К исследованию фрактальных образов множеств Жулиа-Мандельброта

Research of fractal images of Julia and Mandelbrot sets

Шкилевич А.А.
Программист, ООО «ИнвестЛаб»
e-mail: oleg.shev02@yandex.ru

Shkilevvich A.A.
Programmer, “InvestLab”
e-mail: oleg.shev02@yandex.ru

Аннотация
В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна на основе алгебраических фракталов. Рассмотрена связь между основными алгоритмами построения изображений алгебраических фракталов (фрактал Жюлиа, фрактал Мандельброта, бассейны Ньютона), впервые предложено строить фракталы Мандельброта для итерационных формул метода Ньютона, предложены новые фрактальные изображения (формулы).
Ключевые слова: алгебраические фракталы, множество Мандельброта, бассейны Ньютона, множество Жулиа.

Abstract
The article is a result of student scientific work, which may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, as well as developers of programs for graphic and industrial design based on algebraic fractals. Also, it is about connection between the main algorithms for constructing images of algebraic fractals (Julia fractal, Mandelbrot fractal, Newton basins). New fractal images (formulas) are proposed. For the first time it is proposed to construct Mandelbrot fractals for iterative formulas of the Newton method.
Keywords: algebraic fractals, Mandelbrot set, Julia set, Newton basins.

Введение

Результаты, представленные в настоящей статье, были получены в 2017–2018 гг. в рамках студенческой научной работы в ИГЭУ [1], однако нигде, кроме тезисов, не были опубликованы. Результаты были упомянуты в обзорной статье [2]. Некоторые из найденных автором итерационных формул впоследствии были использованы в работе [3]. Тем не менее многие из полученных результатов до сих пор сохраняют оригинальность и могут представлять интерес для исследователей алгебраических фракталов и разработчиков в области графического и предметного дизайна.

1. Фрактал [4, 5, 6] — математическое множество, обладающее свойством самоподобия, т.е. однородности в различных шкалах измерения. Фрактальные множества часто возникают в качестве аттракторов или бассейнов притяжений динамических систем даже в самых, казалось бы, простейших ситуациях. Наиболее изучен случай, когда динамическая система задаётся итерациями многочлена или голоморфной функции комплексной переменной на плоскости. Первые исследования в этой области связаны с именами Фату и Жюлиа.

Пусть $F(z)$ — многочлен, z_0 — комплексное число. Рассмотрим последовательность – z_0, $z_1=F(z_0)$, $z_2=F(F(z_0))=F(z_1)$, $z_3=F(F(F(z_0)))=F(z_2)$, ..., которая при стремлении n к бесконечности может:

- стремиться к бесконечности,
- стремиться к конечному пределу,
- демонстрировать в пределе циклическое поведение, например: z_1, z_2, z_3, z_1, z_2, z_3, ...
- вести себя хаотично, т.е. не демонстрировать ни один из трёх упомянутых типов поведения.

Множество Жюлиа – множество точек бифуркации (границы областей с конкретным типом поведения) для многочлена $F(z) = z^2 + c$ (или другой похожей функции), т.е. тех значений z_0, для которых поведение последовательности z_n может резко меняться при сколь угодно малых изменениях z_0.

На практике, однако, изображения, содержащие множества Жюлиа, получают «в целом» для некоторого участка комплексной плоскости (рис. 1). Множество Жюлиа на таком изображении представляет собой линии границ между областями того или иного цвета, однако, для задач дизайна представляют интерес сами такие изображения. Далее мы будем называть их фракталами Жулиа.

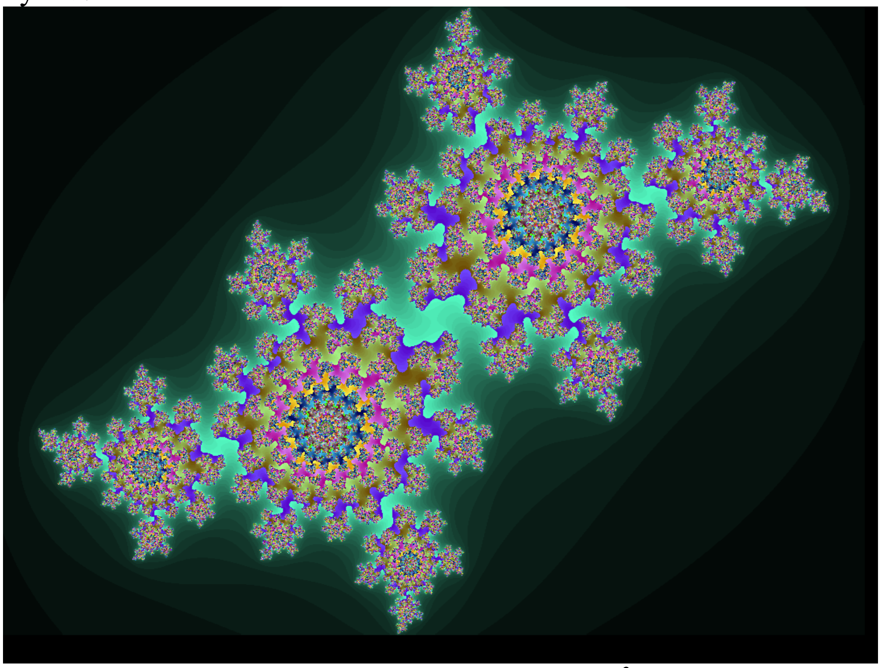
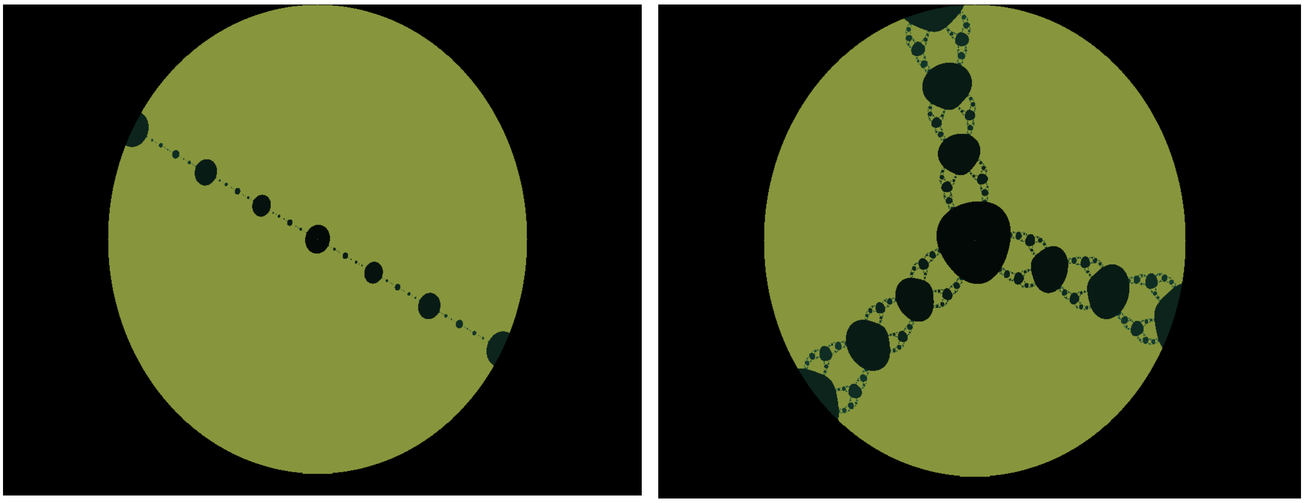


Рис. 1. Изображение типа фрактала Жулиа; $z = z^2 + c$, где $c=-0.4 + 0.6i$ (построено при помощи разработанной автором программы)

2. Области с фрактальными границами появляются также при нахождении корней нелинейных уравнений алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости (для функций действительной переменной метод Ньютона называют методом касательных). Поскольку при разных значениях начального приближения z_0 алгоритм Ньютона дает разный результат, становится возможным построить картину «корней» в целом, используя алгоритм построения множества Жюлиа. Такие фракталы получили название бассейнов Ньютона (рис. 2) и представляют собой фракталы Жюлиа мероморфной функции $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z)}{f'(z)}$ метода Ньютона.



а) б)

Рис. 2. Примеры изображений типа бассейнов Ньютона:
а – $f(z) = z^2 + c$, где $c=0.4 + 0.6i$; б – $f(z) = z^3 + c$, где $c=0.4 + 0.6i$
(построено при помощи разработанной автором программы)

3. Множества Мандельброта (впервые описаны Фату в 1905 г.) возникают как результат анализа поведения итерационной формулы вида $F(z) = f(0) + z0$ и совпадает с результатом построения множества Жюлиа для начальных точек ($z^{ж}{}_0=0$) (см. п. 1) в цепочке множеств, где $c= z^{м}{}_0$. В результате этого фрактальное изображение, получаемое способом Фату, показывает результат оценки всех множеств Жюлиа на некотором участке комплексной плоскости в их начальных точках. Бенуа Мандельброт в 1975 г. показал фрактальные изображения, получаемые способом Фату, построенные при помощи компьютера.

Множеством Мандельброта названа внутренняя область множества Жюлиа, получаемого способом Фату. Как и в случае с фракталами Жюлиа, на практике множество Мандельброта строится «в целом» для некоторого участка комплексной плоскости, поэтому далее фрактальные изображения этого типа мы будем называть фракталами Мандельброта (рис. 3).

Из способа построения фрактала Мандельброта вытекает тот факт, что каждая точка на фрактала Мандельброта соответствует некоторому конкретному множеству Жюлиа, а весь фрактал представляет собой визуальную картину «всех» множеств Жюлиа на некотором участке комплексной плоскости, поэтому его часто называют «каталогом» множеств Жюлиа.

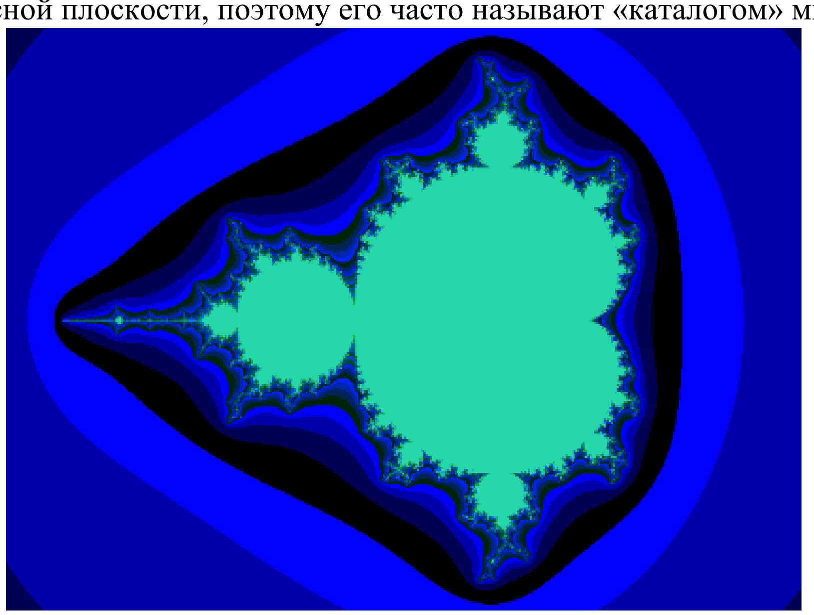


Рис. 3. Фрактал Мандельброта для $z = z^2 + C$
(построено при помощи разработанной автором программы)

На рис. 4 показан набор фракталов Жюлиа, соответствующих точкам на комплексной плоскости фрактала Мандельброта в узлах красной сетки.

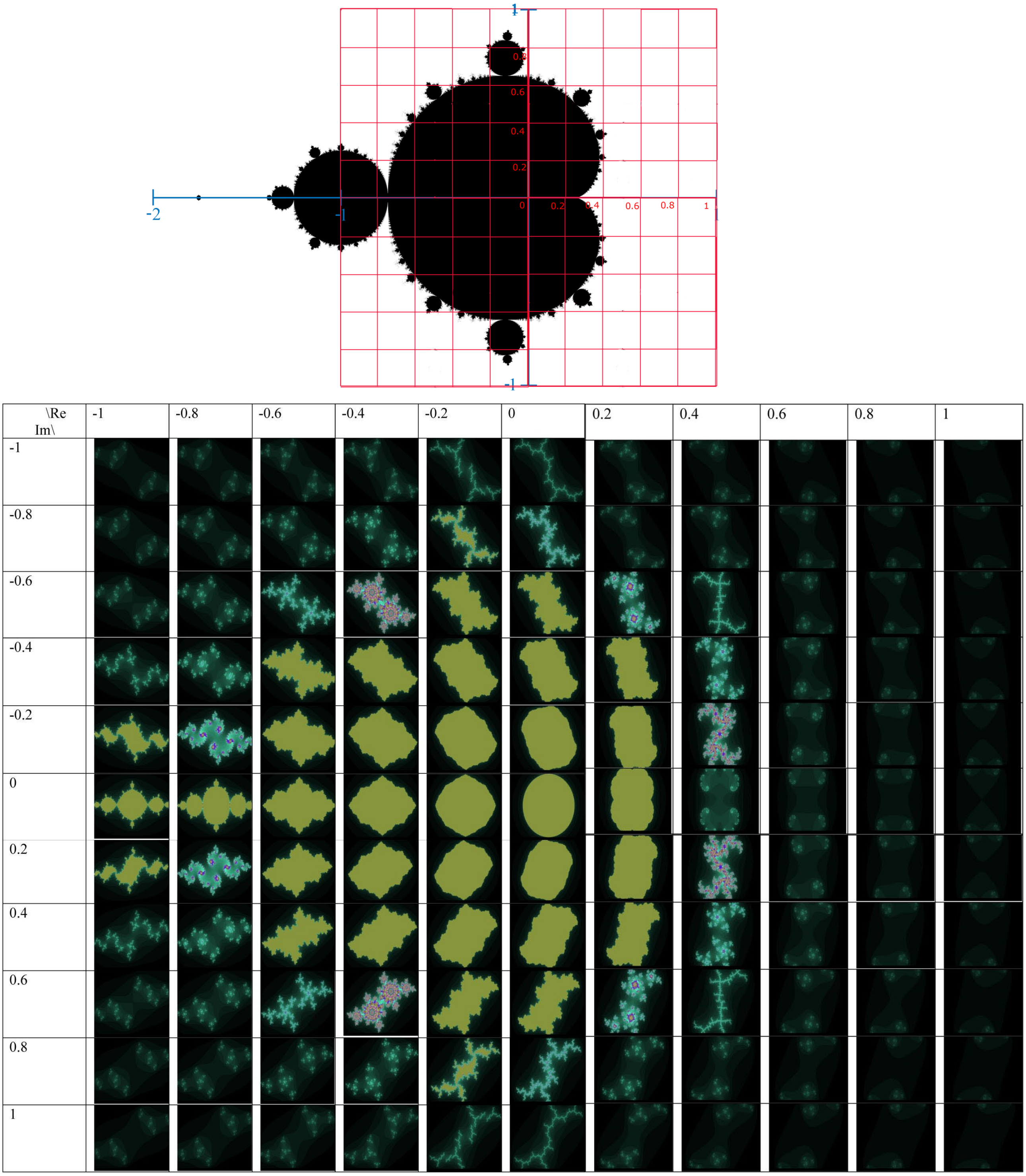
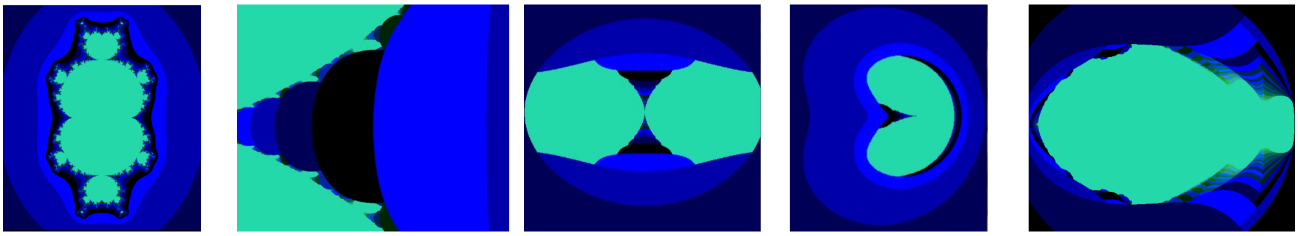


Рис. 4. Фракталы Жулиа, соответствующие точкам комплексной плоскости фрактала Мандельброта
(миниатюры построены при помощи разработанной автором программы)

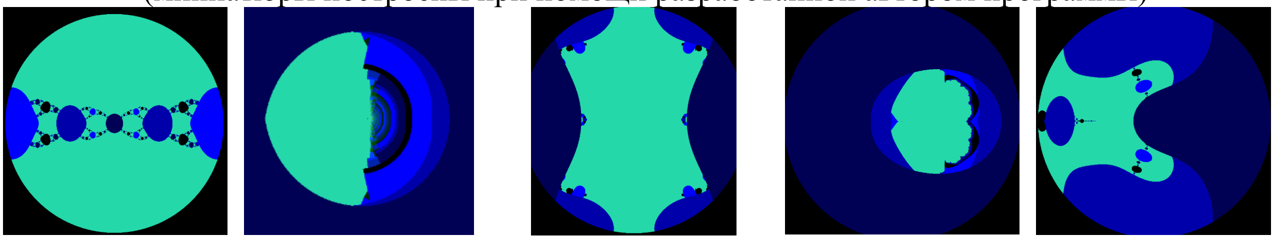
4. Так как фрактал Мандельброта обобщает множество фракталов Жюлиа, то подобное обобщение можно построить для фракталов типа бассейнов Ньютона.

В рамках работы был построен ряд изображений типа фракталов Мандельброта для обыкновенных итерационных формул (рис. 5) и тех же формул для случая поиска корней методом Ньютона (рис. 6). Эти результаты впоследствии были дополнены в работах [3, 7].



$z = z^3 + C$ $z = e^z + C$ $z = sin(z) + C$ $z = ln(z) + C$ $z = cos(z) + C$

Рис. 5. Фракталы Мандельброта различных итерационных формул
(миниатюры построены при помощи разработанной автором программы)



$z = z^3 + C$ $z = \sqrt{z} + C$ $z = sin(z) + C$ $z = ln(z) + C$ $z = cos(z) + C$

Рис. 6. Фракталы Мандельброта оценки корней сходимости различных итерационных формул методом Ньютона
(миниатюры построены при помощи разработанной автором программы)

5. В ходе работы были также найдены и рассмотрены новые итерационные формулы (рис. 7, 8, 9), которые могут представлять интерес в задачах графического и предметного дизайна, в частности, при создании макетов обложек в работе [2].

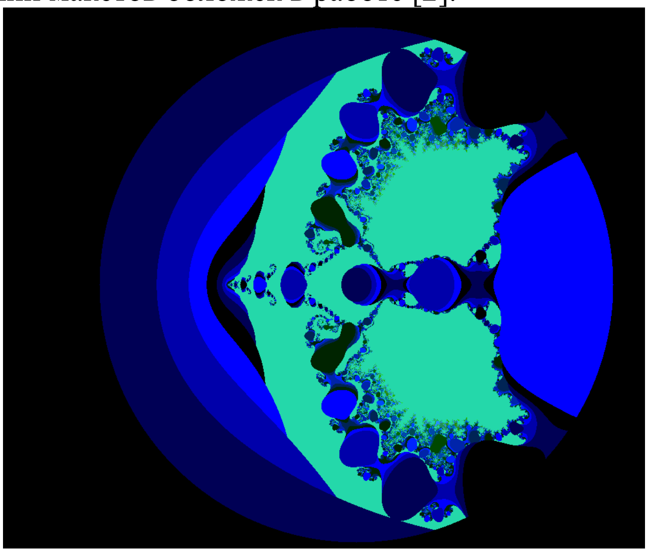
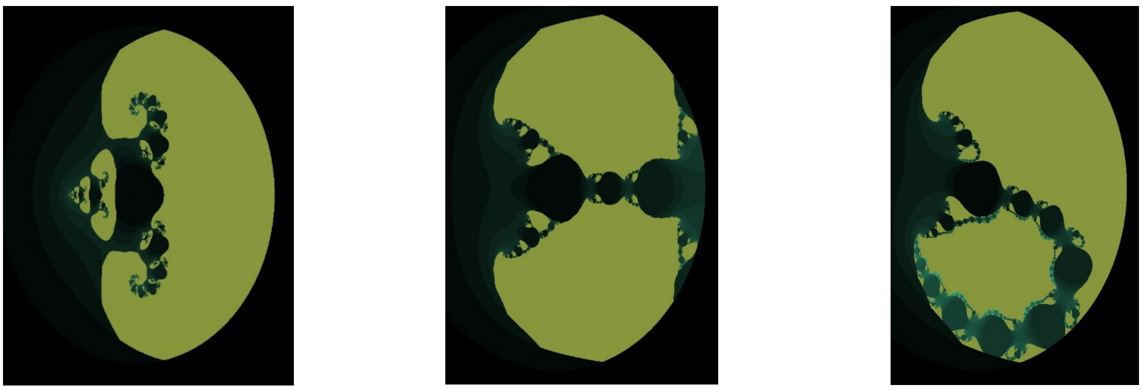
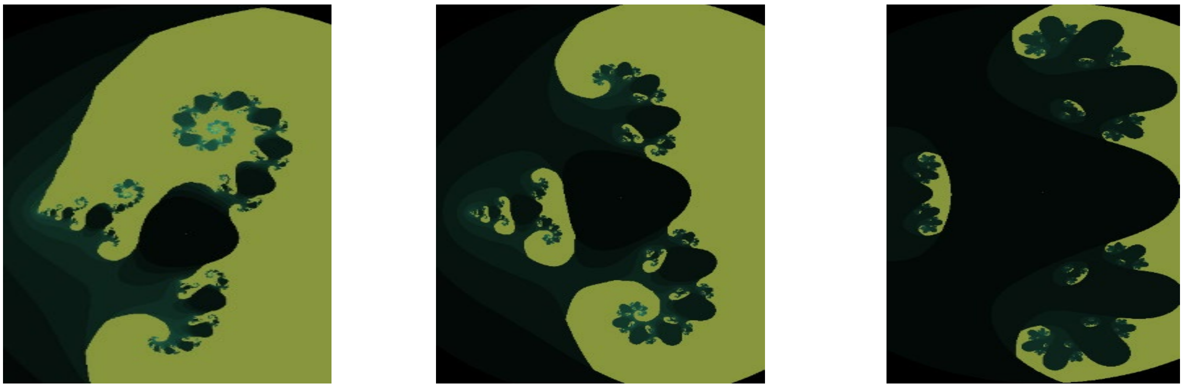


Рис. 7. Фрактал Мандельброта для итерационной формулы $z = z - (z^4 + C) / (4 \cdot z^2)$
(построен при помощи разработанной автором программы)

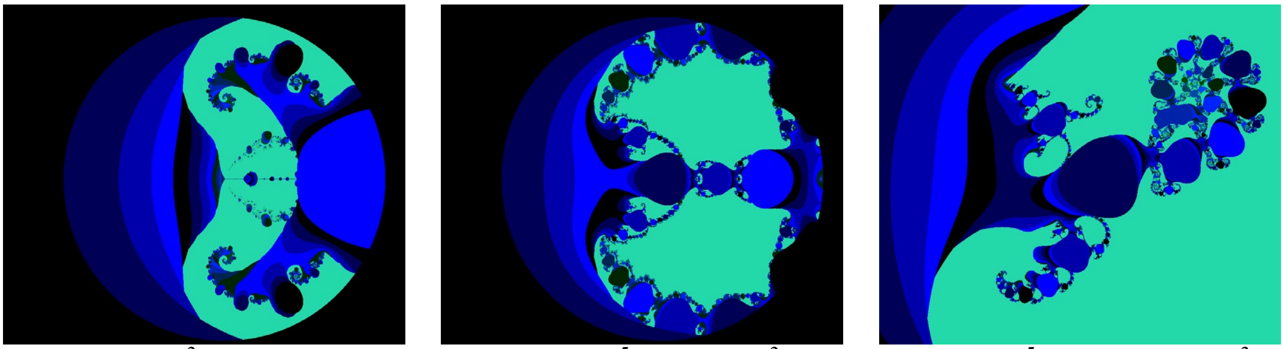


C = –1 C = 1 C = 0.5 + 0.5i



C = –0.5 – 0.5i C = –1.5 + 0.8i C = –4.9 + 0.2i

Рис. 8. Фракталы Жюлиа для итерационной формулы $z = z - (z^4 + C) / (4 \cdot z^2)$ (миниатюры построены при помощи разработанной автором программы)



$z = z - (z^3 + C) / (4 \cdot z)$ $z = z - (z^5 + C) / (5 \cdot z^3)$ $z = z - (z^5 + C) / ((5+3i) \cdot z^3)$

Рис. 9. Фракталы Мандельброта для найденных автором итерационных формул (построен при помощи разработанной автором программы)

Заключение

Данная студенческая научно-исследовательская работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, которая подробно излагается в работах [8, 9], в частности, упоминается в [9].

В работе была рассмотрена связь между основными алгоритмами построения изображений алгебраических фракталов (фрактал Жюлиа, фрактал Мандельброта, бассейны Ньютона), впервые предложено строить фракталы Мандельброта для итерационных формул метода Ньютона, предложены новые фрактальные изображения (формулы), представляющие интерес для дизайна.

Литература

1. Шкилевич А.А. Графическое исследование функций комплексного переменного // Тринадцатая международная научно–техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия–2018»: Материалы конференции. Т. 5. – Иваново: ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», 2018. – С. 135.
2. Бойков А. А., Ефремов А. В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75
3. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.

4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 656 с.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
6. Пайтген Х., Рихтер П. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
7. Орлова Е.В., Чернова А.В. Геометрическое обобщение некоторых алгебраических фрактальных алгоритмов // Энергия–2019 Материалы Четырнадцатой всероссийской (международной) научно–технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 6–ти томах. – Иваново, 2019. – Т. 5. – С. 99.
8. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Кадыкова Н. С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34
9. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Ефремов А. В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85