Инверсия окружностей Вилларсо

Villarceau circles inversion

Рустамян В.В.
Преподаватель, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва
e-mail: slawwwa21@yandex.ru

Rustamyan V.V.
Lecturer, MIREA — Russian Technological University, Moscow
e-mail: slawwwa21@yandex.ru

Ефремов А.В.
Старший преподаватель, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва
e-mail: izubr99@mail.ru

Efremov A.V.
Senior Lecturer, MIREA — Russian Technological University, Moscow

Аннотация
В статье описывается геометрический алгоритм построения тора при инверсии открытой эллиптической циклиды Дюпена. Описывается алгоритм нахождения параметров инверсии, при которых геометрическое преобразование приводит к получению тора, а также рассматриваются свойства окружностей Вилларсо в исходном и инверсном образах.
Ключевые слова: геометрические преобразования, преобразование инверсии, циклида Дюпена, тор, окружности Вилларсо, начертательная геометрия.

Abstract
The article describes a geometric algorithm for constructing a torus with the inversion of an open elliptical Dupin cyclide. An algorithm for finding the inversion parameters at which a geometric transformation leads to a torus is described, and the properties of Villarceau circles in the original and inverse images are considered.
Keywords: geometric transformations, inversion transformation, Dupin's cyclide, torus, Villarceau circles, descriptive geometryю

Введение

Геометрические преобразования [2, 5] являются важным инструментом в различных областях науки и техники, позволяющим изучать и описывать свойства объектов и явлений в пространстве.

Преобразование инверсии находит широкое применение в оптике, где оно используется для описания изображений, создаваемых зеркалами и линзами. Например, если мы рассматриваем изображение предмета, создаваемое сферическим зеркалом, то это изображение является инвертированным относительно центра зеркала. Для применения инверсии в решении практических задач в пространстве R^3 создаются программные продукты [3, 10].

Известно, что циклиду Дюпена можно получить инверсией самой циклиды Дюпена и тора. Тор, по сути, есть частный случай циклиды. Свойства циклид Дюпена достаточно полно описаны в источниках [6-9]. В этой статье решается обратная задача инверсии. Требуется найти параметры преобразования (центр и сфера инверсии), при которых из циклиды Дюпена получится тор. Рассматривается возможность получения открытого тора. Также в полученной инверсии требуется установить соответствие окружностей Вилларсо на циклиде Дюпена и торе.

Постановка задачи

1. Найти геометрический алгоритм нахождения параметров инверсного преобразования открытой циклиды Дюпена в открытый тор.
2. В системе преобразования инверсии тор-циклида установить инверсное соответствие окружностей Вилларсо.

Теория

В источнике [1] приведен метод поиска и доказательство теорем, позволяющие найти центр и радиус окружности инверсии, которая преобразует две окружности, не имеющие общих точек, в простейший эллиптический пучок [11], т.е. концентрические окружности. На рис. 1 приведено построение окружности инверсии для подобного случая. Рассмотрим этапы построения искомой окружности инверсии.

1. Для окружностей K_1 и K_2 находится точка S - точка пресечения линии центров $O_1 O_2$ с радикальной ось l. Для построения радикальной оси двух непересекающихся окружностей строятся касательные прямые к данным окружностям. Выполняется поиск середин отрезков H_1 и H_2 для отрезков PQ и RT, опирающихся на точки касания.
2. Через точку S проводятся касательные SM_1 и SM_2 к заданным окружностям K_1 и K_2. Так как точку S принадлежит радикальной оси окружностей, то окружность радиусом SM_1 является ортогональной к заданным. Данная окружность задает на линии центров $O_1\, O_2$ точки A и B.
3. Искомая инверсия определяется центром инверсии, коим может являться любая точка A или B, и радиусом инверсии равным отрезку AB. Окружность F на рисунке 1 является окружностью инверсии с центром в точке B. В этом случае центр простейшего эллиптического пучка будет находиться в точке A.

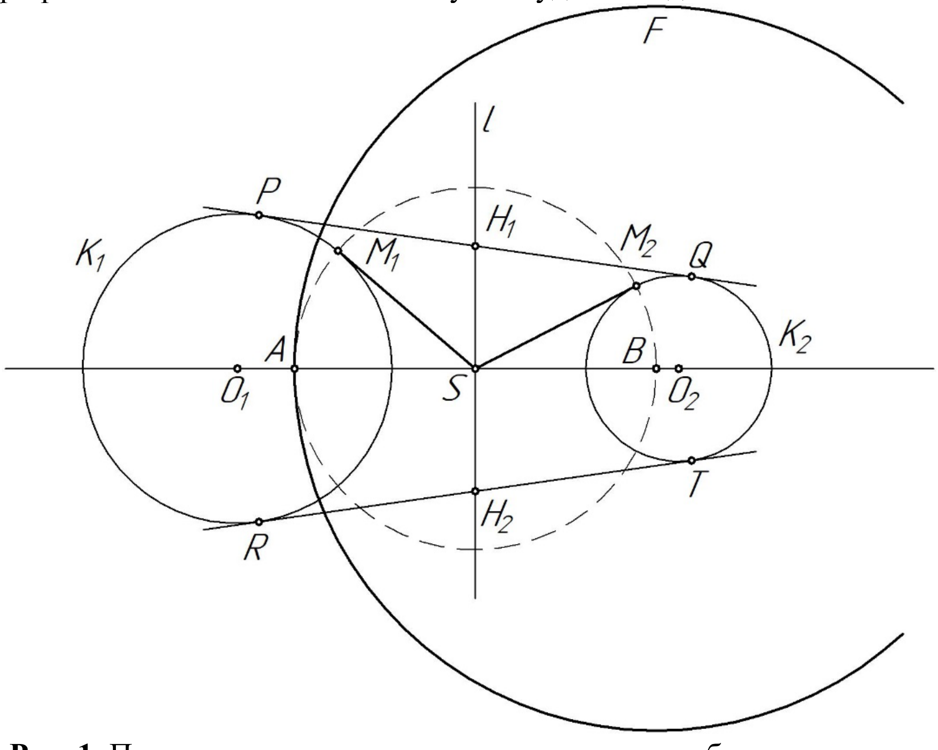

Рис. 1. Построение окружности инверсии для преобразования двух непересекающихся окружностей в простейший эллиптический пучок

Для построения тора соответствующего заданной циклиде Дюпена требуется найти сферу инверсии для экваториальной N_2 и горловой N_1 окружностей, преобразующую последние в концентрические окружности (рис. 2). Горловая окружность открытого эллиптической циклиды находится внутри экваториальной. Изменим систему, состоящую из окружностей N_1, N_2, K_1 и K_2, таким образом, чтобы все окружности находились в одной плоскости. Для этого осуществляем поворот плоскости xy вокруг оси x на 90°. В перспективе решения задач в пространстве R^3 для инверсии циклиды относительно сферы приведенное действие не повлияет на результат, но позволяет решать подзадачу в пространстве R^2.

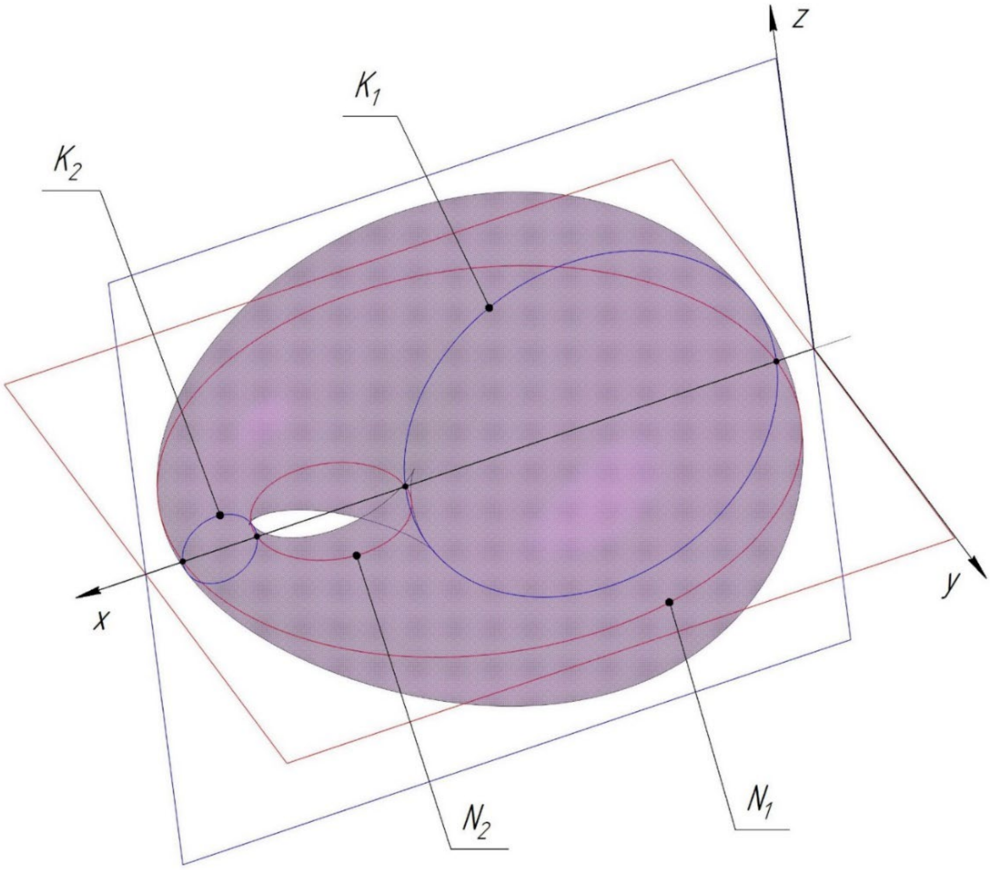

Рис. 2. Отрытая эллиптическая циклида Дюпена

При взаимном расположении окружностей N_1 и N_2 (рис. 3) для поиска радикальной оси в источнике [4] приводится доказательство теоремы, которая утверждает, что центром окружности перпендикулярной к N_1 и N_2 есть центр гомотетии окружностей K_1 и K_2.

На рис. 3 строится касательная PQ к окружностям K_1 и K_2. Находится центр гомотетии S, как пресечение PQ и $O_1 O_2$. Окружность с центром S и радиусом SM_1 задет на линии центров $O_1 O_2$ две точки, одна из которых точка A. Для центра инверсии выбрать можно любую. В данном случае взята противоположная точке A точка (на рис. 3 не указана) и строится окружность инверсии F радиусом $2 \times SA$.

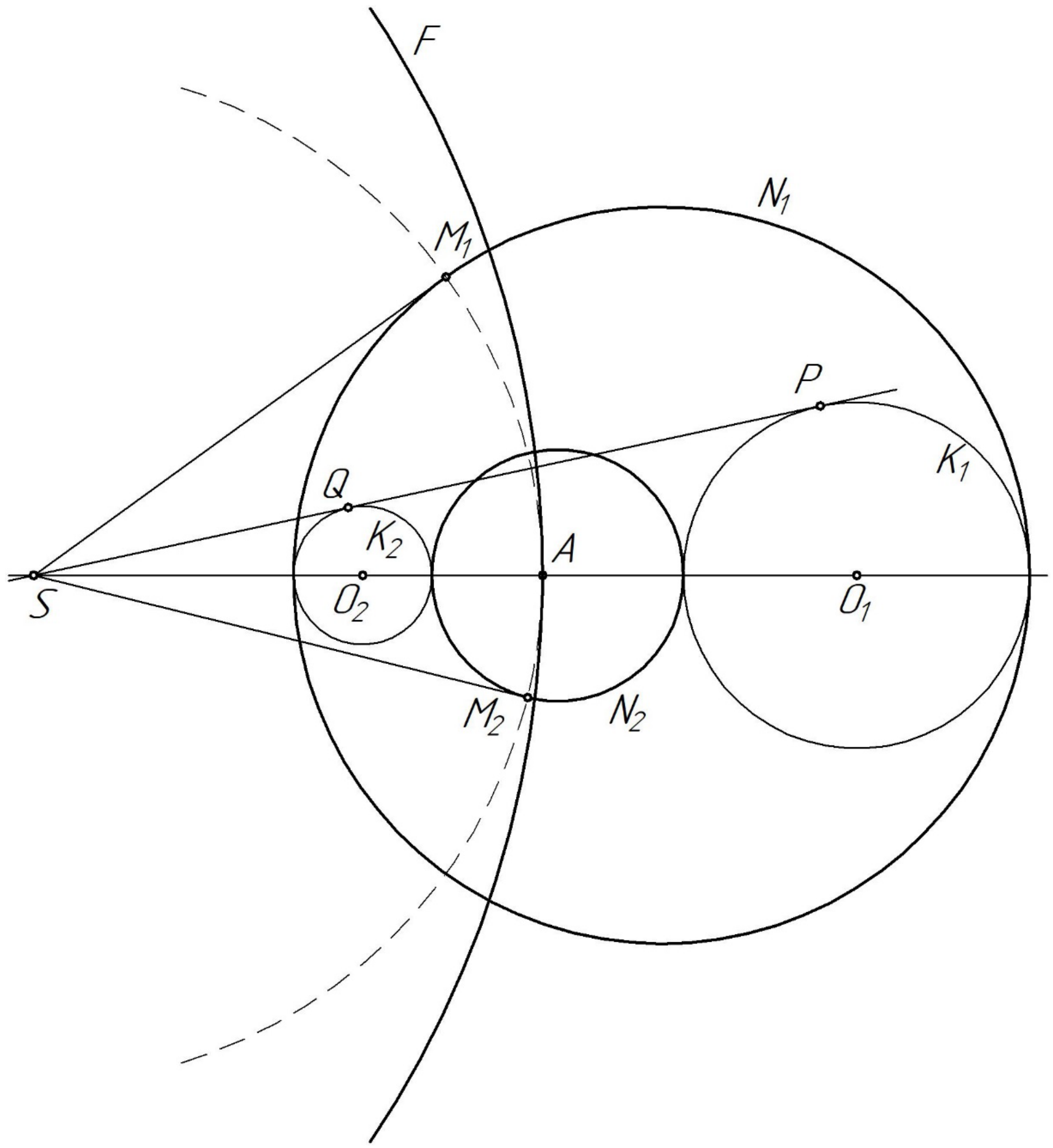

Рис. 3. Поиск окружности инверсии

Результат инверсии системы окружностей N_1, N_2, K_1 и K_2 относительно окружности F приведен на рис. 4 штриховыми линиями. Центром инверсных окружностей N_1 и N_2 является точка A. Соответственно, точка A будет являться центром тора при преобразовании в пространстве R^3.

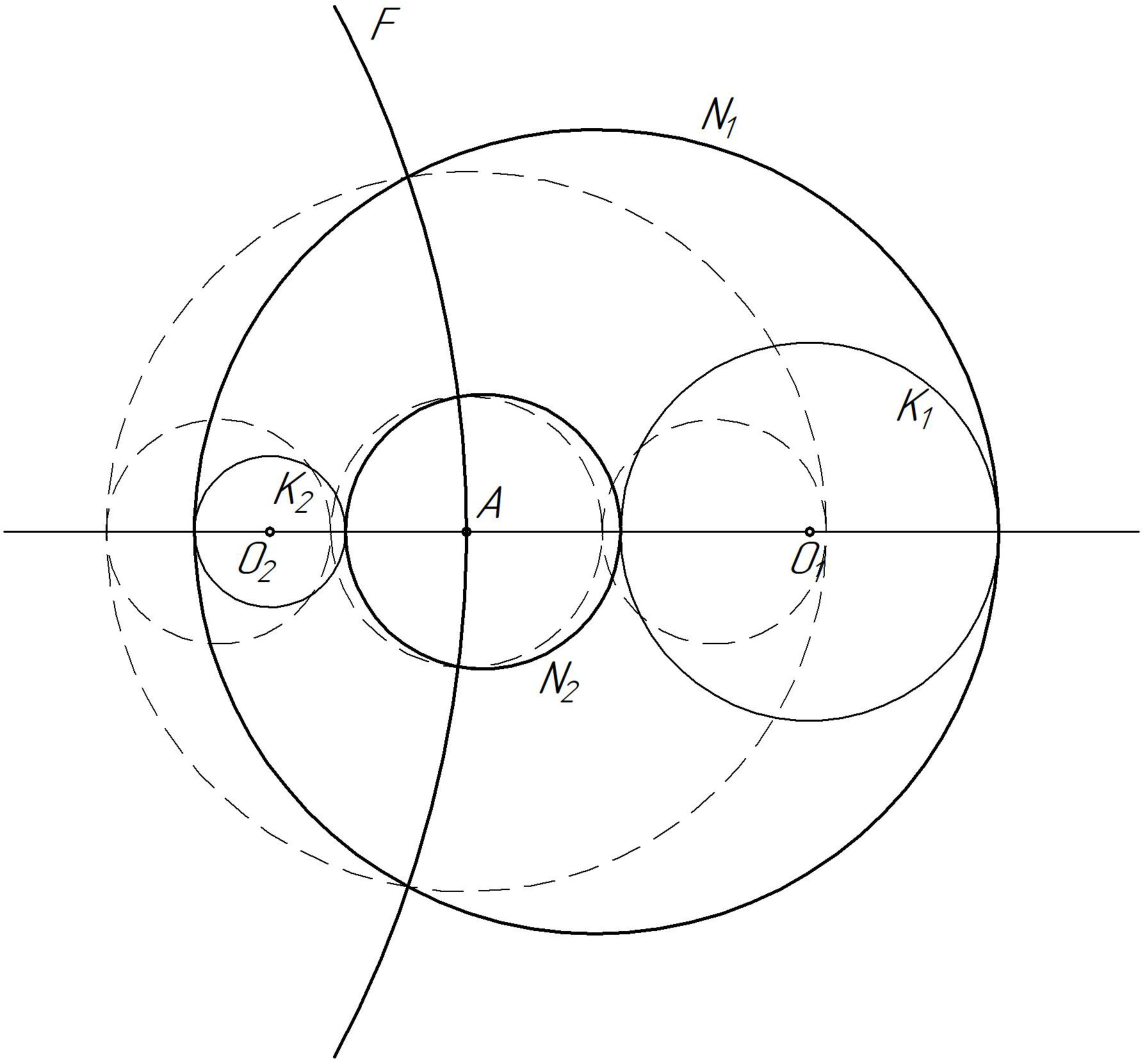

Рис. 4. Результат инверсии системы окружностей относительно F

Результат

На основе рассуждений, приведенных в теории данной статьи, построим инверсию открытой эллиптической циклиды Дюпена. Из рис. 5 видно, что сфера инверсии с центром в точке B пересекается с циклидой Дюпена по двум окружностям, которые являются инвариантами данного преобразования.

Если рассечь циклиду Дюпена бикасательной плоскостью γ (рис. 6), то образуются две окружности - аналоги окружностей Вилларсо. При инверсии плоскости γ образуется сфера γ', которая пересекает тор также по двум пересекающимся окружностям, но лежащим в разных плоскостях. Эти окружности для тора являются окружностями Вилларсо, получающимися при пресечении тора с бикасательной сферой.

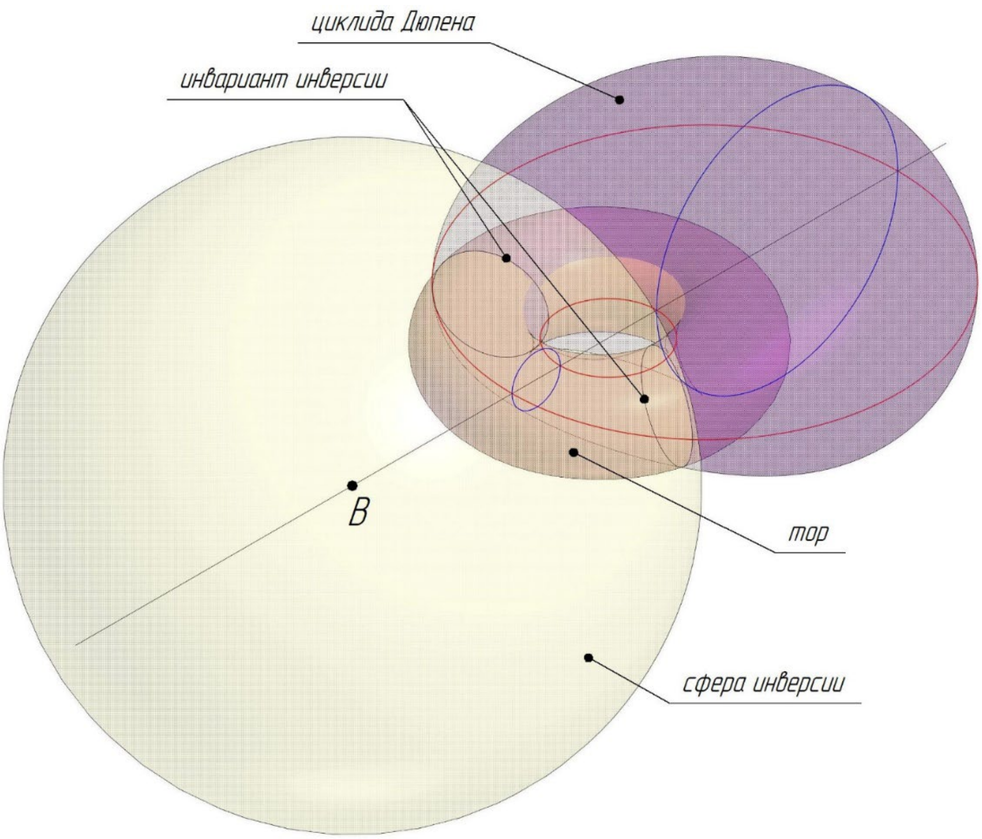

Рис. 5. Инверсия циклиды Дюпена

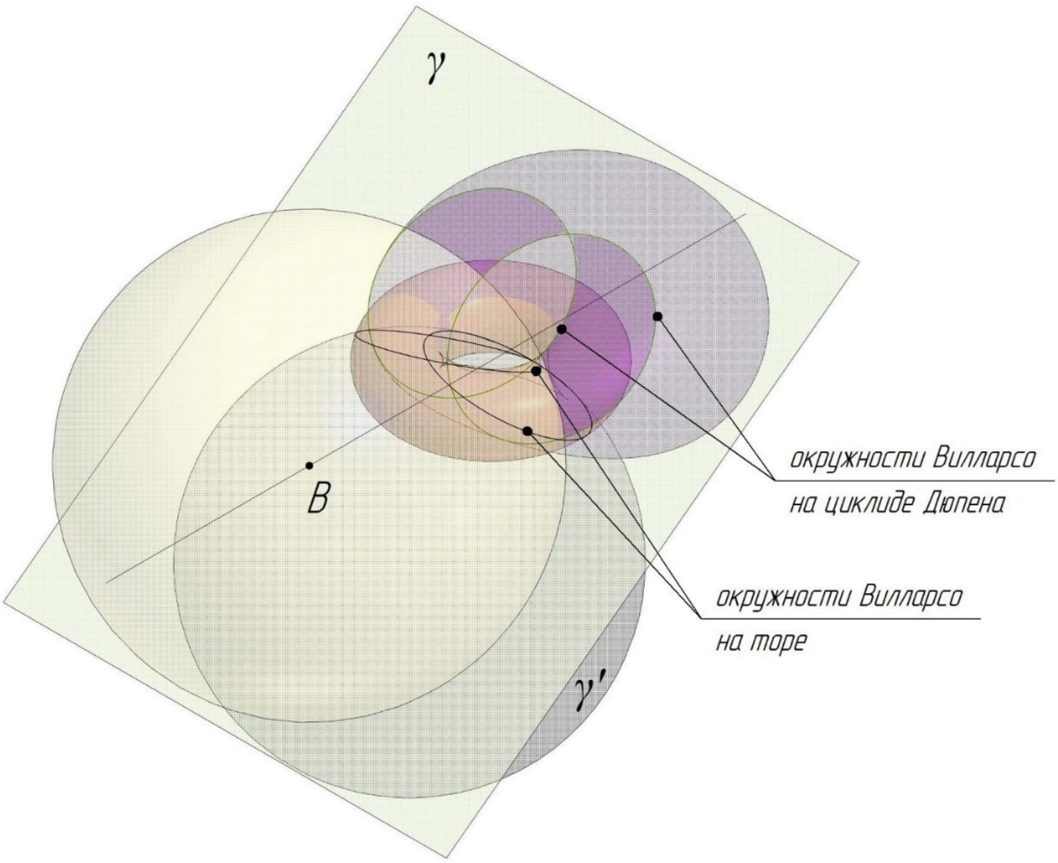

Рис. 6. Инверсия бикасательной плоскости в бикасательную сферу

Выводы

Удалось найти геометрический алгоритм построения тора, применяя преобразование инверсии к циклиде Дюпена.

Установлено соответствие бикасательной плоскости и бикасательной сферы при инверсии циклиды Дюпена в открытый тор. Из полученного соответствия и наличия на торе бесконечного числа бикасательных сфер следует то, что на циклиде Дюпена присутствуют аналоги всех семейств окружностей Вилларсо.

Результат решения данной задачи расширяет область знания в теории геометрических преобразований и может являться основой для решения новых задач [2].

Литература

1. Бекельман И.Я. Инверсия [Текст] / И.Я. Бекельман. – М.: Издательство «Наука», 1966. – 80 с.
2. Боровиков И.Ф. О применении преобразований при решении задач начертательной геометрии [Текст] / И.Ф. Боровиков, Г.С. Иванов, Н.Г. Суркова // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6, № 2. – С. 78-84. – DOI 10.12737/article_5b55a35d683a33.30813949.
3. Волошинов Д.В. Преобразование инверсии в задачах проектирования поверхностей [Текст] / Д.В. Волошинов, Е.С. Казначеева, Е.С. Хайбрахманова // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 1. – С. 14-26.
4. Жижилкин И.Д. Инверсия [Текст] / И.Д. Жижилкин – М.: Изд-во МНЦМО, 2009 – 72 с.
5. Рустамян В.В. Синтетическое представление преобразования "косая симметрия" на примере преобразования эллипса [Текст] / В.В. Рустамян, Е.В. Баянов, Р.Б. Славин // Геометрия и графика. – 2023. – Т. 11, № 3. – С. 12-18.
6. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 1 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 16–25.
7. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 9–22.
8. Сальков Н.А. Свойства циклид Дюпена и их применение. Часть 3. Сопряжения [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 4. – С. 3–14.
9. Сальков Н.А. Циклида Дюпена и ее приложение: монография [Текст] / Н.А. Сальков – М.: ИНФРА-М, 2016. – 141 с.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021663254 Российская Федерация. Инверсия 3D: № 2021662282: заявл. 02.08.2021: опубл. 13.08.2021 / Д. В. Волошинов, Т. В. Мусаева, В. В. Громов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича».
11. Умбетов Н.С. Демонстрация общих элементов инволюции на простом примере [Текст] / Н.С. Умбетов // Геометрия и графика. – 2022. – Т. 10, № 2. – С. 27-34. – DOI 10.12737/2308-4898-2022-10-2-27-34.