точки от него показан на рис. 5.

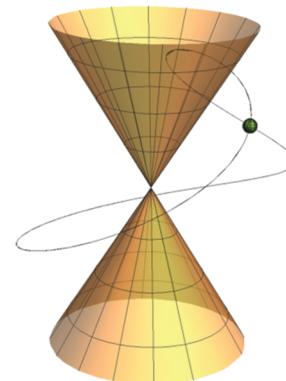


Рис. 5. Отражение точки от конической поверхности (приложение 2)

Так же, как и в случае с цилиндром, отражение представляет собой одномерный объект – кривую, так как вдоль образующих конуса (в одном из двух главных направлений) кривизна (в данном случае она также является главной) поверхности нулевая. Однако, как видно на рис. 5, в данном случае полученная кривая не плоская, а пространственная. Такое усложнение характера кривой вызвано появлением наклона образующих к оси поверхности.

При анализе полученного отражения было выявлено, что его проекция на плоскость, перпендикулярную оси конуса (рис. 6), имеет значительное сходство с улиткой Паскаля, полученной ранее при отражении точки от цилиндра и окружности (рис. 3, 4).

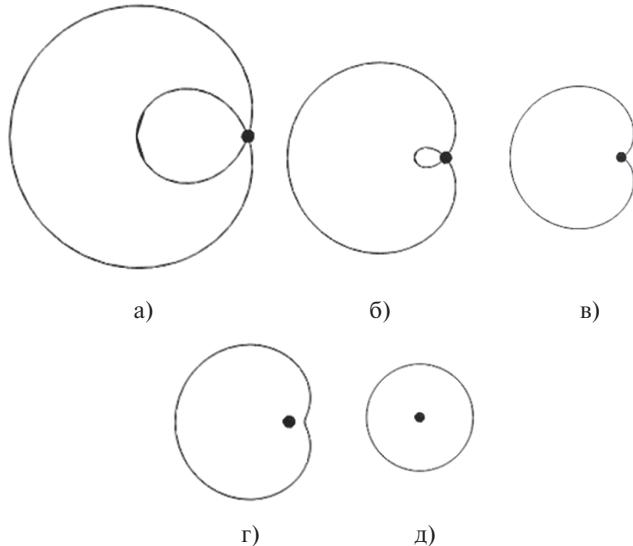


Рис. 6. Проекции образа точки при ее отражении от конуса на горизонтальную плоскость при различных положениях исходной точки (а-д – изменение проекции отражения при приближении точки к началу координат)

Чтобы проверить, что проекция действительно представляет собой улитку Паскаля, рассмотрим параметрические уравнения, которые ее описывают. Для наглядности снова рассмотрим случай, когда параметры a и b поверхности равны (конус является круговым). Тогда уравнения горизонтальной проекции имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 x_0 + 2ac z_0 \cos v - c^2 x_0 \cos 2v - c^2 y_0 \sin 2v}{a^2 + c^2}, \\ y &= \frac{a^2 y_0 + 2ac z_0 \sin v + c^2 y_0 \cos 2v - c^2 x_0 \sin 2v}{a^2 + c^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты отражаемой точки в пространстве, a – радиус параллели конуса на высоте $\pm c$ (см. рис. 7), v – параметр, меняющийся от 0 до 2π .

Путем проведения несложных преобразований уравнения группы (3) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{c^2}{a^2 + c^2} * 2 \cos v * \left(\frac{az_0}{c} - x_0 \cos v - y_0 \sin v \right), \\ y &= y_0 + \frac{c^2}{a^2 + c^2} * 2 \sin v * \left(\frac{az_0}{c} - x_0 \cos v - y_0 \sin v \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Сравним их с парой уравнений (2). Для удобства сравнения приведем их здесь снова:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2 \cos v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v), \\ y &= y_0 + 2 \sin v * (a - x_0 * \cos v - y_0 * \sin v) \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, уравнения в парах (4) и (5) отличаются между собой лишь двумя коэффициентами, в которые параметр не входит. Следовательно, можно с уверенностью сказать, что проекция результата отражения точки от конуса на плоскость, перпендикулярную его оси – это улитка Паскаля. В добавок точно таким же свойством обладает кривая пересечения произвольных сферы и конуса. Поэтому можно предположить, что уравнение результата отражения точки от конуса, полученное в рамках данной работы, позволит разработать алгоритм математического описания не только проекции, но и самой кривой пересечения произвольной сферы и произвольного конуса в дополнение к уже известным аналитическим методам получения уравнения линии пересечения двух поверхностей [6; 10].

Также интересно сравнить, как отличаются горизонтальные проекции образа исходной точки в случае, когда она находится на оси конуса, и в случае, когда она находится вне его оси.

Для начала обратимся к более простому случаю, когда отражаемая точка принадлежит оси конической поверхности. Сначала рассмотрим этот случай с геометрической точки зрения. На рис. 7 показано построение отражения точки от конуса при помощи стандартного алгоритма, который был описан ранее.

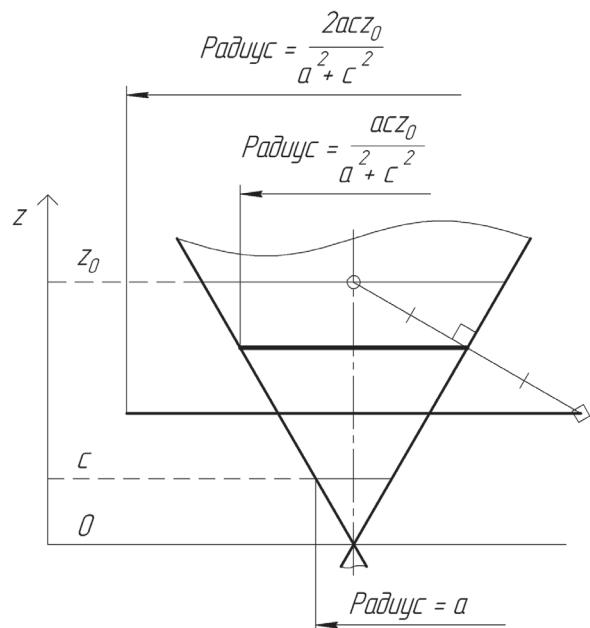


Рис. 7. Геометрическое построение отражения точки от конуса в случае, когда она принадлежит его оси

На данном рисунке исходная точка обозначена окружностью малого радиуса. Ее координата равна z_0 . В нижней части конуса наглядно показана связь между параметрами a и c кругового конуса (параметр b в этом случае такой же, что и a). На рисунке показано построение одной из точек образа (она обозначена небольшим квадратом) во фронтальной плоскости, проходящей через ось конуса. В данном случае оно сводится к построению отражения исходной точки от правой очерковой образующей конуса. При повторении этой операции во всех плоскостях, проходящих через ось конуса, образуется совокупность точек, объединяющихся в единую кривую – окружность. Кроме того, можно выразить радиус этой окружности через параметры зеркала и координату высоты исходной точки. Так, при помощи использования базовых тригонометрических функций и подобия прямоугольных треугольников можно вывести выражение (см. рис. 7) для радиуса параллели конуса, точки которой являются центрами перпендикуляров, один из которых изображен на рис. 7 (на рисунке данная параллель обозначена утолщенной линией). Тогда согласно тому же подобию треугольников, радиус окружности образа будет в два раза больше радиуса обозначенной параллели и будет равен

$$\frac{2acz_0}{a^2 + c^2}.$$

Этот же результат получается при получении отражения математическим способом (рис. 8) в *Wolfram Mathematica* [24]. Стоит отметить, что в этом случае проекция образа совпадает с самим образом, так как он представляет собой окружность, параллельную горизонтальной плоскости.

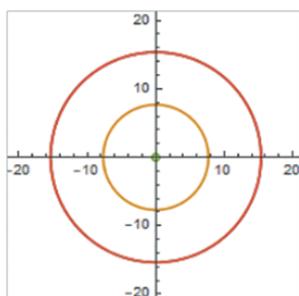


Рис. 8. Горизонтальная проекция результата отражения точки, лежащей на оси конуса, от этого конуса

Если на этом же графике построить образ той же точки, получающийся при ее отражении от выделенной на рис. 7 параллели конуса (на рис. 8 она также построена, на нем она – меньшая из двух окружностей), то результат полностью совпадет с результатом отражения от конуса.

Наконец, обратимся к уравнениям проекции (4) для проверки их соответствия полученному результату.

Так, если в группе уравнений (4) обнулить параметры x_0 и y_0 (учесть условие, что исходная точка находится на оси конуса), то уравнения проекции примут вид:

$$\begin{aligned} x &= 2 * \frac{acz_0}{a^2 + c^2} * \cos v \\ y &= 2 * \frac{acz_0}{a^2 + c^2} * \sin v \end{aligned} . \quad (6)$$

Параметрические уравнения (6) действительно соответствуют окружности с радиусом $\frac{2acz_0}{a^2 + c^2}$. Следовательно, уравнения проекции согласуются с результатами, полученными геометрически.

Можно предположить, что при удалении исходной точки от оси конуса проекция образа, получаемого при ее отражении от конуса, также будет совпадать с результатом отражения точки от проекции обозначенной параллели конуса. Однако, как видно на рис. 9, это не так.

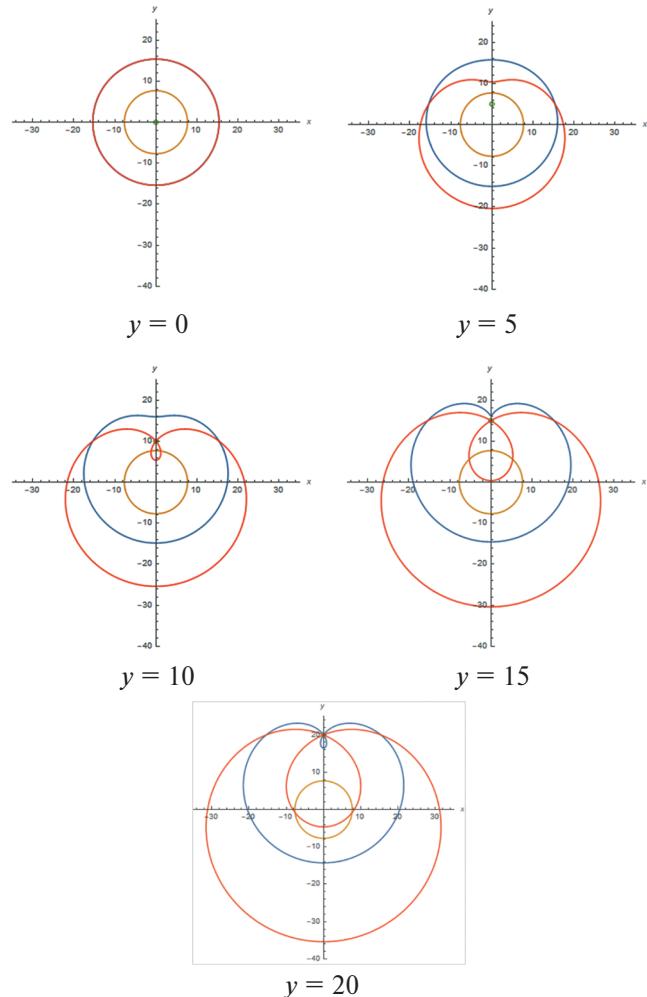


Рис. 9. Изменение проекции отражения при удалении точки от оси конуса (кривая, которая начала при удалении точки смещаться вверх – это горизонтальная проекция результата отражения точки от конуса; другая кривая четвертого порядка – это результат плоского отражения точки от окружности с радиусом, равным)

На рис. 9 большая улитка Паскаля – это результат плоского отражения точки от окружности, расположенной в центре графика. Как видно, проекция результата отражения точки от конуса сдвинулась относительно центра вверх. При этом видно, что улитка, смещающаяся вверх, изменяет свою форму значительно медленнее, чем другая улитка. Причина этого изменения заключается в том, что уравнение проекции результата трехмерного отражения точки от конуса (4) более сложное, чем уравнение результата плоского отражения точки от окружности (5), и оно сильнее зависит от изменения входящих в него коэффициентов. Однако, как было доказано ранее, проекция при этом все равно остается улиткой Паскаля, поэтому в перспективе можно разработать алгоритм, который будет для каждого набора значений коэффициентов строить такую окружность, которая будет являться зеркалом, отражение исходной точки от которого будет описывать получаемую проекцию. Это, в свою очередь, может стать одним из шагов к получению нового способа решения задачи математического описания линии пересечения произвольных сферы и конуса.

Наконец, рассмотрим зависимость изменения проекции результата отражения точки от конуса от изменения параметра с этого конуса (рис. 10).

Случай при $c = 2,25$ является одним из промежуточных и был рассмотрен ранее. Более же интересными являются два крайних случая на рис. 10. Проанализируем каждый из них подробнее.

При малых значениях параметра угол наклона образующих к оси увеличивается и конус начинает стремиться «развернуться» в плоскость (рис. 11).

Тогда результат отражения точки от конуса также начинает стремится к отражению от плоскости – к симметричной точке. Что и видно в случае с $c = 0,3$ на рис. 10 (так как плоскость симметрии в данной проекции будет являться плоскостью уровня, то проекции исходной точки и точки, симметричной ей, будут совпадать).

Теперь снова обратимся к уравнениям проекции (4). При параметре c , стремящемся к нулю, данные уравнения в пределе принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Полученные уравнения полностью соответствуют проекции результата отражения точки от плоскости, перпендикулярной оси OZ .

При больших же значениях параметра с угол наклона образующих конуса к оси уменьшается и конус начинает стремится «вытянуться» в цилиндр с нулевым диаметром (рис. 12).

А если конус стремится к цилиндру, то и результат отражения от него также должен стремиться к ре-

зультату отражения от цилиндра. И действительно, на рис. 10 хорошо видно, что при увеличении параметра с проекция результата отражения начинает все больше сходитья к улитке Паскаля, которая получается при плоском отражении точки от одной из параллелей конуса. А так как конус стремится к цилиндру, то все его параллели стремятся стать одинаковыми, так же, как и результаты отражения от них. То есть все сходится к случаю отражения точки от цилиндра, подробно описанному ранее и изображеному на рис. 3.

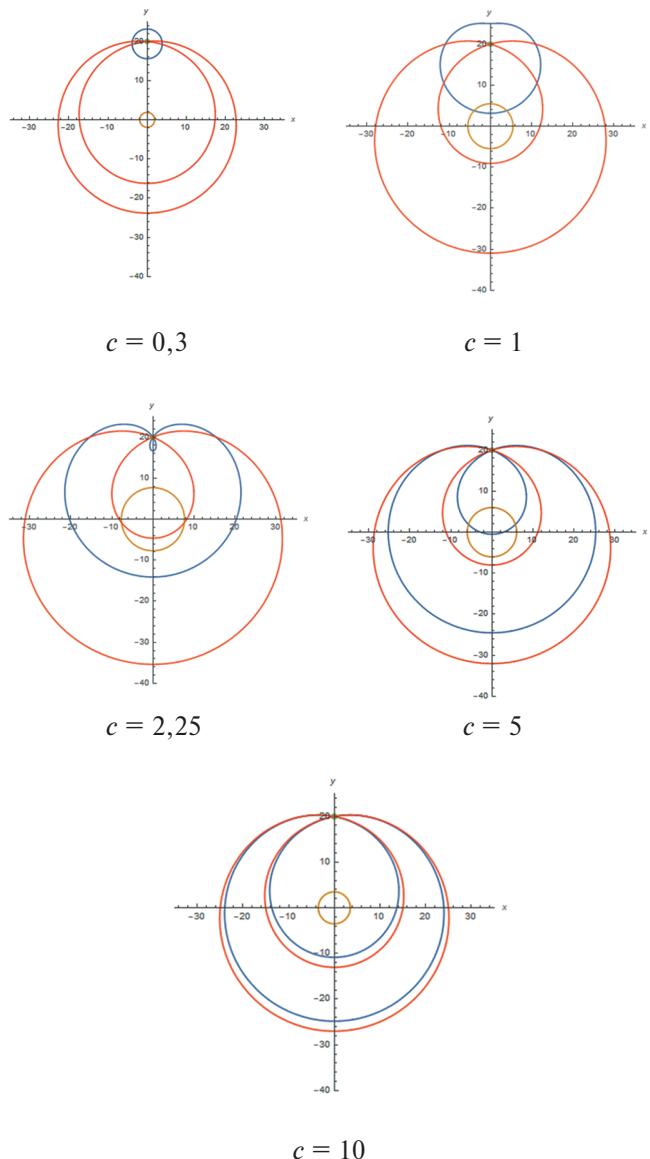
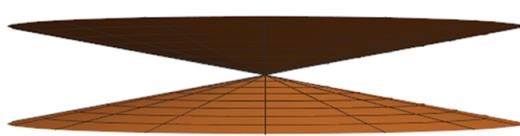


Рис. 10. Изменение проекции результата отражения при увеличении параметра конуса (кривая, которая быстрее увеличивается при увеличении параметра c – это горизонтальная проекция результата отражения точки от конуса; другая кривая четвертого порядка – это результат плоского отражения точки от окружности с радиусом,

$$\text{равным } \frac{acz_0}{a^2 + c^2})$$

Рис. 11. Конус с малым значением параметра c Рис. 12. Конус с большим значением параметра c

При этом уравнения проекции (4) при параметре c , стремящемся к бесконечности, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2 \cos v * (0 - x_0 \cos v - y_0 \sin v) \\ y &= y_0 + 2 \sin v * (0 - x_0 \cos v - y_0 \sin v) \end{aligned} \quad (8)$$

Ноль в уравнениях (8) оставлен специально для того, чтобы показать, что уравнения свелись к уравнениям результата плоского отражения точки от окружности нулевого радиуса. Иными словами, они описывают проекцию кривой, которая получается при отражении точки от цилиндра нулевого диаметра, что полностью соответствует логике и предыдущим результатам.

Стоит добавить, что образ точки при ее отражении от окружности нулевого радиуса действительно существует, и его возможно построить в *Wolfram Mathematica*. Так, для зеркала-окружности с нулевым диаметром и центром в начале координат он показан на рис. 13.

Образ, изображенный на рис. 13, представляет собой не просто окружность с центром в начале координат и проходящую через отражаемую точку. На самом деле это две одинаковые окружности, наклоненные друг на друга. Таким образом, если считать, что точка — это окружность с диаметром, равным нулю, то результат, показанный на рис. 13, можно принять за результат плоского отражения одной точки от другой.

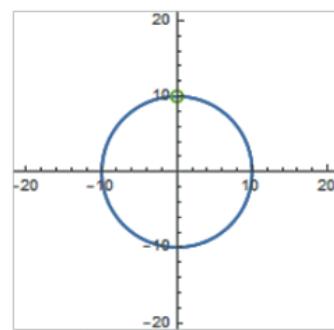


Рис. 13. Отражение точки от окружности нулевого диаметра

Отражение точки от однополостного и двуполостного гиперболоидов

Обратимся к отражениям точек от двух других поверхностей, которые еще более тесно связаны с конусом, чем плоскость и цилиндр — однополостному и двуполостному гиперболоидам. Так, результаты отражения точки от них показаны на рис. 14 и 15 соответственно.

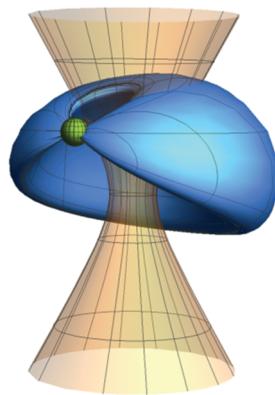


Рис. 14. Отражение точки от однополостного гиперболоида (приложение 3)

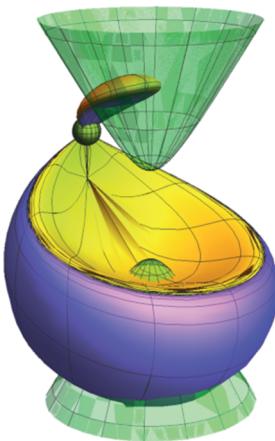


Рис. 15. Отражение точки от двуполостного гиперболоида (приложение 4)

Результаты отражения точки от гиперболоидов, в отличие от предыдущих случаев, двумерные. Иными словами, результатами отражения теперь оказались не кривые, а поверхности. Объясняется это отсутствием у поверхностей-зеркал главного направления с нулевой кривизной. Из-за этого касательные плоскости ни в каких точках зеркала не совпадают, и размерность отражения не уменьшается по сравнению с размерностью зеркала, как это было в случаях с цилиндром и конусом. При этом поверхность, получаемая в результате отражения точки от однополостного гиперболоида (см. рис. 14) единная и замкнутая. А поверхность, получаемая в результате отражения точки от двуполостного гиперболоида (см. рис. 15), как и само зеркало, состоит из двух частей. Однако, несмотря на это, в результате поверхность все равно получается замкнутой, как будто являясь результатом аккуратного склеивания двух компонентов (рис. 16).

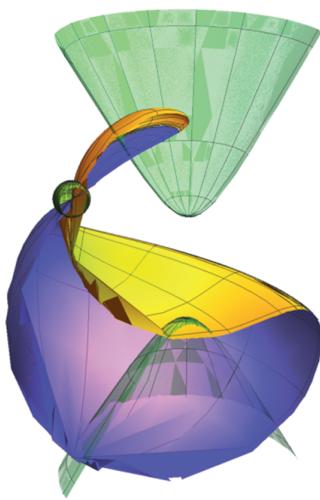


Рис. 16. Отражение точки от двуполостного гиперболоида в разрезе

На рис. 15 и 16 верхняя и нижняя части гиперболоида обозначены разным цветом. Отражения точки от обеих частей так же окрашены в разные цвета.

Рассмотрим полученные отражения подробнее. Графический анализ изображений позволяет сделать вывод о том, что поверхности, полученные при отражении точки от гиперболоидов с одинаковыми параметрами, визуально дополняют друг друга (рис. 17).

Для того чтобы проверить это, поместим обе поверхности на один график (рис. 18).

Данное явление можно объяснить, вернувшись к одному из случаев плоских отражений, рассмотренных ранее в работе [38] – отражению точки от гиперболы (рис. 19).

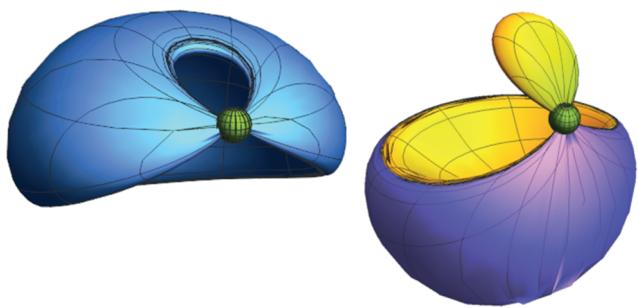


Рис. 17. Отражения точки от однополостного и двуполостного гиперболоидов с одинаковыми параметрами

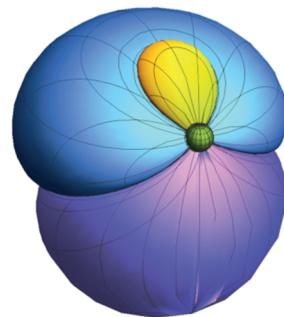


Рис. 18. Результаты отражения точки от однополостного и двуполостного гиперболоидов с одинаковыми параметрами, объединенные на одном графике

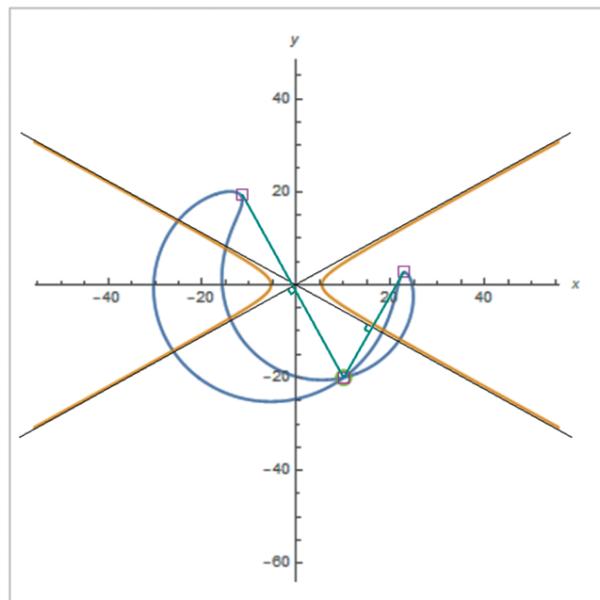


Рис. 19. Отражение точки от гиперболы на плоскости [38]

В этом случае плоская кривая, получаемая в результате отражения точки от ветвей гиперболы, сходится к двум точкам (обозначенным на рис. 19 квадратами). Это объясняется тем, что ветви гиперболы при удалении на бесконечность асимптотически

стремятся к двум прямым. Вследствие этого отражение точки при этом также стремится к отражению от данных прямых. А как было рассмотрено выше на рис. 1, в этом случае отражениями как раз будут точки, обозначенные на рис. 19.

В случае с гиперболоидами все совершенно аналогично. Только гиперболоиды обоих типов асимптотически стремятся не к двум прямым, а к конусу (рис. 20).

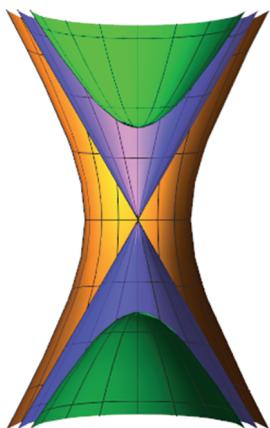


Рис. 20. Однополостный и двуполостный гиперболоиды и их асимптотический конус

И точно так же, как в случае с плоским отражением от гиперболы, отражения от гиперболоидов обоих видов стремятся к отражению от их асимптотического конуса (рис. 21).

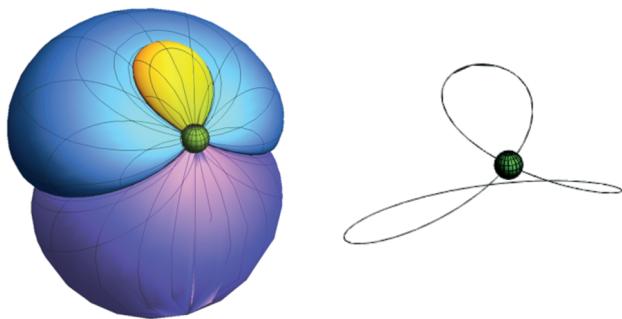


Рис. 21. Совмещенные результаты отражения точки от гиперболоидов вместе с результатом ее отражения от их асимптотического конуса

Таким образом, именно факт того, что отражения и от однополостного, и от двуполостного гиперболоидов стремятся к одной и той же пространственной кривой, позволяет так ровно объединять их в единое целое. Иными словами, кривая пересечения (касания) отражений от гиперболоидов совпадает с отражением от их асимптотического конуса.

Кроме того, фронтальное сечение совмещенных образов при параметрах зеркал и положении отра-

жаемой точки как на рис. 19, полностью соответствует плоскому образу на рис. 19. Оно представлено на рис. 22.

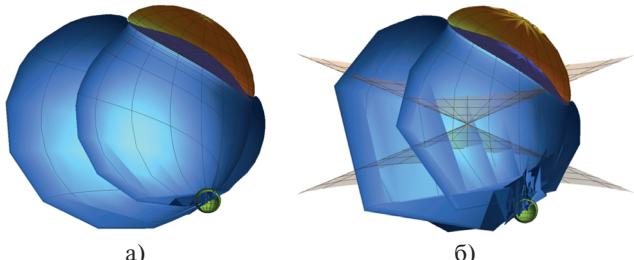


Рис. 22. Совмещенные результаты отражения точки от гиперболоидов в разрезе (а – без асимптотического конуса, б – вместе с асимптотическим конусом (приложение 5) (искажение на рис. 22, б обусловлено особенностями работы программы и не несет никакого геометрического значения))

Так, на рис. 22 видно, что две точки, к которым сходился плоский образ на рис. 19 – это не что иное, как точки кривой-образа точки при ее отражении от асимптотического конуса гиперболоидов. А сам плоский образ – это сечение поверхности-образа точки при ее отражении от однополостного гиперболоида. Сечения же второй поверхности на рис. 19 не видно, так как на нем не показан результат отражения точки от второй пары ветвей гиперболы.

Гипотеза о связи кривизны Гаусса зеркала и размерности отражения

В случаях отражения точки от цилиндра, конуса и гиперболоидов было упомянуто влияние кривизны поверхности на размерность получаемого отражения. При этом там говорилось о наличии или отсутствии у поверхности-зеркала главного направления с нулевой кривизной. Однако существует понятие, которое более точно характеризует поверхность – кривизна Гаусса [4]. В случаях, когда поверхность имеет главное направление с нулевой кривизной, кривизна Гаусса так же равна нулю (у плоскости, цилиндра и конуса), а когда не имеет, то она равна некоторому числу. В этом плане она не дает новой информации. Однако существует еще один важный аспект – знак кривизны Гаусса [6]. Именно он позволяет лучше понять форму поверхности. Так, если кривизна Гаусса у поверхности положительная, то поверхность выглядит выпуклой (двуполостный гиперболоид, сфера, эллиптический параболоид), а если кривизна Гаусса отрицательная, то поверхность выглядит вогнутой (однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид). Кроме того, существуют поверхности, имеющие в одном подмножестве точек положительную гауссову кривизну, во втором подмноже-

стве точек — отрицательную, а в третьем подмножестве точек — нулевую. Характерным примером таких поверхностей является тор.

При этом результат отражения точки от тора выглядит следующим образом (рис. 23).

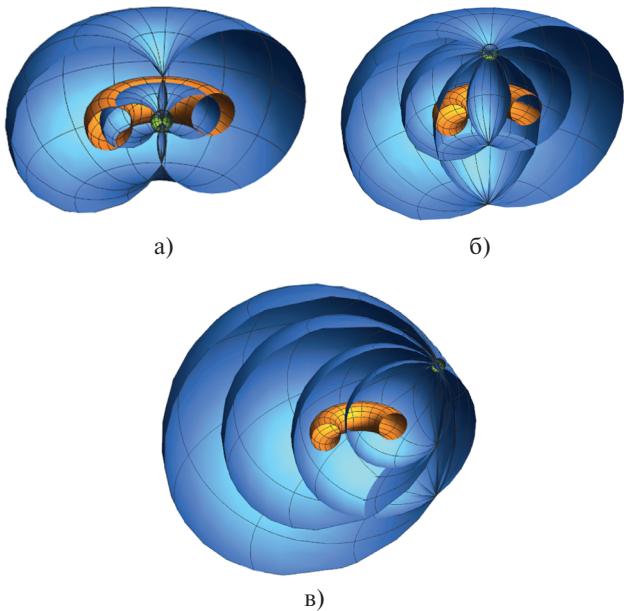


Рис. 23. Отражения точки от тора (а – точка в центре тора, б – точка поднята вверх над центром тора, в – точка смещена в сторону) (приложение 6)

В отличие от отражений, описанных выше, образом точки, отражённой от тора, является поверхность не четвёртого, а восьмого порядка [15; 22]. Следует отметить, что схожие поверхности наблюдаются в исследованиях, посвященных вопросам квазивращения [1; 2; 4; 5].

В перспективе планируется дальнейший анализ связи кривизны Гаусса зеркала и характера получаемого отражения. В частности, еще предстоит выяснить, какое влияние на вид отражения оказывает знак гауссовой кривизны.

Отражение точки от сферы

Снова рассмотрим отражение точки от одной из поверхностей второго порядка — теперь от сферы. Результат отражения представлен на рис. 24.

На рис. 24, б хорошо видно, что в сечении плоскостью, проходящей через центр сферы и отражаемую точку, получается та же кривая, что и при плоском отражении точки от окружности (рис. 4).

Этот факт несложно объяснить. Как видно на рис. 25, сферу можно представить в виде множества окружностей — сечений сферы плоскостями, проходящими через прямую, которая соединяет центр сферы и отражаемую точку.

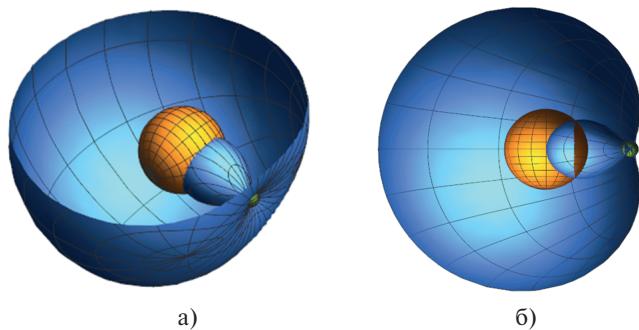


Рис. 24. Отражение точки от сферы (а – вид отражения в разрезе с отступом от центра, б – вид отражения во фронтальном разрезе) (приложение 7)

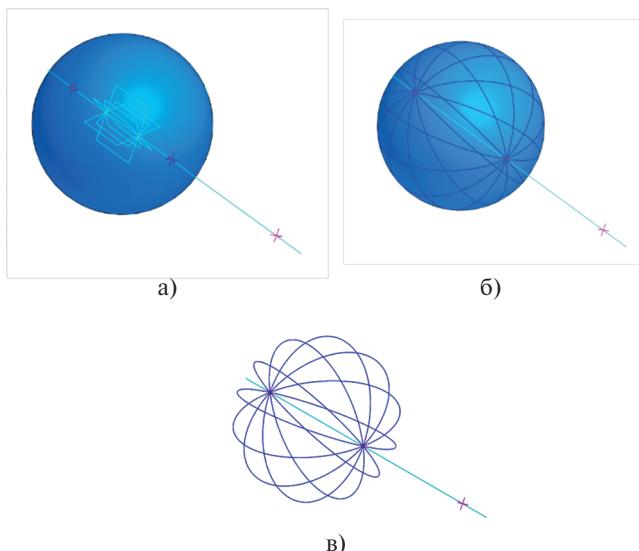


Рис. 25. Разбиение сферы на множество окружностей (а – проведение плоскостей через прямую, соединяющую отражаемую точку и центр сферы, б – пересечение плоскостей со сферой, в – изображение сечений без сферы)

Тогда отражение точки от каждого из сечений сферы будет давать плоскую кривую как на рис. 4, а множество всех таких кривых — поверхность, изображенную на рис. 24.

Отражение точки от некоторых других квадрик

Также были получены отражения точки от двух других поверхностей второго порядка — эллиптического и гиперболического параболоидов (рис. 26, 27).

Анализу данных поверхностей будет посвящено отдельное исследование. Однако уже сейчас можно заметить, что результат отражения от эллиптического параболоида в сечении (рис. 28) выглядит точь-в-точь как плоское отражение точки от параболы (рис. 29).

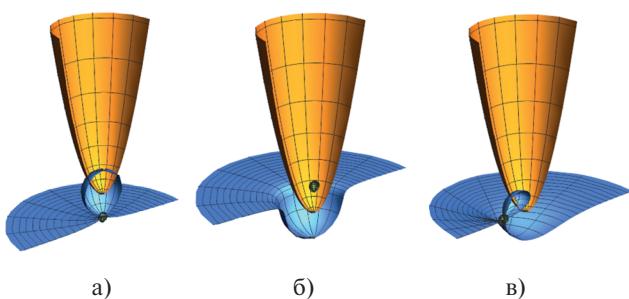


Рис. 26. Отражение точки от эллиптического параболоида (а – точка в центре, вне параболоида, б – точка в центре, внутри параболоида, в – точка смещена от центра, вне параболоида) (приложение 8)

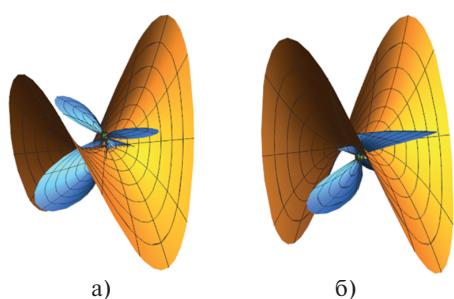


Рис. 27. Отражения точки от гиперболического параболоида (а – точка над параболоидом, б – точка под параболоидом) (приложение 9)

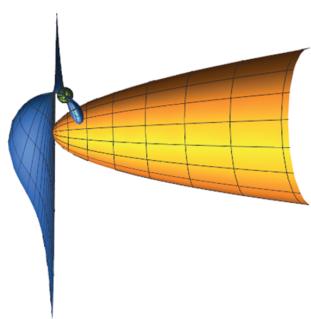


Рис. 28. Отражение точки от эллиптического параболоида во фронтальном разрезе (точка находится в плоскости разреза)

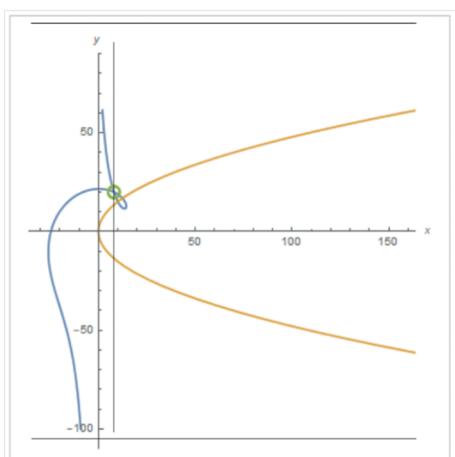


Рис. 29. Отражение точки от параболы на плоскости [38]

Выводы

Результатами исследования стали аналитические выражения точного описания образов, полученных отражением точки от ряда поверхностей. В них учитывается положение точки и геометрия зеркала, определяющие параметры получаемых образов. Сравнение результатов отражений от поверхностей нулевой и ненулевой кривизны Гаусса позволило сформулировать гипотезу: зеркала с Гауссовой кривизной, равной нулю, повышают размерность образа на единицу (образ точки в общем случае – пространственная кривая), а с Гауссовой кривизной, отличной от нуля – размерность образа увеличивается на два относительно размерности прообраза (отражение точки даёт поверхность). Гипотеза подтверждается на рассмотренных примерах квадрик и будет проверяться в дальнейших исследованиях.

Сравнение образов, полученных при отражении от конуса и цилиндра, приводит к выводу о том, что результаты таких отражений при их проецировании на плоскость, перпендикулярную оси зеркал, являются улитками Паскаля (за исключением предельных случаев), как и при плоском отражении точки от окружности. Также сравнение образов, полученных отражением от гиперболоидов вращения и их асимптотического конуса позволило выявить интересную взаимосвязь: образы одной точки при её отражении от однополостного и двуполостного гиперболоидов касаются по кривой, представляющей собой образ той же точки, полученной отражением от их асимптотического конуса.

Результаты отражений точек от прочих квадрик дало предсказуемые результаты, визуально схожие с образами точки, отражённой от плоских гиперболы и окружности. Их более детальному анализу будут посвящены дальнейшие исследования.

Все рассмотренные образы, полученные с использованием зеркал второго порядка, представляют собой поверхности порядка не выше четвёртого. Результатом отражения точки от тора (поверхность четвёртого порядка) стали поверхности 8-го порядка. Таким образом, порядок результата отражения точки от зеркала оказывается максимум вдвое выше порядка самого зеркала.

В качестве перспектив настоящей работы можно выделить уточнение и систематизацию уже полученных результатов, исследование отражений точек от других поверхностей и отражений объектов ненулевой размерности в трёхмерном пространстве, а также решение обратной задачи – построение зеркала и/или отражаемого объекта при наличии отражения – которое может позволить создать механизм сведения более сложных геометрических объектов к более простым, основанный на математических механизмах [7; 9; 12; 14; 23; 25–27; 29; 31; 39; 40; 42]. Возможным направлением может послужить применение механизма отражений для построения изображений [16; 32; 37].

Литература

1. Антонова И.В. Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях [Текст] / И.В. Антонова, И.А. Беглов, Е.В. Соломонова // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 3. — С. 36–50. — DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840.
2. Антонова И.В. Математическое описание частного случая квазивращения фокуса эллипса вокруг эллиптической оси [Текст] / И.В. Антонова, Е.В. Соломонова, Н.С. Кадыкова // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 39–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-39–45.
3. Артюхина Н.К. Основы компьютерного моделирования оптических систем различных классов: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-38 01 02 / Н.К. Артюхина. — Минск: Изд-во БНТУ, 2016. — 182 с.
4. Беглов И.А. Математическое описание метода вращения точки вокруг криволинейной оси второго порядка [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян, И.В. Антонова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 39–46. — DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268.
5. Беглов И.А. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 3. — С. 45–50. — DOI: 10.12737/article_59bfa4eb0bf488.99866490.
6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник [Текст] / Д.В. Беклемишев — 13-е изд., испр. — СПб.: Лань, 2015. — 448 с.
7. Белов О.А. Анализ результатов ультразвукового контроля корпуса рыбопромыслового судна [Текст] / О.А. Белов // Техническая эксплуатация водного транспорта: проблемы и пути развития. — 2022. — № 5. — С. 5–9.
8. Белоус Ю.В. Исследование влияния цилиндрических границ на поле параметрической антенны и разработка способа восстановления формы отражающей поверхности [Текст]: автоореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.06 / Ю.В. Белоус. — Таганрог, 2002. — 152 с.
9. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения [Текст] / В.И. Бердышев, Л.В. Петрак. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. — 295 с.
10. Блинова И.В. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах [Текст] / И.В. Блинова, И.Ю. Попов — СПб.: Изд-во Университета ИТМО, 2017. — 55 с.
11. Бугров Я.С. Высшая математика [Текст] В 3 т. Т. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — М.: Дрофа, 2004. — 288 с.
12. Бугров Я.С. Высшая математика [Текст]. В 3 т. Т. 2: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М.: Издательство Юрайт, 2023. — 281 с.
13. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия [Текст]. В 5 т. Т. 3: Координаты — Одночлен / И.М. Виноградов — М.: Сов. Энциклопедия, 1982. — 592 с.
14. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел) [Текст]: учебник для вузов / И.М. Виноградов. — М.: Высшая школа, 1999. — 511 с.
15. Волошинов Д.В. Алгоритмический комплекс для решения задач с квадриками с применением мнимых геометрических образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 2. — С. 3–32. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-3.
16. Гирш А.Г. Новые задачи начертательной геометрии. Продолжение [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10.
17. Гирш А.Г. Операция пересечения на комплексной плоскости [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 20–28. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-20–28.
18. Гирш А.Г. Построение сферы по мнимым точкам [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 3. — С. 3–11. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-3-11.
19. Жихарев Л.А. Отражение от криволинейных зеркал в плоскости / Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 46–54. — DOI 10.12737/article_5c9203adb22641.01479568.
20. Жихарев Л.А. Плоские отражения от кривых / Л.А. Жихарев, Ю.С. Карпова // Журнал естественнонаучных исследований. — 2020. — Т. 5. — № 4. — С. 52–58.
21. Зиновьев А.П. Моделирование оптических систем в программном пакете "Resonator Studio" и их экспериментальная реализация / А.П. Зиновьев, М.В. Кольцов, О.В. Мартынова // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2012. — Т. 55. — № 12. — С. 780–788.
22. Иващенко А.В. Общий анализ формы линии пересечения двух однотипных поверхностей второго порядка [Текст] / А.В. Иващенко, Д.А. Ваванов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 4. — С. 24–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-24–34.
23. Игнатьев С.А. Визуализация задач начертательной геометрии посредством Wolfram Mathematica [Текст] / С.А. Игнатьев, А.И. Фоломкин, Э.Х. Муратбакеев // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 4. — С. 74–84. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-74–84.
24. Игнатьев С.А. Функциональные возможности среды Wolfram Mathematica для визуализации кривых линий и поверхностей [Текст] / С.А. Игнатьев, А.И. Фоломкин, Э.Х. Муратбакеев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 29–38. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-29–38.

25. Конопацкий Е.В. Моделирование аппроксимирующего 16-точечного отсека поверхности отклика применительно к решению неоднородного уравнения теплопроводности [Текст] / Е.В. Конопацкий // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 2. — С. 39–46. — DOI: 10.12737/article_5d2c1a551a22c5.12136357.
26. Конопацкий Е.В. Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования [Текст] / Е.В. Конопацкий, А.А. Бездитный // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 11–21. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21.
27. Короткий В.А. Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами [Текст] / В.А. Короткий, И.Г. Витовтов // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 10. — № 1. — С. 3–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19.
28. Короткий В.А. Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами [Текст] / В.А. Короткий, А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 19–30. — DOI: 10.12737/22840.
29. Короткий В.А. Конструирование G2-гладкой составной кривой на основе кубических сегментов Безье [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 12–28. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-12-28.
30. Короткий В.А. Кубические кривые в инженерной геометрии [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 3. — С. 3–24. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24.
31. Кулизина О.В. Применение ультразвука для неразрушающего контроля напряжений в судостроительных стальах [Текст] / О.В. Кулизина, Н.Е. Никитина // Научные проблемы водного транспорта. — 2010. — № 28. — С. 164–168.
32. Лепаров М.Н. О геометрии, еще один раз [Текст] / М.Н. Лепаров // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 3–13. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13.
33. Мичуров А.В. Расчет влияния на акустическое поле преломлений и отражений на криволинейных поверхностях оболочек вращения [Текст] / А.В. Мичуров, А.В. Соколкин // Дефектоскопия. — 2020. — № 1. — С. 31–43.
34. Муслимов Э.Р. Комплексное использование методов анализа связанных волн и трассировки лучей при проектировании спектрографов с объемно-фазовыми дифракционными решетками [Текст] / Э.Р. Муслимов, Н.К. Павлычева // HOLOEXPO 2019: Тезисы докладов XVI международной конференции по голограммии и прикладным оптическим технологиям, Санкт-Петербург, 10–12 сентября 2019 года. — СПб.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2019. — С. 365–373.
35. Притыкин Ф.Н. Метод задания положений узловых точек, определяющих конверты теней при различных направлениях солнечных лучей и углах поворота зданий [Текст] / Ф.Н. Притыкин, Е.А. Курышева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. — 2019. — Т. 19. — № 3. — С. 37–44.
36. Тодоров Н.Ф. Моделирование и исследование аурализации при распространении волн [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.06 / Н.Ф. Тодоров. — Ростов н/Д, 2014. — 162 с.
37. Сальков Н.А. Об изображениях [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-3-10.
38. Сунцов О.С. Исследование отражения от криволинейных зеркал на плоскости в программе Wolfram Mathematica / О.С. Сунцов, Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 29–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45.
39. Сычева А.А. Функционально-воксельное моделирование кривых Безье [Текст] / А.А. Сычева // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 63–72. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-63-72.
40. Тутова А.Ю. Ультразвук в медицине [Текст] / А.Ю. Тутова, М.Г. Перепелкина // Вестник науки. — 2020. — Т. 3. — № 1. — С. 206–208.
41. Хейфец А.Л. Влияние даты расчета продолжительности инсолиции на параметры уплотненной застройки [Текст] / А.Л. Хейфец // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. — 2019. — Т. 19. — № 3. — С. 61–70.
42. Bergmann U. High-resolution X-ray imaging based on curved Bragg mirrors: first results [Text] / U. Bergmann // IEEE Transactions on Nuclear Science. 2003. V. 50. I. 1, pp. 140–145.
43. Miguel A.L. Real-time 3D visualization of accurate specular reflections in curved mirrors a GPU implementation [Text] / A.L. Miguel, A.C. Nogueira, N. Goncalves // 2014 International Conference on Computer Graphics Theory and Applications (GRAPP). IEEE, 2014, pp. 1–8.
44. Minato A. Optical design of cube-corner retroreflectors having curved mirror surfaces [Text] / A. Minato, N. Sugimoto, Y. Sasano // Applied optics. 1992. V. 31. I. 28, pp. 6015–6020.
45. Ofek E. Interactive reflections on curved objects [Text] / E. Ofek, A. Rappoport // Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 1998, pp. 333–342.
46. Savarese S. Local shape from mirror reflections [Text] / S. Savarese, M. Chen, P. Perona // International Journal of Computer Vision. 2005. V. 64, pp. 31–67.

References

1. Antonova I.V., Beglov I.A., Solomonova E.V. Matematicheskoe opisanie vrashcheniya tochki vokrug ellipticheskoy osi

- v nekotoryh chastnyh sluchayah [Mathematical description of the rotation of a point around an elliptic axis in some special cases]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019, V. 7, I. 3, pp. 36–50. DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840. (in Russian)
2. Antonova I.V., Solomonova E.V., Kadykova N.S. Matematicheskoe opisanie chasnogo sluchaya kvazivrashcheniya fokusa ellipsa vokrug ellipticheskoy osi [Mathematical description of a special case of quasi-rotation of the focus of an ellipse around an elliptic axis]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 1, pp. 39–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-39-45. (in Russian)
 3. Artyuhina N.K. *Osnovy kompyuternogo modelirovaniya opticheskikh sistem razlichnyh klassov: uchebno-metodicheskoe posobie dlya studentov special'nosti 1-38 01 02* [Fundamentals of computer modeling of optical systems of various classes: an educational and methodological guide for students of the specialty 1-38 01 02]. Minsk, BNTU Publ., 2016. 182 p. (in Russian)
 4. Beglov I.A., Rustamyan V.V., Antonova I.V. Matematicheskoe opisanie metoda vrashcheniya tochki vokrug krivolinejnoj osi vtorogo poryadka [Mathematical interpretation for a method of rotation of a point around a second order curved axis]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 4, pp. 39–46. DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268. (in Russian)
 5. Beglov I.A., Rustamyan V.V. Metod vrashcheniya geometricheskikh ob'ektov vokrug krivolinejnoj osi [Method of rotation of geometrical objects around the curvilinear axis]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2017, V. 5, I. 3, pp. 45–50. DOI: 10.12737/article_59bfa4eb-0bf488.99866490. (in Russian)
 6. Beklemishev D.V. *Kurs analiticheskoy geometrii i linejnoj algebry: Uchebnik* [Course of analytical geometry and linear algebra: Textbook]. 13th ed., rev. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015. 448 p. (in Russian)
 7. Belov O.A. Analiz rezul'tatov ul'trazvukovogo kontrolya korpusa rybopromyslovogo sudna [Analysis of the results of ultrasonic inspection of the hull of a fishing vessel]. *Tekhnicheskaya ekspluataciya vodnogo transporta: problemy i puti razvitiya* [Technical operation of water transport: problems and ways of development]. 2022, I. 5, pp. 5–9.
 8. Belous Yu.V. *Issledovanie vliyaniya cilindricheskikh granic na pole parametricheskoy antenny i razrabotka sposoba vostanovleniya formy otrazhayushchey poverhnosti. Kand. Diss. 01.04.06* [Investigation of the influence of cylindrical boundaries on the field of a parametric antenna and the development of a method for restoring the shape of the reflecting surface. Cand. Diss. 01.04.06]. Taganrog, 2002. 152 p. (in Russian)
 9. Berdyshev V.I., Petrak L.V. *Approximaciya funkciy, szhatie chislennoj informacii, prilozheniya* [Approximation of functions, compression of numerical information, applications] Ekaterinburg, UrO ran Publ, 1999. 295 p. (in Russian)
 10. Blinova I.V., Popov I.Yu. *Krivye, zadannye parametricheski v polyarnyh koordinatah* [Curves defined parametrically and in polar coordinates]. Saint-Petersburg, Universitet ITMO Publ., 2017. 55 p. (in Russian)
 11. Bugrov Ya.S., Nikol'skij S.M. *Vysshaya matematika. Elementy linejnoj algebry i analiticheskoy geometrii* [Higher Mathematics. Elements of linear algebra and analytical geometry]. Moscow, Drofa Publ, 2004. 288 p. (in Russian)
 12. Bugrov YA.S., Nikol'skij S.M. *Vysshaya matematika v 3 t. V. 2. Elementy linejnoj algebry i analiticheskoy geometrii: uchebnik dlya vuzov* [Higher Mathematics in 3 vols. 2. Elements of linear algebra and analytical geometry: textbook for universities]. 7-e izd., ster. Moskva: Izdatel'stvo YUrajt Publ, 2023. 281 p. (in Russian)
 13. Vinogradov I.M. *Matematicheskaya enciklopediya. Koordinaty Odnochlen* [Mathematical Encyclopedia. Coordinates-Monomial]. Moscow, Sov. encikl. Publ, 1982. V. 3, 592 p. (in Russian)
 14. Vinogradov I.M. *Elementy vysshej matematiki. (Analiticheskaya geometriya. Differential'noe ischislenie. Osnovy teorii chisel). Ucheb. dlya vuzov* [Elements of higher mathematics. (Analytical geometry. Differential calculus. Fundamentals of number theory). Studies for universities]. Moscow, Vyssh. shk. Publ, 1999. 511 p. (in Russian)
 15. Voloshinov D.V. Algoritmicheskij kompleks dlya resheniya zadach s kvadrikami s primeneniem mnimykh geometricheskikh obrazov [Algorithmic complex for solving of problems with quadrics using imaginary geometric images]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 2, pp. 3–32. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32. (in Russian)
 16. Girsh A.G. Novye zadachi nachertatel'noj geometrii. Prodolzhenie [New problems of descriptive geometry. Continuation]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 4, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10. (in Russian)
 17. Girsh A.G. Operaciya peresecheniya na kompleksnoj ploskosti [Intersection operations on a complex plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 1, pp. 20–28. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-20-28. (in Russian)
 18. Girsh A.G. Postroenie sfery po mnimym tochкам [Constructing a sphere by imaginary points]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 3, pp. 3–11. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-3-11. (in Russian)
 19. Zhiharev L.A. Otrazhenie ot krivolinejnyh zerkal v ploskosti [Reflection from curved mirrors in a plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2019, V. 7, I. 1, pp. 46–54. DOI: 10.12737/article_5c9203adb22641.01479568 (in Russian)
 20. Zhiharev L.A., Karpova Yu.S. Ploskie otrazheniya ot krivyh [Flat reflections from curves]. *Zhurnal estestvenno-nauchnyh issledovanij* [Journal of Natural Science Research]. 2020, V. 5, I. 4, pp. 52–58. (in Russian)
 21. Zinov'ev A.P. Kol'cov M.V., Martynova O.V. Modelirovaniye opticheskikh sistem v programmnom pakete «Resonator Studio» i ih eksperimental'naya realizaciya [Modeling of optical systems in the Resonator Studio software package and their

- experimental implementation]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Radiofizika* [News of higher educational institutions. Radiophysics]. 2012, V. 55, I. 12, pp. 780–788. (in Russian)
22. Ivashchenko A.V., Vavanov D.A. Obshchij analiz formy lini i peresecheniya dvuh odnotipnyh poverhnostej vtorogo poryadka [General analysis of the shape of two similar second-order surfaces' intersection line]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 4, pp. 24–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-24-34. (in Russian)
 23. Ignat'ev S.A., Folomkin A.I., Muratbakeev E.H. Vizualizaciya zadach nachertatel'noj geometrii posredstvom Wolfram Mathematica [Descriptive geometry problems visualization by Wolfram Mathematica]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 4, pp. 74–84. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-74-84. (in Russian)
 24. Ignat'ev S.A., Folomkin A.I., Muratbakeev E.H. Funkcional'nye vozmozhnosti sredy Wolfram Mathematica dlya vizualizacii krivyh linij i poverhnostej [Wolfram Mathematica functional possibilities for curved lines and surfaces visualization]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, V. 1, pp. 29–38. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-29-38. (in Russian)
 25. Konopackij E.V. Modelirovanie approksimiruyushchego 16-tochechnogo otseka poverhnosti otklika primenitel'no k resheniyu neodnorodnogo uravneniya teploprovodnosti [Modeling approximating the 16-point compartment the response surface with respect to the solution of the inhomogeneous heat equation]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2019, V. 7, I. 2, pp. 39–46. DOI: 10.12737/article_5d2c1a551a22c5.12136357. (in Russian)
 26. Konopackij E.V., Bezditnj A.A. Tochechnye instrumenty geometricheskogo modelirovaniya, invariantnye otnositel'no parallel'nogo proecirovaniya [Point-based geometric modeling tools that are invariant with respect to parallel projection]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 4, pp. 11–21. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21. (in Russian)
 27. Korotkij V.A., Vitovtov I. G. Approksimatsiya fizicheskogo splajna s bol'shimi progibami [Approximation of a physical spline with large deflections]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 1, pp. 3–19. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19. (in Russian)
 28. Korotkij V.A., Girsh A.G. Graficheskie algoritmy rekonstrukcii krivoj vtorogo poryadka, zadannoj mnimymi elementami [Graphic reconstruction algorithms of the second-order curve, given by the imaginary elements]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 4, pp. 19–30. DOI: 10.12737/22840. (in Russian)
 29. Korotkij V.A. Konstruirovaniye G2-gladkoj sostavnogo krivoj na osnove kubicheskikh segmentov Bez'e [Construction of a G2-smooth composite curve based on cubic Bezier segments]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 2, pp. 12–28. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-12-28. (in Russian)
 30. Korotkij V.A. Kubicheskie krivye v inzhenernoj geometrii [Cubic curves in engineering geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2020, V. 8, I. 3, pp. 3–24. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24. (in Russian)
 31. Kulizina O.V. Nikitina N.E. Primenenie ul'trazvuka dlya nerazrushayushchego kontrolya napryazhenij v sudostroitel'nyh stalyah [Application of ultrasound for non-destructive stress testing in shipbuilding steels]. *Nauchnye problemy vodnogo transporta* [Scientific problems of water transport]. 2010, I. 28, pp. 164–168. (in Russian)
 32. Leparov M.N. O geometrii, eshche odin raz [About geometry, one more time]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 1, pp. 3–13. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-3-13. (in Russian)
 33. Michurov A.V., Sokolkin A.V. Raschet vliyanija na akusticheskoe pole prelomlenij i otrazhenij na krivolineznyh poverhnostyah obolochek vrashcheniya [Calculation of the influence of refractions and reflections on curved surfaces of shells of rotation on the acoustic field]. *Defektoskopiya* [Flaw detection]. 2020, I. 1, pp. 31–43. (in Russian)
 34. Muslimov E.R., Pavlycheva N.K. Kompleksnoe ispol'zovanie metodov analiza svyazannyh voln i trassirovki luchej pri proektirovaniyu spektrografov s ob'emno-fazovymi difrakcionnymi reshetkami [Integrated use of coupled wave analysis and ray tracing methods in the design of spectrographs with volume-phase diffraction gratings]. *HOLOEXPO 2019: Tezisy dokladov XVI mezdunarodnoj konferencii po golografi i prikladnym opticheskim tekhnologiyam, Sankt-Peterburg, 10–12 sentyabrya 2019 goda* [Abstracts of the XVI International Conference on Holography and Applied Optical Technologies, St. Petersburg, September 10–12, 2019]. St. Peterburg: Moskovskij gosudarstvennyj tehnicheskij universitet imeni N.E. Baumana (nacional'nyj issledovatel'skij universitet). 2019, pp. 365–373. (in Russian)
 35. Pritykin F.N., Kurysheva E.A. Metod zadaniya polozhenij uzlyovyh tochek, opredelyayushchih konverty tenej pri razlichnyh napravleniyah solnechnyh luchej i ugla poverota zdanij [A method for setting the positions of nodal points that determine the envelopes of shadows in different directions of sunlight and angles of rotation of buildings]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Construction and Architecture]. 2019, V. 19, I. 3, pp. 37–44. (in Russian)
 36. Todorov N.F. Modelirovanie i issledovanie auralizacii pri rasprostranenii voln. Kand. Diss. 01.04.06 [Modeling and research of auralization during wave propagation. Cand. Diss. 01.04.06]. Rostov-on-Don, 2014. 162 pp.
 37. Sal'kov N.A. Ob izobrazheniyah [About Images]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 2, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-3-10. (in Russian)
 38. Suncov O.S., Zhiharev L.A. Issledovanie otrazheniya ot krivolineznyh zerkal na ploskosti v programme Wolfram Mathematica [Investigation of reflection from curved mirrors on a plane in the Wolfram Mathematica program]. *Geometriya i*

- grafika* [Geometry and graphics]. 2021, V. 9, I. 2, pp. 29–45. DOI 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45. (in Russian)
39. Sycheva A.A. Funkcional'no-voksel'noe modelirovaniye krivykh Bez'e [Functional voxel modeling of Bezier curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 4, pp. 63–72. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-63-72. (in Russian)
40. Tutova, A.YU. Perepelkina M.G. Ul'trazvuk v medicine [Ultrasound in medicine]. *Vestnik nauki* [Bulletin of Science]. 2020, V. 3, I. 1, pp. 206–208. (in Russian)
41. Hejfec A.L. Vliyanie daty rascheta prodolzhitel'nosti insolyacii na parametry uplotnennoj zastrojki [The influence of the date of calculation of the duration of insulation on the parameters of the compacted building]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Construction and architecture]. 2019, V. 19, I. 3, pp. 61–70.
42. Bergmann U. High-resolution X-ray imaging based on curved Bragg mirrors: first results. *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2003, V. 50, I. 1, pp. 140–145.
43. Miguel A.L., Nogueira A.C., Goncalves N. Real-time 3D visualization of accurate specular reflections in curved mirrors a GPU implementation. 2014 International Conference on Computer Graphics Theory and Applications (GRAPP). IEEE, 2014, pp. 1–8.
44. Minato A., Sugimoto N., Sasano Y. Optical design of cube-corner retroreflectors having curved mirror surfaces. *Applied optics*. 1992., V. 31, I. 28, pp. 6015–6020.
45. Ofek E., Rappoport A. Interactive reflections on curved objects. Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 1998, pp. 333–342.
46. Savarese S., Chen M., Perona P. Local shape from mirror reflections. *International Journal of Computer Vision*. 2005, V. 6, pp. 31–67.

Приложение

Коды отражений точки от поверхностей и кривых, для использования в Wolfram Mathematica описанные в данной статье расположены в сети Интернет по адресу: <https://docs.google.com/document/d/1QvFx3pCxrH2EbDQ7qODEvEGiixFgFhOm0hzQH043s/edit?usp=sharing>

QR код:

