# Правильные выпуклые многогранники с позиции аналитической и проективной геометрии

# Regular convex polyhedra from the standpoint of analytical and projective geometry

**Часовников Д.Р.**
Студент, ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», г. Хабаровск
e-mail: chdanil14052004@gmail.com

**Chasovnikov D.R.**
Student, Far Eastern State Transport University, Khabarovsk
e-mail: chdanil14052004@gmail.com

**Графский О.А.**
Д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная техника и компьютерная графика», ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения», г. Хабаровск
e-mail: grafoa2@yandex.ru

**Grafsky O.A.**
Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computer Engineering and Computer Graphics, Far Eastern State Transport University, Khabarovsk
e-mail: grafoa2@yandex.ru

**Аннотация**
Исследования посвящены геометрическим телам Платона, которые изучаются в дисциплине начертательной геометрии. При этом, в справочной литературе обычно рассматриваются геометрические формы поверхностей этих тел с указанием количества граней и ребер, а также наглядное их изображение. В представленных исследованиях рассмотрена возможность средствами аналитической и вычислительной геометрии, с учётом принципа двойственности проективной геометрии, выполнить моделирование и визуализацию поверхностей тел Платона (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) в математическом пакете программирования Maple. Разработанные алгоритмы моделирования полезны при изучении студентами дисциплин по начертательной, аффинной, проективной и вычислительной геометрии при разработке алгоритмов моделирования и визуализации геометрических объектов.
**Ключевые слова:** геометрические тела Платона, система трёх плоскостей проекций, принцип двойственности проективной геометрии, реализация моделирования в математическом пакете Maple.

**Abstract**
The research is devoted to the Platonic geometric solids, which are studied in the discipline of descriptive geometry. In this case, the reference literature usually considers the geometric shapes of the surfaces of these bodies with an indication of the number of faces and edges, as well as their visual representation. The presented research considers the possibility of using analytical and computational geometry, taking into account the duality principle of projective geometry, to model and visualize the surfaces of Platonic solids (tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron, icosahedron) in the mathematical programming package Maple. The developed modeling

algorithms are useful for students studying disciplines in descriptive, affine, projective and computational geometry when developing algorithms for modeling and visualizing geometric objects.

**Keywords:** Plato's geometric solids, system of three projection planes, duality principle of projective geometry, implementation of modeling in the mathematical package Maple.

Рассматриваются последовательно геометрические тела Платона по количеству граней (рис. 1).

Именно эти геометрические формы, представленные и в справочной литературе (например, [3, 12]), позволили определить стратегию геометрического моделирования компьютерной графики (в основе модели оболочки заложены вершины, ребра, грани). Как правило, при проведении занятий по начертательной геометрии по данной теме [1, 6, 7, 14, 15] даются основополагающие положения с представлением наглядных моделей. Кроме того, данная тема прослеживается при научно-исследовательской работе студентов под руководством преподавателей [2, 5, 9, 13] и на последующих учебных дисциплинах [10].

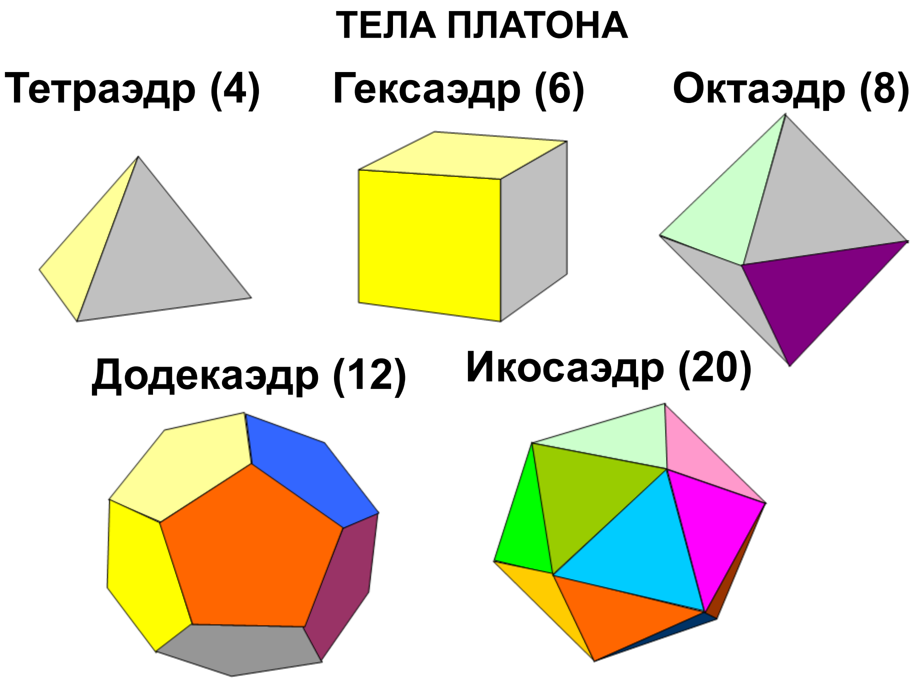


**Рис. 1.** Геометрические тела Платона

Следует отметить, что расположение этих геометрических тел в пространстве, относительно плоскостей и осей проекций [4, 8], полезно при составлении технических чертежей.

Расположение тетраэдра относительно координатных плоскостей может быть произвольным. Однако, авторами рассмотрен случай, когда одна вершина тетраэдра расположена в начале координат, а три другие на биссектрисах координатных плоскостей на равном расстоянии от начала координат. При этом, грани тетраэдра имеют уравнения: $-x+y+z=0$, $x-y+z=0$, $x+y-z=0$ и $x+y+z=2$, с границами от 0 до +1. Применяя принцип двойственности, можно убедиться, что будет получен также тетраэдр: в исходном тетраэдре 0-1-2-3 на каждой грани определяется точка на пересечении медиан. Таким образом, соединяя полученные точки в этих гранях, моделируется другой тетраэдр (L-M-N-P). На рис. 2 представлена визуализация в математическом пакете программирования Maple.

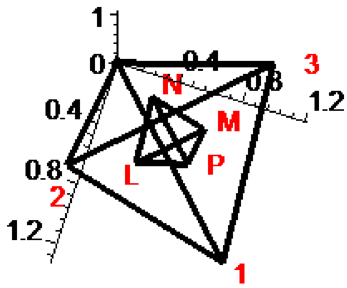


**Рис. 2.** Исходный и двойственный ему тетраэдр

У гексаэдра все шесть граней квадраты, сопряжённые и взаимно перпендикулярные. Предлагается три грани расположить в системе трёх плоскостей проекций. Показаны в совокупности визуализации два уравнения для системы трёх плоскостей проекций $x \cdot y \cdot z = 0$ и трёх граней гексаэдра $(x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1) = 0$ (рис. 3).

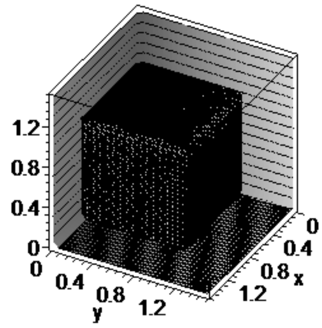


**Рис. 3.** Гексаэдр в системе трёх плоскостей проекций

Октаэдр предлагается расположить относительно координатных осей и плоскостей проекций: каждая вершина принадлежит соответствующей оси координат, каждая грань октаэдра находится в определенном октанте. Таким образом, получается октантов 8 и 8 граней октаэдра (рис. 4).

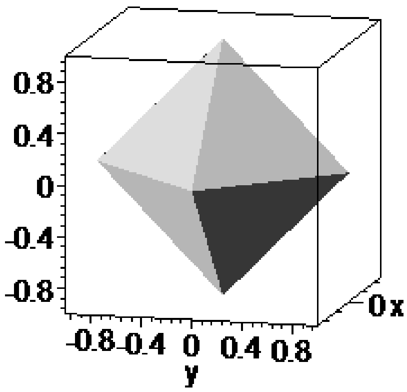


**Рис. 4.** Октаэдр

Кроме того, каждую грань октаэдра можно задать аналитическим выражением, как плоскость, проходящей через три точки (вершины октаэдра). Таким образом, в совокупности для всех восьми граней имеет место выражение:

$$\pm x \pm y \pm z = a,$$

где $a$ – задается координатой вершины октаэдра на каждой оси координат.

В соответствии с принципом двойственности, следует отметить, октаэдр можно построить, принимая во внимание следующее: гексаэдр, у которого 6 граней, а у октаэдра 6 вершин, у гексаэдра 8 вершин, а у октаэдра 8 граней.

Додекаэдр и икосаэдр соответствуют принципу двойственности: у додекаэдра 20 вершин (вершины правильных пятиугольников), а у икосаэдра 20 граней (равносторонние треугольники). Поэтому, проще сначала построить икосаэдр, а затем при помощи его моделировать додекаэдр.

Полная модель икосаэдра построена в математическом пакете программирования Maple.

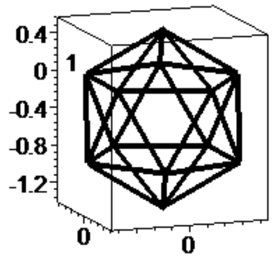


**Рис. 5.** Модель икосаэдра

Учитывая принцип двойственности, следует определить в каждом равностороннем треугольнике икосаэдра точку на пересечении медиан. По разработанному алгоритму средствами вычислительной геометрии в математическом пакете программирования, полученные точки соединяются, в результате чего получены 12 пятиугольников, которые образуют искомый додекаэдр.

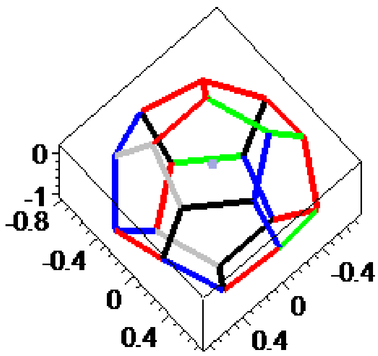


**Рис. 5.** Модель додекаэдра

Таким образом, разработанные алгоритмы моделирования полезны при изучении студентами дисциплин по начертательной, аффинной, проективной и вычислительной геометрии при разработке алгоритмов моделирования и визуализации геометрических объектов.

**Литература**

1. Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Ефремов А.В., Кадыкова Н.С. Проблемы геометро-графической подготовки студентов вузов // Геометрия и графика. 2023. Т.11, № 1. С. 4-22. DOI: 10.1273/2308-4898-2023-11-1-4-22.
2. Бойков А.А., Ефремов А.В., Рустамян К.Т. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75.

3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
4. Веннинджер, М. Модели многогранников. Пер. с англ. В. В. Фирсова. Под ред. и с послесл. И.М. Яглома., М.: «Мир», 1974. 236 с.
5. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Ефремов А.В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. № 1. С. 70-85. DOI: 10.1273/2308-4898-2023-11-1-70-85.
6. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Кадыкова Н.С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. № 1. С. 23-34. DOI: 10.1273/2308-4898-2023-11-1-23-34.
7. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Ефремов А.В., Кадыкова Н.С. Организация практико-ориентированного обучения на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. Т. 11, № 1. С. 35-43. DOI: 10.1273/2308-4898-2023-11-1-35-43.
8. Гильберт Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен; Пер.с нем. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
9. Графский О.А., Ланец С.А., Пономарчук Ю.В., Фалеева Е.В., Часовников Д.Р. Тела Платона: исследование моделирования и визуализация в Maple. Естественные и технические науки. М.: Спутник+. №1(200), 2025. – С. 36-40.
10. Графский О.А. Основы твердотельного моделирования: учеб. пособие / О.А. Графский, Е.В. Комялова, В.А. Языков – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2009. – 72 с.
11. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии: учебное пособие / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
12. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
13. Назарова Ж.А. Геометро-графическая подготовка студентов технических специальностей в современных условиях / Ж.А. Назарова // Геометрия и графика. 2024. Т.12. №. 1. С. 41-49. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-12-1-41-49.
14. Сальков Н.А. Изучение геометрии как важнейший способ развития эвристического мышления // Геометрия и графика. 2024. Т. 12. № 1. С 22–31. DOI: 10.12737/2308-3898-2024-12-1-22-31.
15. Федосеева М.А. Методика подготовки студентов технических вузов графическим дисциплинам // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. №. 1. С. 68–73. DOI: 10.12737/article_5c91f.