Математическое познание и его методы

Mathematical knowledge and its methods

Лебедев С.А.
д-р филос. наук, профессор, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: saleb@rambler.ru

Lebedev S.A.
Doctor of Philosophical Sciences, Professor, Bauman Moscow Technical University
e-mail: saleb@rambler.ru

Полянский А.Г.
Аспирант факультета «Энергомашиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: artgpol@mail.ru

Polyanskiy A.G.
Postgraduate Student, Faculty of Power Engineering, Bauman Moscow Technical University
e-mail: artgpol@mail.ru

Аннотация
Философия математики – раздел философии науки, исследующий философские основания и проблемы математики: онтологические, гносеологические, методологические, логические, аксиологические предпосылки математики в целом, ее различных направлений, дисциплин и теорий. К числу важнейших философских проблем математики относят: предмет математики, природа математического знания, место математики в науке и культуре. В их решении существуют альтернативные подходы. Например, при решении проблемы предмета математики это, с одной стороны, объективизм, как идеалистического (Платон, Декарт, Кант, Кантор, Уайтхед), так и материалистического характера (Архимед, Ньютон, Колмогоров); а, с другой, субъективизм: логицизм и интуиционизм (Рассел, Брауэр, Гейтинг и др.). При решении вопроса о природе математического знания (как возможно математическое знание) это такие концепции как математический эмпиризм (Аристотель, Остроградский, Гельмгольц и др.) и математический априоризм (Платон, Декарт, Лейбниц, Вейль и др.). В решении проблемы обоснования математики в XX в. четко оформились четыре основных направления: квазиэмпиризм (Арнольд, Лакатос), логицизм (Рассел, Фреге, Карнап) формализм (Гильберт, Гедель, Бернайс), интуиционизм (Брауэр, Гейтинг, и др.) и конструктивизм (Пуанкаре, Бурбаки, Марков и др.). Нет среди математиков и философов единства и по вопросу о роли математического знания в культуре: от понимания математики как обслуживающего средства и языка других конкретных наук (естественных, инженерно-технических, социальных) до ее понимания как самодостаточной, универсальной и объективной науки (Гаусс, Гильберт, Риман, Эрмит и др.). Этот имеющий место плюрализм в философии математики имеет для нее в целом положительное значение, характеризуя ее как сложную и открытую когнитивную систему, способную к развитию.
Ключевые слова: математика, предмет математики, природа математического знания, методы математики.

Abstract
The philosophy of mathematics is a branch of the philosophy of science that explores the philosophical foundations and problems of mathematics: ontological, epistemological, methodological, logical, axiological prerequisites of mathematics in general, its various directions,

disciplines and theories. The most important philosophical problems of mathematics include: the subject of mathematics, the nature of mathematical knowledge, the place of mathematics in science and culture. There are alternative approaches to solving them. For example, when solving the problem of the subject of mathematics, it is, on the one hand, objectivism, both idealistic (Plato, Descartes, Kant, Cantor, Whitehead) and materialistic in nature (Archimedes, Newton, Kolmogorov); and, on the other, subjectivism: logicism and intuitionism (Russell, Brower, Geiting, etc.). When solving the question of the nature of mathematical knowledge (how is mathematical knowledge possible) These are concepts such as mathematical empiricism (Aristotle, Ostrogradsky, Helmholtz, etc.) and mathematical a priori (Plato, Descartes, Leibniz, Weil et al.). In solving the problem of substantiation of mathematics in the 20th century, four main directions were clearly formed: quasi-empiricism (Arnold, Lakatos), logicism (Russell, Frege, Carnap), formalism (Hilbert, Godel, Bernays), intuitionism (Brower, Geiting, etc.) and constructivism (Poincare, Bourbaki, Markov, etc.). There is also no unity among mathematicians and philosophers on the role of mathematical knowledge in culture: from understanding mathematics as a service tool and language of other specific sciences (natural, engineering, social) to understanding it as a self-sufficient, universal and objective science (Gauss, Hilbert, Riemann, Hermit, etc.). This pluralism in the philosophy of mathematics has a generally positive meaning for it, characterizing it as a complex and open cognitive system capable of development.
Keywords: mathematics, the subject of mathematics, the nature of mathematical knowledge, methods of mathematics.

1. Предмет математики

Непосредственным предметом математики как науки является математическая реальность. Ее элементами являются множества разного рода идеальных математических объектов: числа (арифметика и теория чисел), геометрические объекты – точка, прямая, окружность и др., функции (алгебра, математический анализ и др.), конечные и бесконечные множества (теория множеств), а также разного рода отношения между ними. Математическая реальность создается с помощью конструктивной деятельности мышления математиков [1; 2]. Философские воззрения на математику во многом различаются тем, как они трактуют природу математических понятий и принципов. Ее решение во многом зависит от принятия тех или иных философских взглядов на научное познание. Первой явно сформулированной концепцией философии математики был пифагореизм. Пифагорейцы, прежде всего, различали мир чувственных предметов и явлений, в которых царит случайность, и мир сверхчувственных (мысленных) объектов и отношений, где имеет место идеальная упорядоченность и гармония. Второй мир может быть познан только умозрительно. Все высказываемое о чувственном мире не вполне достоверно и является только мнением. Подлинным знанием, обладающим свойством истинности, являются только утверждения и теории математики. Математические утверждения опираются не на показания чувств, а на разум, который способен без опоры на опыт постигать истинные законы Космоса. Истины математики являются несомненными и вечными. Пифагорейцы приписывали математическим объектам не просто объективное существование, они придавали числам статус причин вещей, активного начала, порождающего вещи. Такой же позиции придерживались Парменид, Зенон и Платон.

По мнению Аристотеля, математические предметы не являются чем-то существующим отдельно от вещей. Они связаны с вещами и возникают как таковые из способности мышления к абстрагированию. Человек, чувственно воспринимая вещи во всем многообразии свойств, абстрагируется от многих из них, оставляя лишь некоторые из них и исследуя последние как отдельно существующие. Математик мысленно строит особый абстрактный мир, основанный на отвлечении, но этот мир не является независимым от чувственных вещей, он берется как независимый от них лишь условно, для ясности и простоты рассмотрения интересующих нас свойств. Строгость математического рассуждения объясняется простотой ее предмета. Имеется в виду ее предельная абстрактность, отсутствие в ее предмете разнородности качеств. Высказана идея о глубинной связи математики с красотой: это слаженность, соразмерность и определенность [3; 12].

Априористская концепция математики (Платон, Декарт, Лейбниц, Кант). Ее сторонники считают математику принципиально внечувственным знанием, основанным на априорной интеллектуальной интуиции. Декарт разделял все истины на мысленные и вечные, данные в аподиктической интуитивной очевидности, и чувственные, постигаемые на основе опыта. Математика есть знание, получаемое на основе мысленной очевидности. Лейбниц отличал необходимые истины (математические и логические) от истин случайных, основанных на опыте. Необходимые истины – истины, отрицание которых содержит в себе противоречие. Аналитические истины – не только теоремы, которые строго логически выводятся из некоторой системы простых исходных утверждений, но и сами аксиомы математических теорий. Математические истины, по Лейбницу, не проистекают из опыта, они присущи внутренне самому разуму как некоторое его имманентное содержание, они могут иногда выявляться под влиянием воздействия предметов на наши органы чувств. Кант отказался от воззрения Лейбница на аналитический характер математических истин. По Канту им обладает только логическое знание (логические априорные истины), остальные виды априорных истин (математические и философские) являются синтетическими. Синтетичность математики обусловлена наличием в нашем сознании чистого внеопытного (мысленного) созерцания, которое позволяет сформулировать положения априорные (независимые от опыта) и одновременно синтетические, не сводимые к тавтологиям. Аксиомы геометрии опираются на чистое представление о пространстве, а истины арифметики — на чистое представление времени. «Чистые» представления пространства и времени определяют состав исходных принципов математики и логику математического мышления [9; 6].

В связи с осмыслением статуса неевклидовых геометрий и теории множеств в конце XIX в. возникла новая концепция математики – формалистская философия математики [4; 5]. Вот ее основные положения:

— математика не имеет предмета в объективной действительности, не является наукой, исследующей специфические аспекты объективной реальности, а представляет собой метод логической систематизации формальных структур, пригодных для этой цели;

— основным требованием к аксиомам математической теории является не их априорная очевидность или связь с опытом, а их непротиворечивость, которая необходима и достаточна для ее приложения к опытным наукам;

— к математике не применимо понятие истины в смысле адекватного объективного содержания. Любая математическая теория сама по себе не истинна и не ложна. Она становится таковой только после соединения ее понятий с понятиями опытных наук;

— если обоснование содержательной науки состоит в эмпирическом подтверждении ее истинности, то обоснование математической теории заключается в доказательстве логической непротиворечивости множества ее аксиом и правильного логического вывода всех ее теорем.

Принимая этот взгляд на сущность математической теории, мы уходим от многих трудностей как эмпиристского, так и априористского истолкования природы математического знания. Математической теории не требуется ни априорной очевидности, ни опытной основы в качестве ее необходимых признаков. Существенными объявляются только три ее свойства: логическая непротиворечивость, формальная доказательность, полнота [3; 6].

2. Природа математического знания

На протяжении XX в. появились новые воззрения на природу математики. Произошло определенное возрождение эмпиризма в методологическом варианте – концепция математического «квазиэмпиризма» И. Лакатоса, согласно которой в математике должно иметь место «фактическое» подтверждение ее общих утверждений примерами [8]. Возникли новые варианты и неоаприоризма: логицизм, интуиционизм, конструктивизм и др. Большинство из них настаивает на априорности исходных принципов арифметики и евклидовой геометрии, трактуя остальные математические теории уже как производные математические структуры. Математика с этой точки зрения разбивается на две части: первичная, априорная, и вторичная — формально производная. По мнению большинства современных математиков неоаприоризм более четко фиксирует специфику математики по сравнению со всеми другими науками. Ему противостоит эмпирико-материалистическая трактовка природы математического знания. Исходные математические теории (арифметика и евклидова геометрия) имеют непосредственную связь не только с универсальной философской онтологией, но и с практической деятельностью людей, реализуя прикладную ценность математического мышления [7; 8]. Понимание практической основы математического мышления позволяет по-новому посмотреть на математические абстракции: являются ли они только изобретениями человеческого ума или также включают в себя некоторое содержание, предопределенное объективной реальностью, в котором мы существуем [22].

В философии математики различают два вида реализма: методологический и философский. Методологический реализм утверждает, что в математике в качестве истинных могут приниматься не только утверждения о простых по содержанию математических объектах (целых числах, геометрических фигурах), но и утверждения о более абстрактных и сложных сущностях, таких как действительные числа, мнимые числа, искривленное пространство, бесконечные множества [12; 21]. Более трудной является концепция философского (метафизического) реализма, который стремится найти за математическими объектами их объективные аналоги. Конечно, трудно принять допущение, что математическому треугольнику соответствует «реальный» треугольник, существующий в объективном мире идей (Платон). Идея существования математических объектов в объективном мире вряд ли приемлема, однако, допущение существования математических объектов в мире объективных возможностей, на наш взгляд, вполне. Только так можно обосновать объективное содержание не только математического знания, но и всех других идеально-конструктивных научных теорий [1;11;13]. Существование объектов математики - не конвенция и не плод свободного воображения математиков. Система исходных математических идеализаций обусловлена объективной онтологией и имеет прямое отношение к структуре нашего мира. Числа и фигуры — не чувственные или эмпирические, а чисто мысленные объекты, и в этом смысле они идеальны. Но они же - элементы объективной реальности, но не материальной, не наблюдаемой, а только мыслимой, относящихся к другому, более фундаментальному уровню объективной реальности по сравнению с ее материальным уровнем, а именно к миру объективных возможностей материальной действительности. Мир объективных возможностей является онтологически более фундаментальным, чем действительный материальный мир именно потому, что онтологически возможность всегда предшествует действительности, а действительным может быть только все то, что возможно в принципе. А возможно в принципе только то, что логически непротиворечиво. Все, что логически противоречиво, не может быть реализовано в материальной действительности [14;16;23]. Материальный мир, весь Космос, есть и всегда будет лишь бесконечно малой частью реализации мира объективных возможностей, который является актуально бесконечным множеством по своей мощности по сравнению с множеством объектов материального мира [21;23].

В своем отношении к миру человек строит два уровня теоретических представлений о нем: теоретические представления, систематизирующие данные опыта, и общие онтологические представления философии об объективной реальности. Вместе они определяют пределы и возможности осуществления людьми их практической деятельности. Это же имеет место и в отношении их познавательной деятельности, в том и в математическом познании. Развитие математики на каждом ее этапе зависит также как от накопленного ранее математического знания, так и от ее философской онтологии, от зафиксированного в ней содержания мира объективных возможностей [11; 22].

Неоаприоризм отличается от традиционного априоризма Декарта, Канта и др. тем, что он является одновременно реализмом и априоризмом. Связывая исходные математические идеализации с универсальной онтологией, он оправдывает традиционную веру математиков в объективную значимость математических объектов и теорий. Квалификация евклидовой геометрии как более фундаментальной по сравнению с неевклидовыми геометриями, полученными из первой с помощью различного рода логических трансформаций, имеет определенный смысл: в отличие от других геометрий евклидова геометрия была первой, привязанной к определенной философской онтологии. К другим объектам математики и другим математическим теориям, полученным на основе конструкции из исходных принципов, применение понятия абсолютно-априорного знания уже не имеет смысла, можно говорить лишь об относительной априорности математического знания [2;7].

Современные теории математического реализма неудовлетворительны вследствие, прежде всего, отсутствия глубокого анализа онтологии математики. Не проясняя связи математических идеализаций с определенной универсальной онтологией, современный математический реализм сводится либо к обоснованию абстрактного объективизма, либо к попыткам прямого соотнесения математики с физической реальностью того типа, который дается натуралистической эпистемологией. Натуралистические подходы несостоятельны в такой же мере, как и чисто конструктивистские, когда математические понятия трактуются как абсолютно свободные конструкты мышления и сознания.

3. Методы математики

Метод математики – это совокупность способов получения и обоснования математических утверждений. Если говорить о методах получения математических утверждений, о способах продвижения математика к новым результатам, то здесь применятся все методы поиска, которые используются в науке в целом.

Эйлер говорил, что почти все теоремы в теории чисел он нашел из наблюдений за числами. Это – утверждение о существовании некоего «квазиэмпирического» аспекта математического творчества, ибо наблюдение за числами явно не тождественно наблюдению, например, за поведением животного. Индуктивное начало имеет место в обоих случаях, однако математик не может довольствоваться результатами индукции. Он должен доказать любое утверждение, как необходимо вытекающее из принципов теории [10;18].

Важнейшим и весьма плодотворным способом совершенствования математической теории является метод интерпретации. Эффект метода интерпретации основан на том, что теоремы, трудно доказуемые в одной теории, оказываются легко достижимыми с помощью формулировки этой теории в понятиях другой теории [3].

Важную роль в развитии математики играет также интуиция – догадка, возможность увидеть истину до ее обоснования. Выделяют несколько типов интуиции. Первый тип – формулировка общей гипотезы на основе предварительной индукции или аналогии, когда выдвигаются гипотезы, для которых имеется мало оснований в опыте и даже такие гипотезы, которые противоречат опыту. Иногда математики (Пуанкаре) утверждают о «таинственных» интуитивных прозрениях в получении математических результатов, но такие утверждения имеют сугубо личностную основу и мало поддаются изучению [11;18]. С другой стороны, а откуда же взяться знанию об объективных возможностях – непосредственного предмета всех научных теорий, включая математические, как не из «подвала интуиции» как того места, где сознание способно получить такое знание путем саморефлексии своего содержания, которое не может быть не тождественно миру объективных возможностей как фундаменту любой реальности, включая сознание (Платон: познание как припоминание сознанием своего содержания).

В математике существует один главный метод обоснования – логическое доказательство. Относительно доказательства в философском плане возникает ряд вопросов: соотношение логики и интуиции в доказательстве, информативность доказательства, соотношение конструктивного и неконструктивного доказательства, степень их строгости и т.п.

Если признать факт существования аподиктических очевидностей и их абсолютную надежность (неуязвимости для контр примеров), то вопрос о возможности существовании абсолютно надежных доказательств будет сводиться к вопросу о том, в какой мере историческая эволюция доказательства в рамках теории гарантирует его полное очищение от ассерторических очевидностей. Здесь существуют две основные гипотезы. Первая гипотеза – абсолютистская, согласно которой процесс вызревания математического доказательства конечен и математики имеют дело с завершенными доказательствами. Вторая (релятивистская): историческое очищение доказательства от ненадежных в абсолютном смысле элементов представляет бесконечный процесс, ведущий к повышению его надежности и строгости, но никогда не достигающий предела.

Как разрешить эту проблему абсолютной или только относительной природы математического знания. Будем называть доказательство надежным, или завершенным, если оно не может быть опровергнуто посредством контр примеров. Будем называть его строгим, или герметичным, если оно не содержит в себе неявных предпосылок. Первоначально доказательство может использовать интуитивные понятия, не являющиеся достаточно определенными, а также скрытые эмпирические и индуктивные доводы и быть далеким от идеала непреложного, абсолютно надежного умозаключения. На первых стадиях становления может опираться на аподиктические и на ассерторические очевидности, надежность доказательства остается проблематичной. Вопрос о возможности достижения надежности математического доказательства сводится к вопросу о том, обеспечивает ли естественная эволюция математической теории полное очищение своих доказательств от ассерторических элементов. Анализ отдельных логических и математических теорий позволяет дать утвердительный ответ на этот вопрос.

Возможность абсолютного освобождения математического рассуждения от ассерторических доводов обусловлена особым статусом аподиктической очевидности в нашем сознании. Различение аподиктического и ассерторического знания является сущностным для сознания и вытекает из его способности к саморефлексии. Различие между ассерторической и аподиктической очевидностью дано нашему сознанию с аподиктической очевидностью. Субъективная убедительность доказательства имеет объективные основания: она состоит в уверенности, что каждый его шаг осуществлен в рамках аподиктической очевидности.

Критериальность обоснованности оценки знания математическим сообществом как главным субъектом математического познания вытекает из того, что всякая аподиктичность выступает для человеческого сознания как интерсубъективность , как нечто признаваемое всеми. Если ошибка субъективна, то маловероятно, что она не будет замечена другими математиками. Практически сообщество математиков доводит доказательство до полной ясности всех его шагов. Не существует доказательств, относительно которых сообщество не вынесло бы окончательного вердикта в исторически конечное время. Если отдельный математик не гарантирован от ошибок, то не гарантировано от них и сообщество математиков: с очень малой вероятностью оно может заблуждаться относительно любой истины и как угодно длительное время. Это рассуждение ошибочно, так как не учитывает принципиальной конечности и системности математического рассуждения [6].

Возможность абсолютной очистки доказательства от дефектов существенно связана с его конечностью. Математическое доказательство представляет деятельность в конечном поле возможностей. По содержанию своих понятий математическая теория может быть как конечной, так и бесконечной, т.е. как связанной с понятием бесконечности, так и не связанной с ним. Как процедура обоснования некоторого тезиса доказательство – всегда конечная цепь логических переходов. Всякое доказательство распадается на конечное число шагов, относительно каждого из которых мы можем поставить вопрос о его законности и решить его общезначимым образом через соотнесение со сферой аподиктической очевидности. Фундаментальным отличием математического доказательства от других типов рассуждения является его проверяемость через редукцию к аподиктической очевидности всех его шагов [3].

Математическое доказательство является не углублением содержания теории, не совершенствованием ее понятий, а построением конструкции в пространстве готовых объектов, возможные действия с которыми однозначно заданы их определениями. Но такая комбинаторная деятельность в конечном пространстве возможностей либо не достигает цели, либо получает абсолютное завершение.

Отдельный математик может сделать техническую ошибку либо допустить вывод, не являющийся общезначимым, что исключено для сообщества, оно не может не обнаружить этой ошибки в процессе анализа доказательства. Математическое доказательство как деятельность в конечном поле аподиктически определенных комбинаций имеет абсолютный и с полной определенностью фиксируемый результат. Математические рассуждения отличаются от содержательных не тем, что они гарантированы от ошибок, а тем, что они неизбежно способны достигнуть полного освобождения от ошибок, т.е. состояния полной надежности.

Математическое доказательство не есть рассуждение в обычном смысле слова, для которого характерно бесконечное приближение теории к объекту, а является построением комбинации в конечном множестве объектов, имеющих определенные свойства. Завершенность такой комбинации является предельно общезначимой, поскольку и ее свойства, и каждый шаг ее построения фиксируются с аподиктической очевидностью.

Гносеологическая особенность этой ситуации в том, что наблюдается возможность непосредственного перехода от субъективного и вероятного мнения отдельных индивидов к абсолютному мнению математического сообщества, утверждающего факт полной надежности доказательства, невозможности его опровержения. Здесь нет ничего незаконного, противоречащего теории вероятностей, ибо мнение математического сообщества относится к анализу конечной конструкции на базе предельно достоверного разделения аподиктических и ассерторических очевидностей. Математическое доказательство есть конечная конструкция в сфере очевидного. Все отклонения от абсолютности на этом уровне являются случайными и устраняемыми в конечное время.

Важно иметь в виду специфическую системность математического знания. Математическая теория является жесткой системой в том смысле, что каждая доказательная связь обусловлена многими другими доказательными связями. Само доказательство становится основой других доказательств и подтверждением результатов, полученных другими путями. Отдельное математическое доказательство не может существовать вне перекрещивающейся сетки доказательств, согласованных с ним.

Зрелая математическая теория полностью исключает некорректные доказательства [3]. Доказательство имеет шансы содержать некорректное допущение, но только пока оно находится на периферии теории и не связано достаточно жестко с другими теоремами. По мере вызревания любое доказательство погружается в центр теории, где все его леммы должны стать доказанными теоремами или аксиомами, а все объекты однозначно определенными на основе первичных объектов. Ясно, что интуитивность выводов и неопределенность объектов в математическом рассуждении — временное состояние, возможное только на начальном этапе становления.

Аргумент системности представляется очень важным для понимания статуса современных компьютерных доказательств. Математики считают, что доказательства математических теорем, осуществленные с использованием сложных программ, не могут считаться надежными и могут рассматриваться в качестве гипотез. Здесь упускается то обстоятельство, что надежность доказательства проверяется не только прямым анализом его шагов, но и его согласованностью с другими доказательствами. С учётом этого обстоятельства можно утверждать, что компьютерная математика не ограничена в своем движении к надежности. Одна программа может проверять другую, и полная коррекция доказательства потребует лишь конечное число проверок.

Вероятностные соображения, что если заблуждается один математик, то может заблуждаться на неопределенное время и математическое сообщество, что повторные проверки не способны вывести нас за рамки вероятного результата и др., неприменимы к эволюции математического доказательства. С абстрактно теоретической точки зрения можно допустить, что все человечество с какой–то степенью вероятности может заблуждаться, считая истинным равенство 2 + 2 = 4. Но это допущение не учитывает системности теории. Ошибка в таком равенстве должна была бы войти в тысячи других равенств и остаться при этом незамеченной. Если бы такая ситуация действительно имела место, то ее нельзя было бы считать случайной. Этот факт можно было бы объяснить только наличием некоторой другой системы аподиктических очевидностей, что полностью исключено их статусом (так сказать, по определению) [5].

Ситуация с достижимостью окончательного доказательства в математической теории может быть сформулирована как задача полной (предельной) настройки в конечной саморегулирующейся системе. Если имеется система с конечным числом состояний, упорядоченных по некоторому параметру, и имеется постоянно действующий фактор, способствующий с преобладающей вероятностью переходу от данного состояния к более высокому, то можно утверждать, что такого рода система достигает предельного (наилучшего) состояния в конечное время. Каждое доказательство содержит конечное число ошибок и его историческое совершенствование представлено в виде конечной последовательности состояний, упорядоченных по возрастанию корректности. Теоретическая коммуникация, в которую доказательство включено, является постоянно действующим фактором, обеспечивающим его переход от одного состояния к другому, более высокому [14].

В математическом познании, конечно, возможны ошибки, идущие от человека, от ограниченности его внимания и памяти, но всегда здесь происходит движение от несовершенного к более совершенному знанию. Основная особенность математики, отличающая ее от эмпирических наук, состоит в том, что она достигает окончательного установления своих истин и предельно ясной констатации этого состояния в конкретных случаях.

Заключение

Предмет математики как науки столь же объективен, как и предмет физики, только он более фундаментален. Если предмет физики, как и других конкретных наук, это материальный (наблюдаемый) мир, то предмет математики это часть мира объективных возможностей, а именно возможных отношений между любого рода объектами. В математике он представлен различного рода абстрактными структурами [2]. «Прорыв» сознания в эту часть объективной реальности возможен только с помощью продуктивного и непротиворечивого мышления.

Литература

1.Анисов А.М. Современная логика и онтология. В двух книгах. М.: URSS. 2022.
2.Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: URSS. 2006. 296 с.
3.Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука. 1989. 400 с.
4.Гильберт Д. Основания геометрии. ОГИЗ. Гостехиздат.1948. 491 с.
5.Гильберт Д. Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука. 1982. 556 с.
6.Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука. 1979. 186 с.
7.Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука. 1991. 224 с.

8.Лакатос И. Доказательства и опровержения. М.: Наука. 1967. 152 с.
9. Лебедев С.А., Гетманова А.Д., Григорян А.А., Перминов В.Я. и др. Философия математики и технических наук. М.: Академический проект. 2006. 779 с.
10. Лебедев С.А. Математика и технические науки - основа единства системы научного знания//Журнал естественнонаучных исследований. 2018 .Т.3. № 3 . С. 22-48.
11. Лебедев С.А. Методы теоретического познания в физике// Журнал естественнонаучных исследований. 2016 .Т.1, № 2. С 4.
12.Лебедев С.А., Рубочкин В.А. История и философия науки. М.: Издательство Московского университета.2010. 200 с.
13.Лазарев Ф.В., Лебедев С.А. Философская рефлексия: сущность, типы, формы//Вопросы философии.2016,. № 6. С. 15-28.
14.Лебедев С.А. Консенсуальный характер научного знания как обобщение его конвенциональности// Studia Humanitatis Borealis. 2021. №1(18). С.4-12.
15.Лебедев С.А. Философия науки. Учебное пособие. М.: Юрайт. 2011.
16. Лебедев С.А. Современная философия науки. М.: Проспект. 2023. 312 с.
17. Лебедев С.А. Теория как особая единица научного знания: онтология и методы// Гуманитарный вестник. 2023. № 2 (100). DOI: 10.18698/2306-8477-2023-2-829.
18. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука. 1983. 573с.
19. Лебедев С.А. Аксиология науки: ценностные регуляторы научной деятельности//Вопросы философии. 2020.№ 7. С. 82-92.
20. Лебедев С.А. Научная истина и ее критерии//Журнал философских исследований. 2024. Т.10. № 1. С. 22-28.
21. Лебедев С.А. Философия. Методология. Наука. Избранные статьи. М.: Проспект.2023.
22. Лебедев С.А. Конструктивизм научного познания и его методологии//Журнал философских исследований. 2023. Т.9. № 3. С. 3-15.
23. Лебедев С.А. О новой интегральной философии//Журнал философских исследований. 2023. Т.9. № 2. С. 33-41.