

О фракталах Ляпунова

On a Lyapunov fractals

Бяко В.А.

Студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва

Biako V.A.

Student, MIREA – Russian Technological University, Moscow

Бойков А.А.

Старший преподаватель кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва

e-mail: albophx@mail.ru

Bojkov A.A.

Senior Lecturer, Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University, Moscow

e-mail: albophx@mail.ru

Аннотация

В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна. Получены массивы изображений фрактала Ляпунова для символьических последовательностей длиной 2–8.

Ключевые слова: алгебраические фракталы, фрактал Ляпунова.

Abstract

The article presents the results of a student's scientific work, which may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, as well as to developers of software for graphic and product design. Arrays of Lyapunov fractal images have been obtained for symbolic sequences of length 2–8.

Keywords: algebraic fractals, Lyapunov fractals.

Введение

Наиболее известными и исследованными алгебраическими фракталами являются разновидности фракталов Жюлиа-Мандельброта [1]. При этом хорошо себя зарекомендовала методика изучения алгебраических фракталов путем совмещения в общей таблице миниатюр, полученных для разных начальных значений. В настоящем исследовании указанная методика применяется к другому классу алгебраических фракталов – фракталам Ляпунова [2].

1. Фрактал Ляпунова

Фрактальное изображение строится как совокупность цветных точек в области $[0; 4] \times [0; 4]$. Причем цвет каждой точки определяется значением экспоненты Ляпунова [2]. Фрактальное изображение определяется строкой чередующихся символов АВ, например, АВ, ААВ, ААВАВВА и т.п.

Количество строк длины 2–12 символов показано в табл. 1.

Число строк длины 2 – 12, состоящих из символов А и В

Длина (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Всего (2^n)	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Оригинальных	2	6	8	14	20	34	48	76	112	168	240

Таким образом, в отличие от фракталов Жюлия-Мандельброта, где отдельные изображения можно рассматривать как различные сечения-томограммы окрестностей многомерного фрактального объекта (гиперфрактала), здесь каждая оригинальная последовательность символов задает свое изображение. Все изображения нельзя объединить в общее пространство цветных точек, так как разные последовательности символов естественным образом нельзя объединить в общую координату.

Поэтому предложенная в [1] методика трансформируется в:

- перебор символьических последовательностей и построение оригинальных изображений;
- приближение отдельных областей полученных изображений для выявления деталей.

Для построения фрактальных изображений в соответствии с алгоритмом [2] была создана программа на языке Python. Меняя цветовые настройки, можно получить варианты одного и того же фрактального изображения (рис. 1).

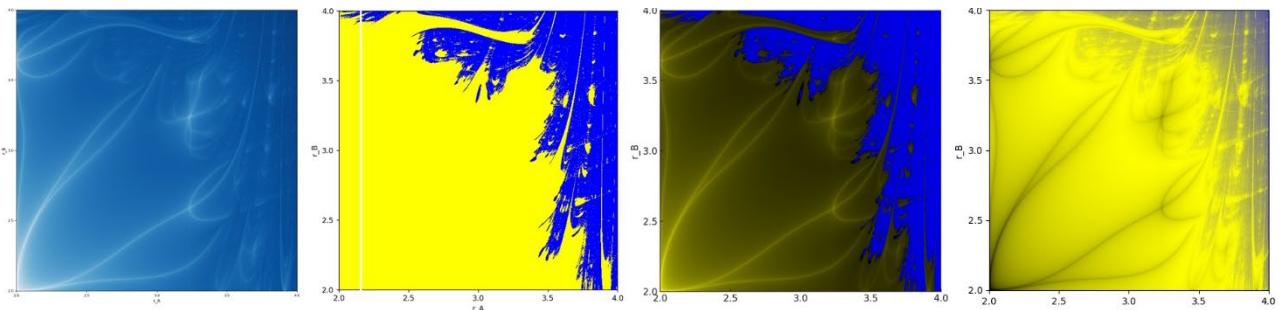


Рис. 1. Варианты одного фрактала, полученные при разных настройках цвета

Далее, меняя границы области, можно получить различные детали общего фрактального изображения (рис. 2).

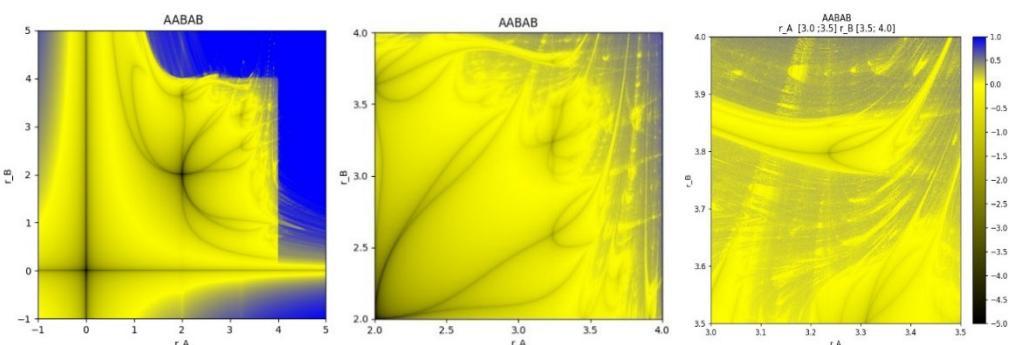


Рис. 2. Фрагменты одного фрактала, полученные для разных границ

2. Двух- и трехбуквенные фракталы

На рис. 2.1 и 2.2 показаны изображения для всех оригинальных 2- и 3- буквенных последовательностей, а также их детали.

3. Четырехбуквенные фракталы

На рис. 3.1–3.3 показаны изображения для всех оригинальных 4- буквенных последовательностей, а также их детали.

4. Пятибуквенные фракталы

На рис. 4.1–4.3 показаны изображения для всех оригинальных 5- буквенных последовательностей, а также их детали.

5. Шестибуквенные фракталы

На рис. 5.1–5.2 показаны изображения для всех оригинальных 6-буквенных последовательностей.

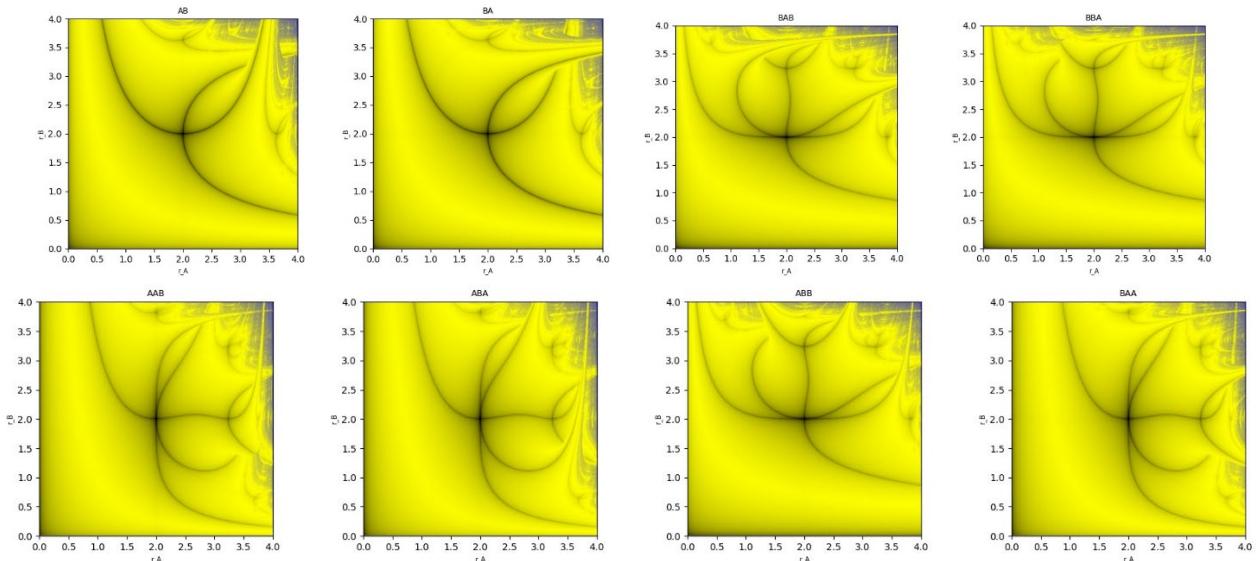


Рис. 2.1. Фракталы 2- и 3- буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$

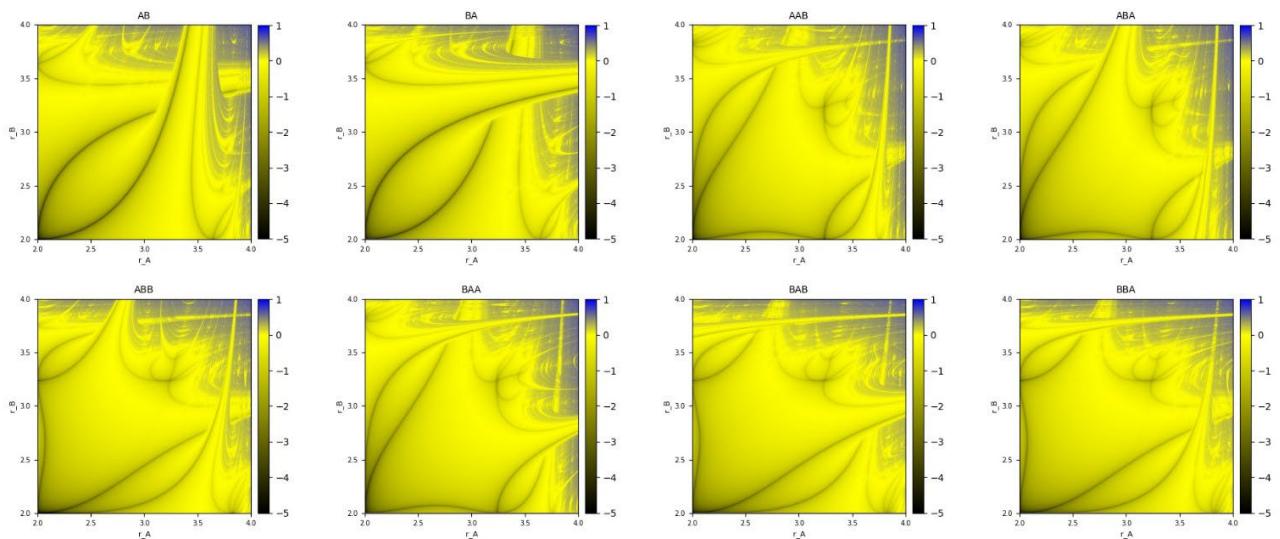


Рис. 2.2. Фракталы 2- и 3- буквенных последовательностей $[2;4] \times [2;4]$

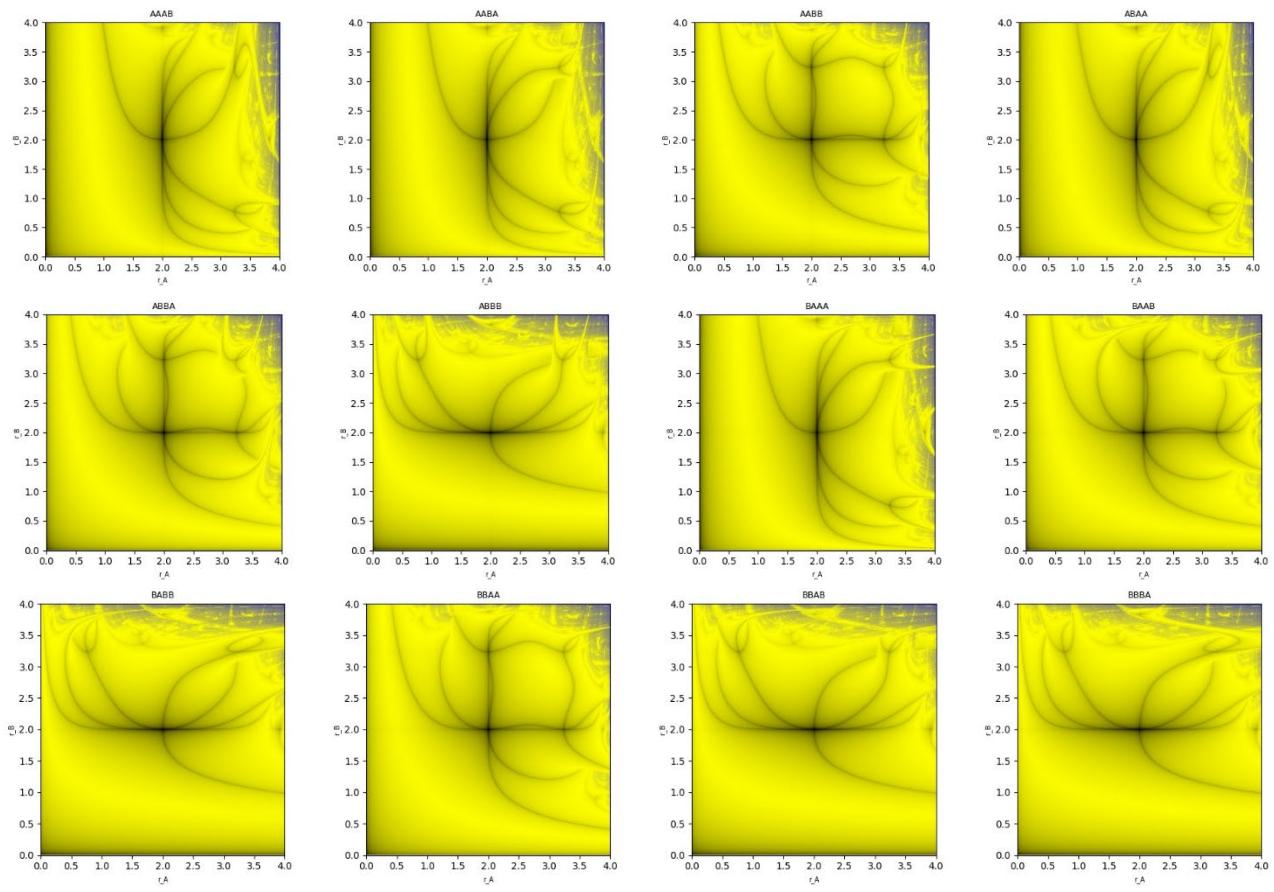


Рис. 3.1. Фракталы 4- буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$

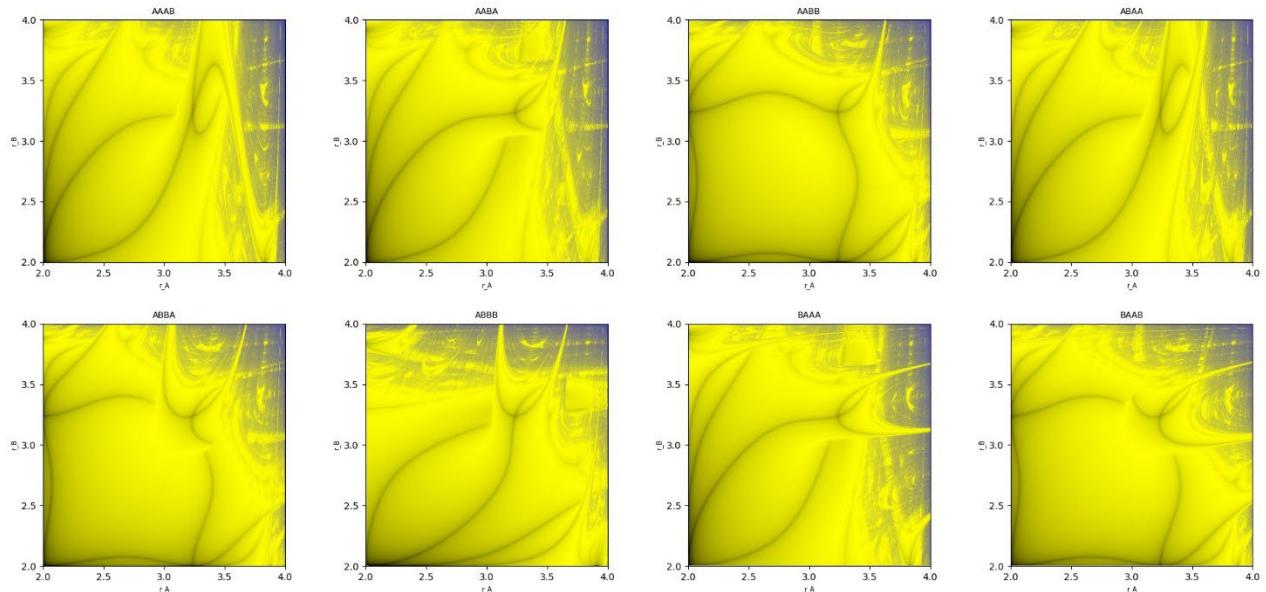


Рис. 3.2. Фракталы 4- буквенных последовательностей $[2;4] \times [2;4]$ (начало)

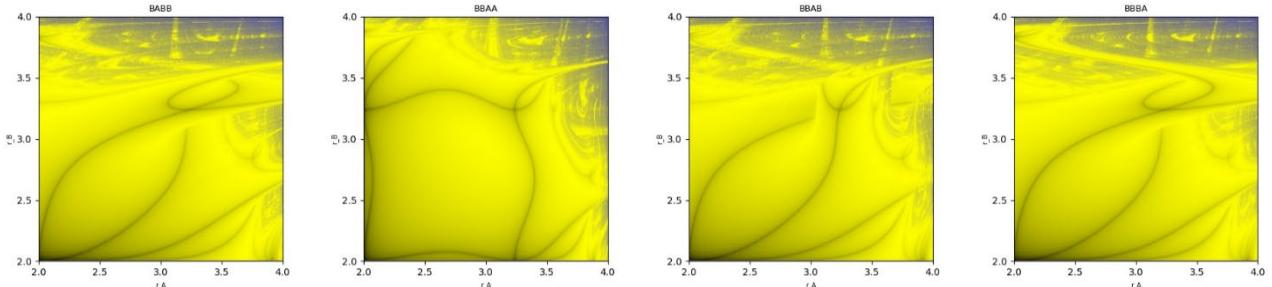


Рис. 3.3. Фракталы 4- буквенных последовательностей $[2;4] \times [2;4]$ (окончание)

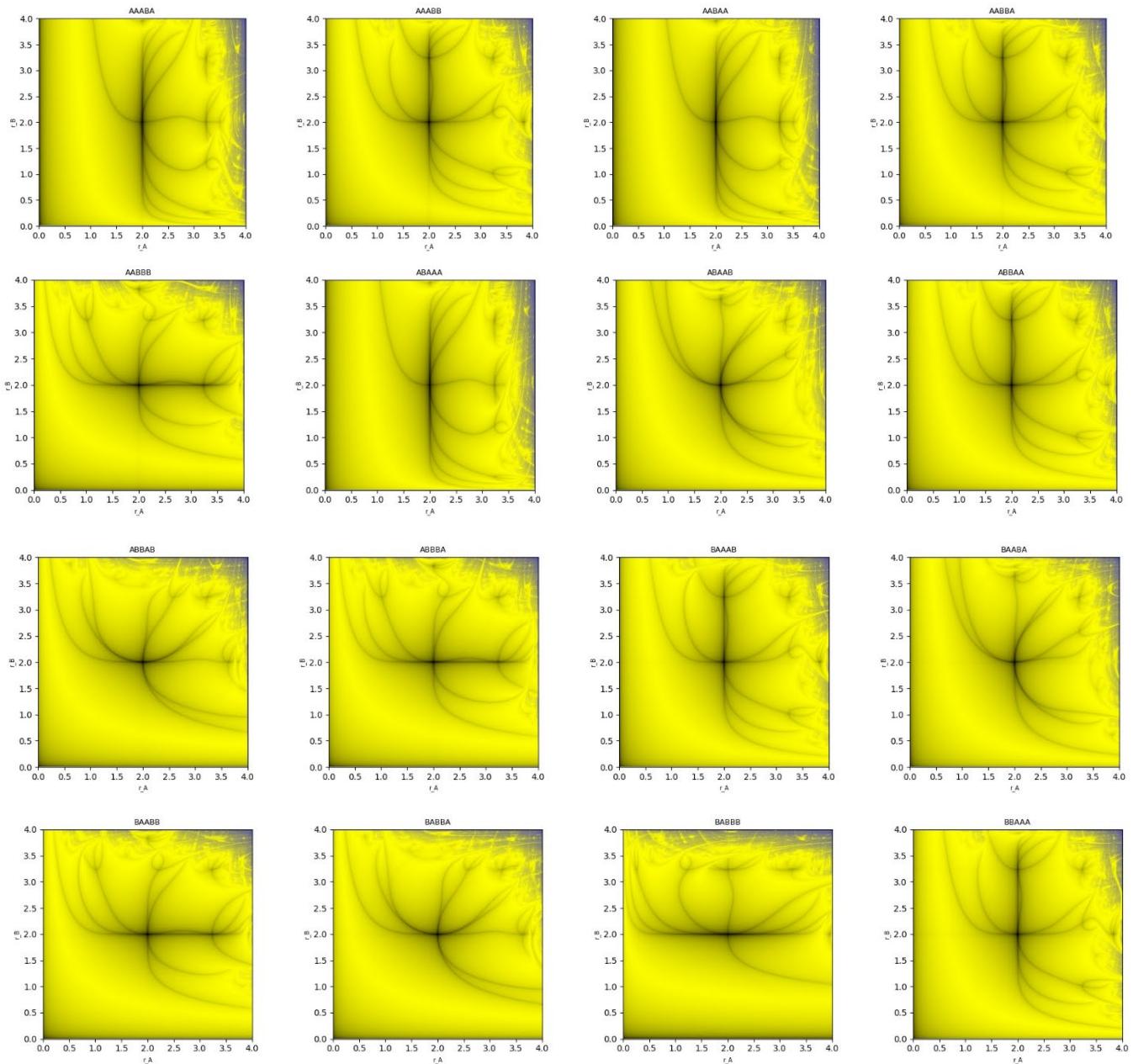


Рис. 4.1. Фракталы 5- буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$

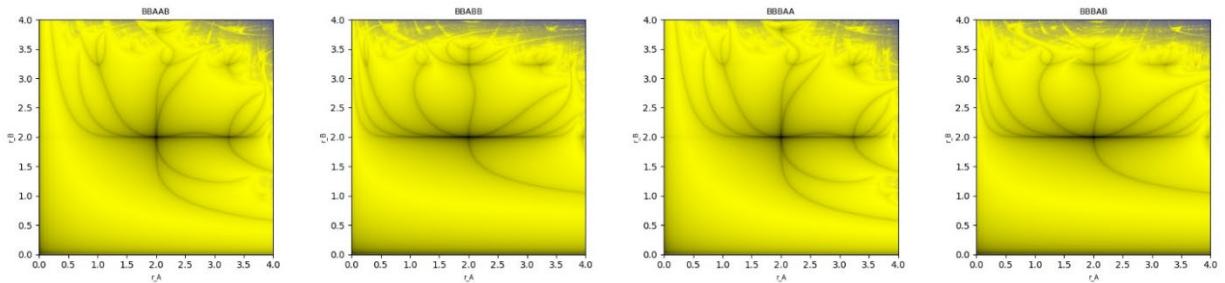


Рис. 4.2. Фракталы 5- буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (окончание)

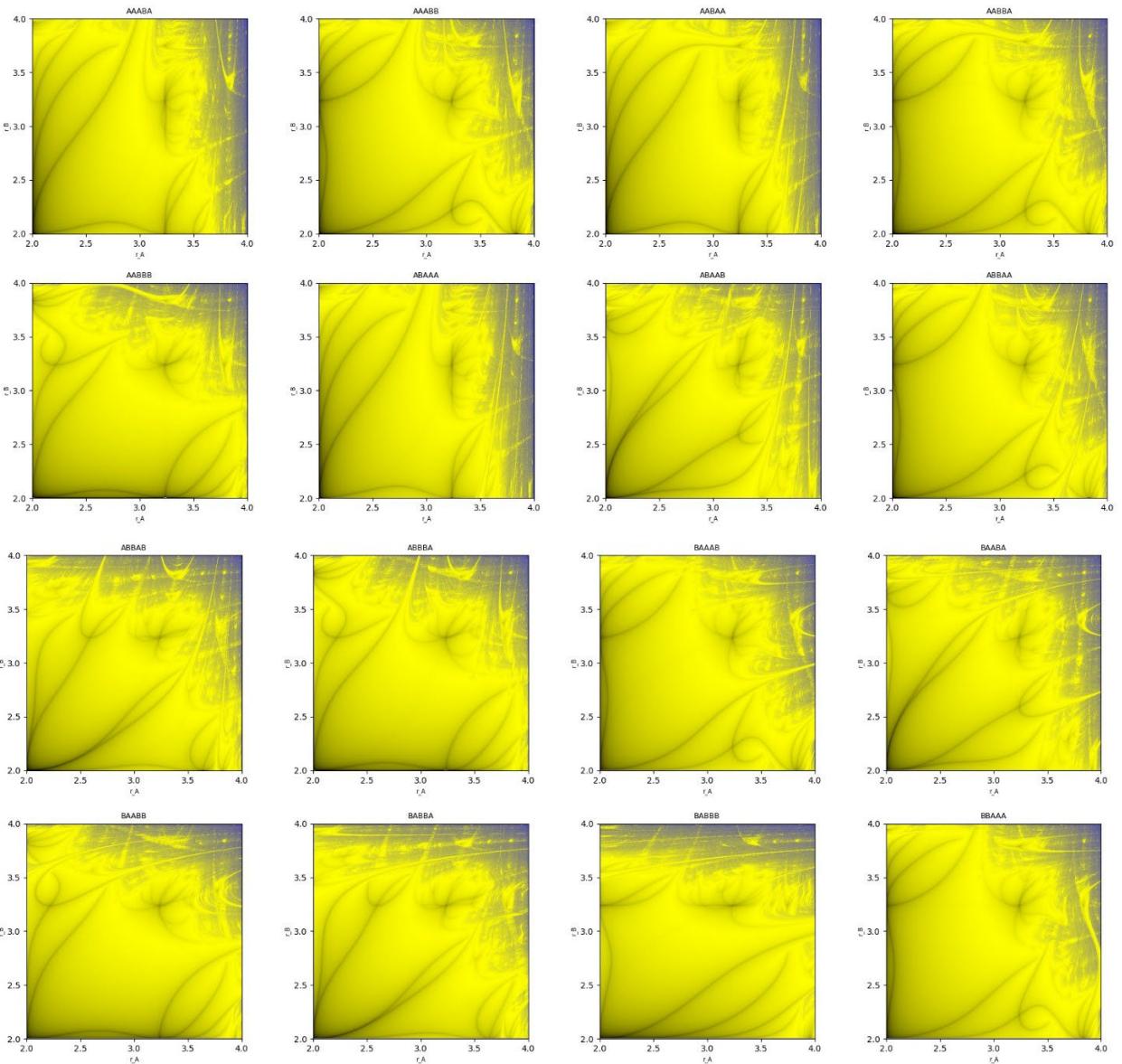


Рис. 4.3. Фракталы 5- буквенных последовательностей $[2;4] \times [2;4]$ (начало)

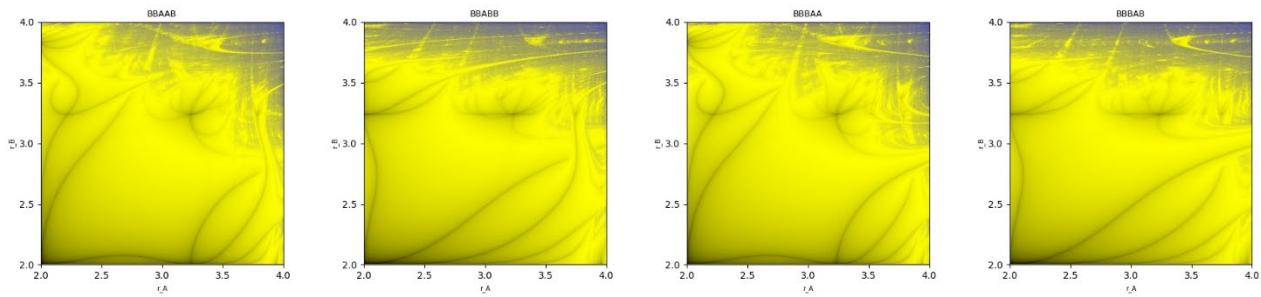


Рис. 4.4. Фракталы 5- буквенных последовательностей $[2;4] \times [2;4]$ (окончание)

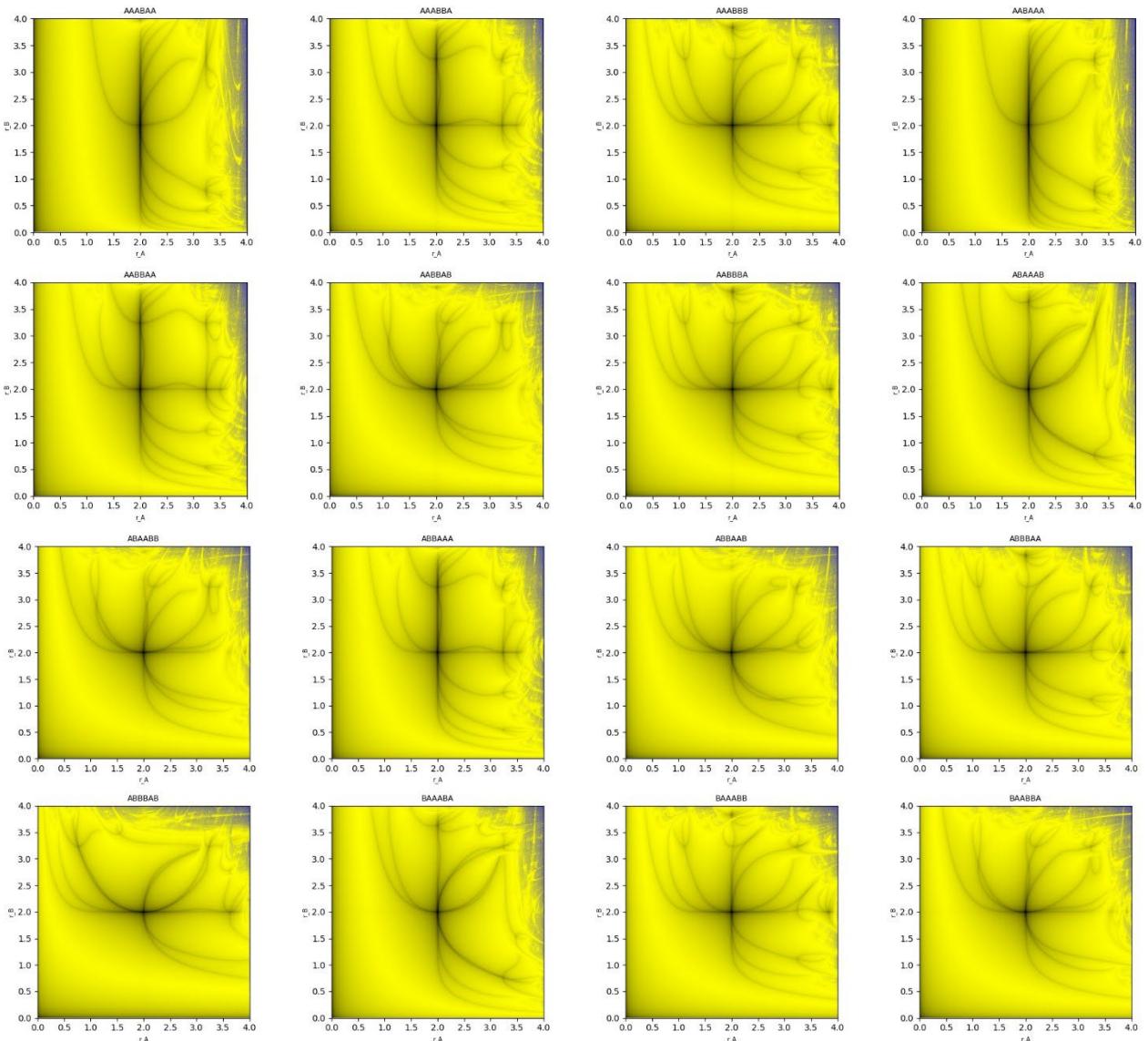


Рис. 5.1. Фракталы 6-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (начало)

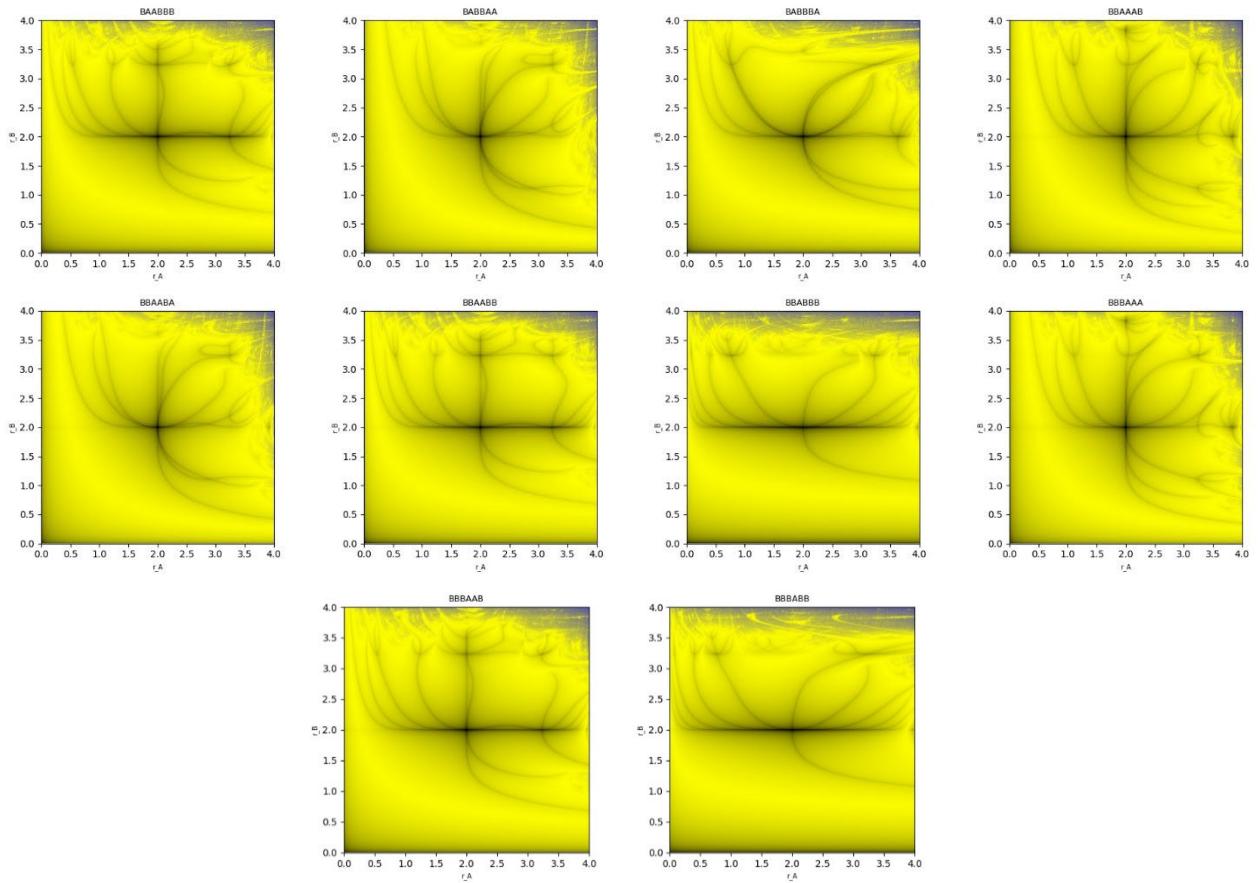


Рис. 5.2. Фракталы 6-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (окончание)

6. Семибуквенные фракталы

На рис. 6.1–6.3 показаны изображения для всех оригинальных 7-буквенных последовательностей.

7. Восьмибуквенные фракталы

На рис. 7.1–7.3 показаны изображения оригинальных 8-буквенных последовательностей.

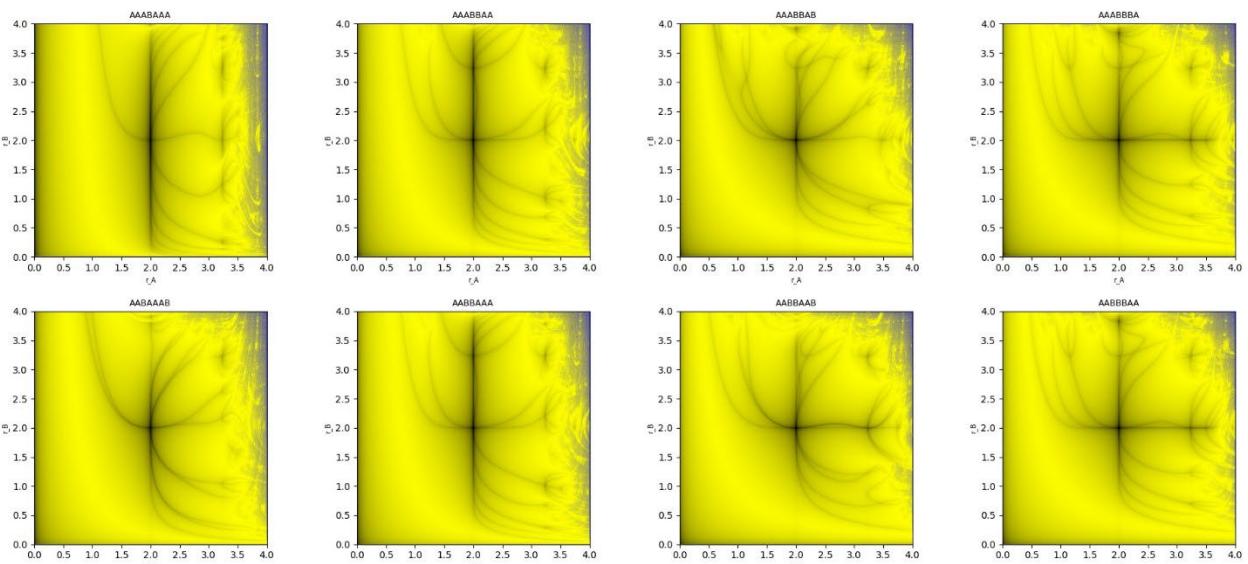


Рис. 6.1. Фракталы 7-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (начало)

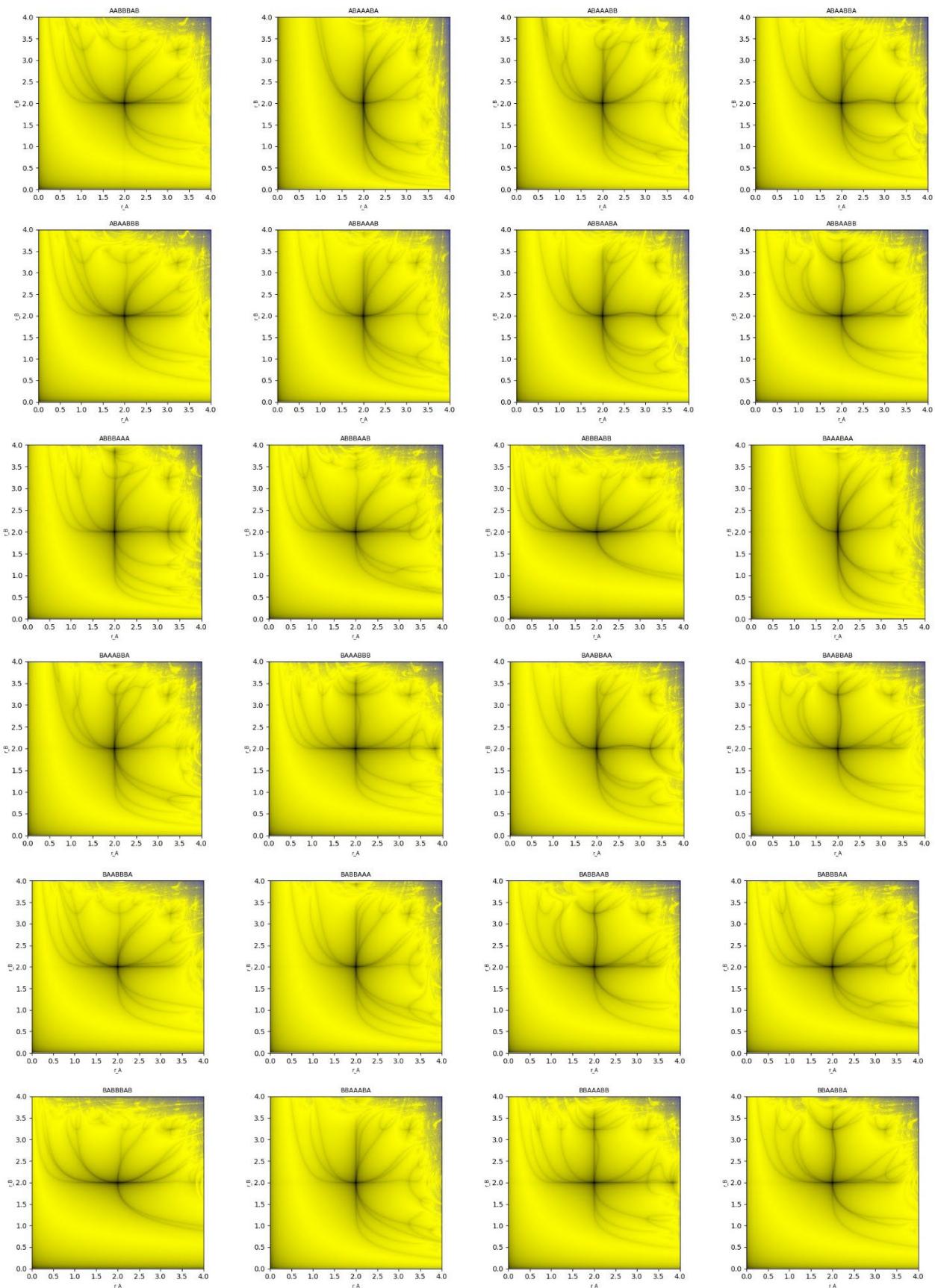


Рис. 6.2. Фракталы 7-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (продолжение)

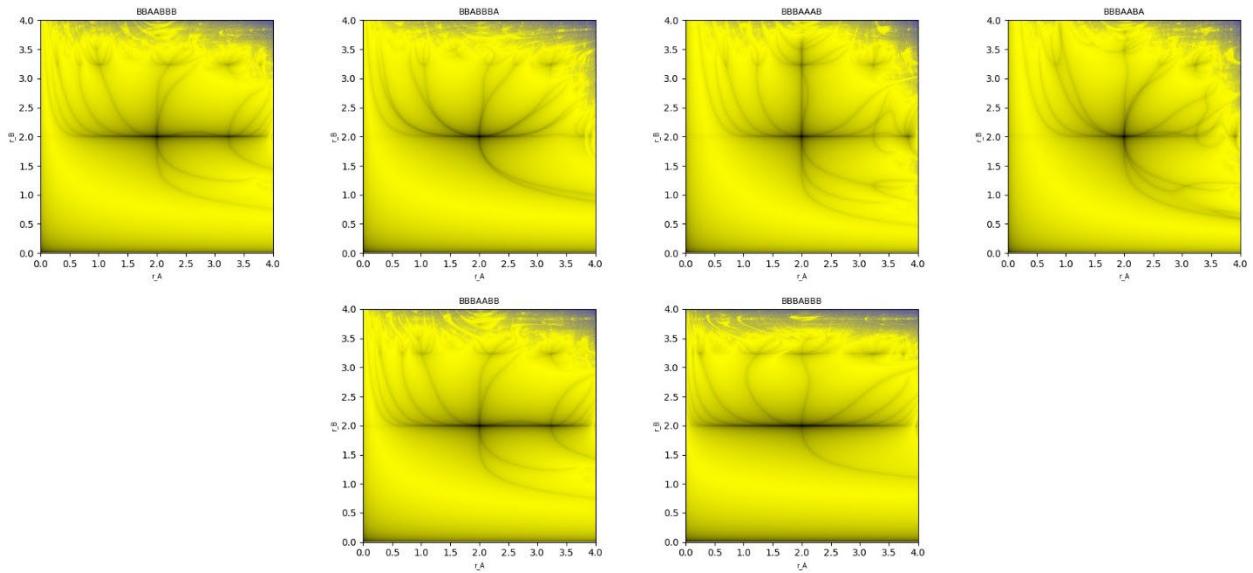


Рис. 6.3. Фракталы 7-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (продолжение)

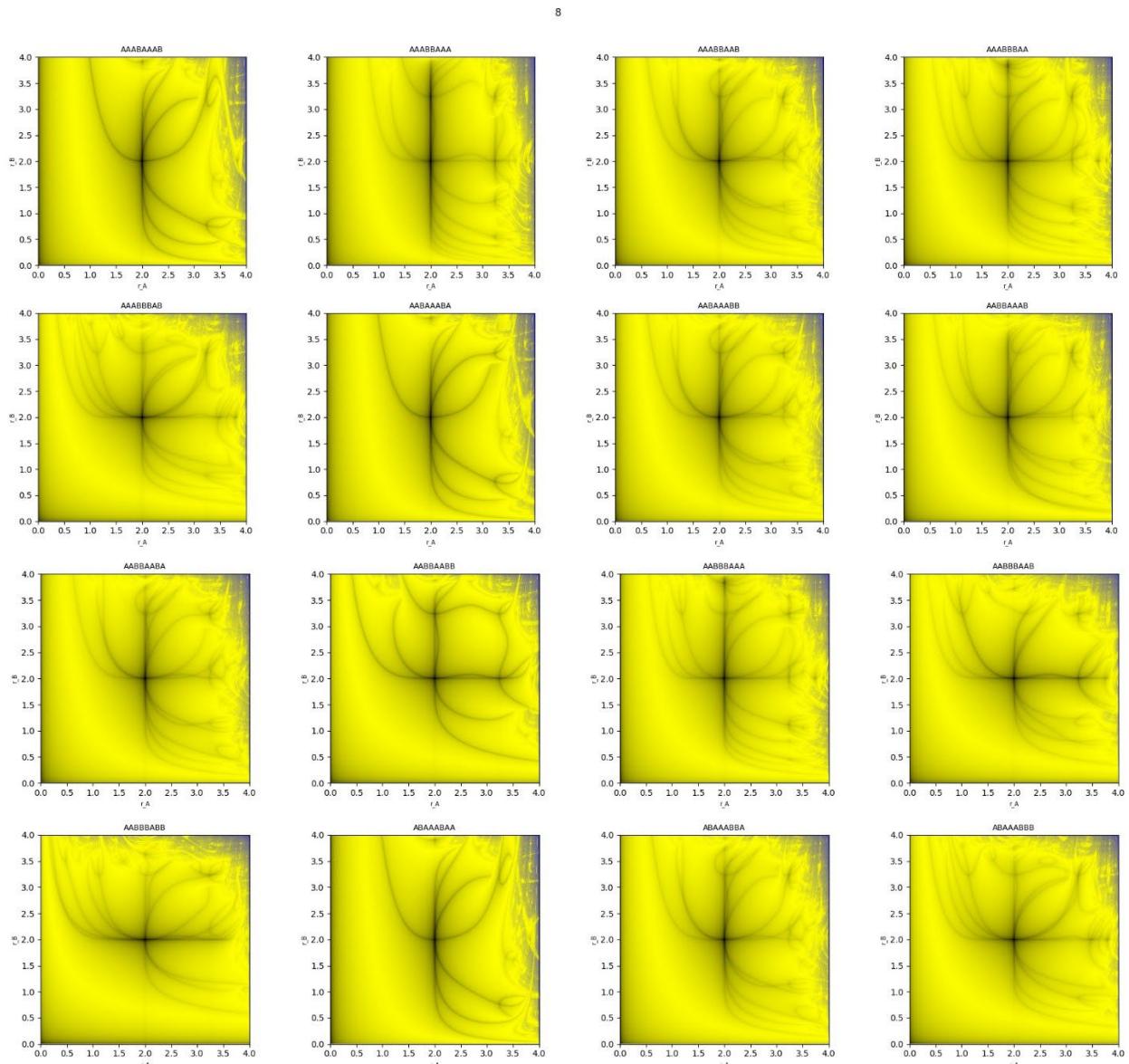


Рис. 7.1. Фракталы 8-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (начало)

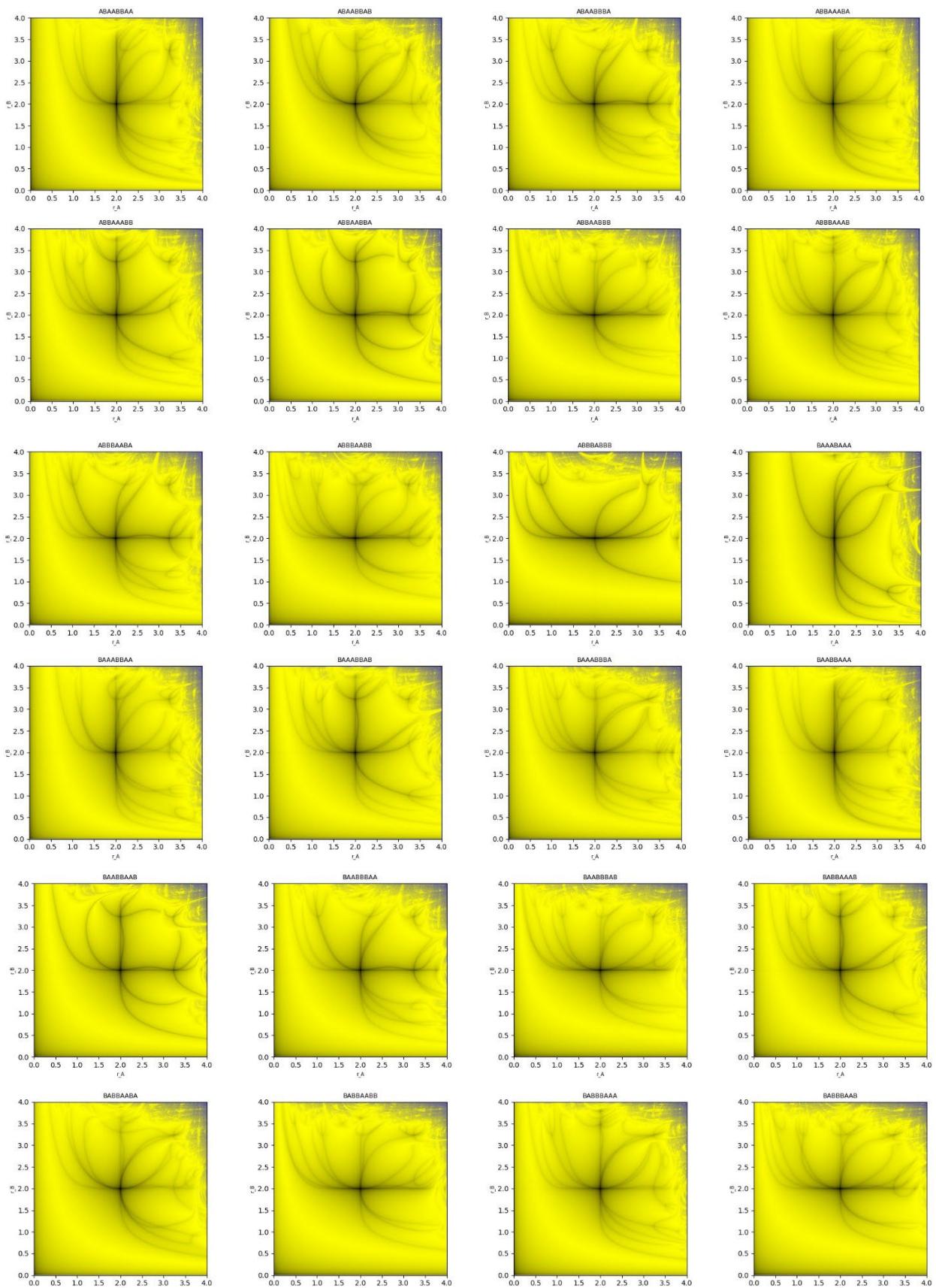


Рис. 7.2. Фракталы 8-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (продолжение)

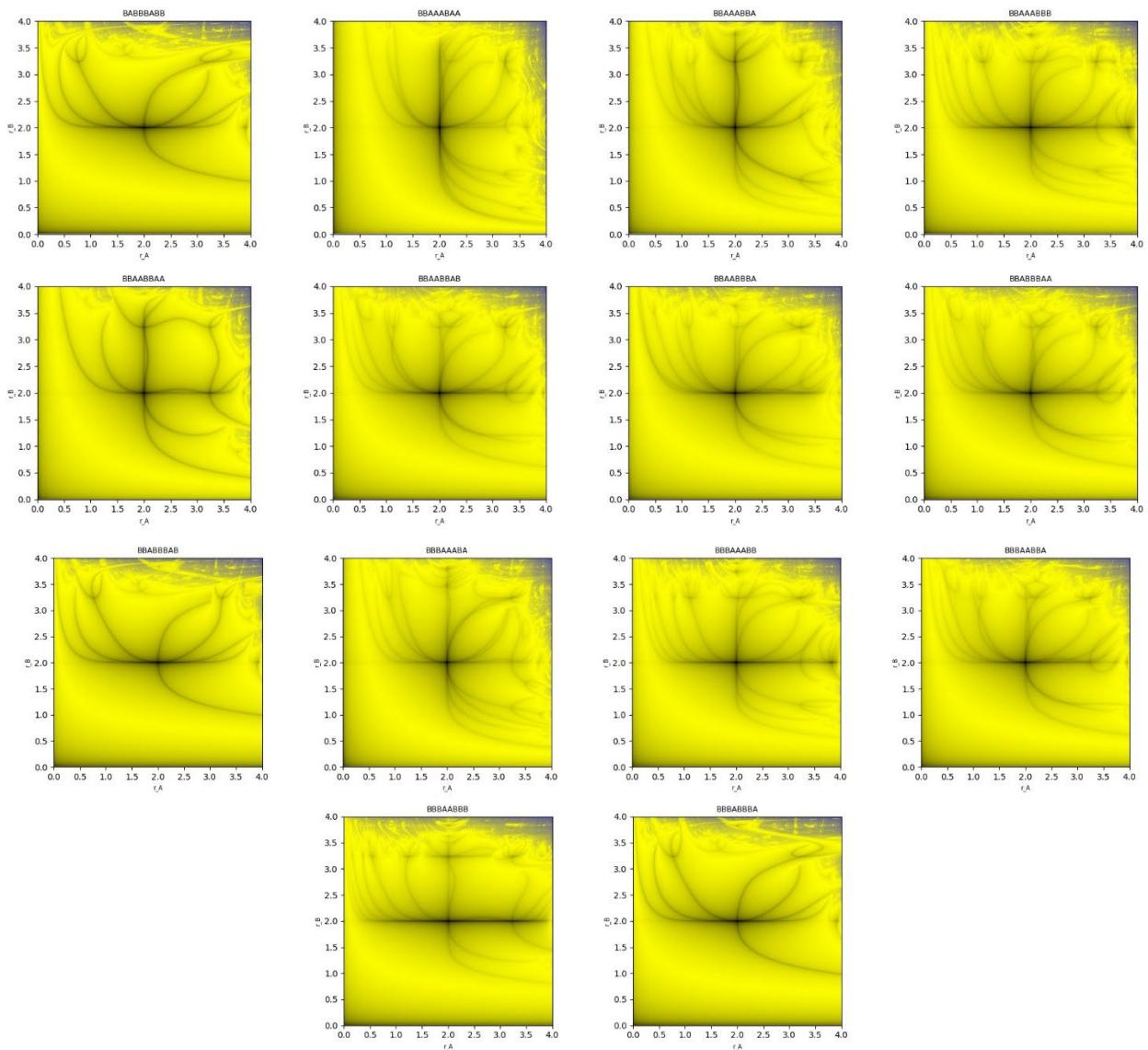


Рис. 7.3. Фракталы 8-буквенных последовательностей $[0;4] \times [0;4]$ (окончание)

Заключение и выводы

Данная работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, показанной в [3, 4, 5].

В работе были получены массивы фрактальных изображений для последовательностей символов 2–8, что позволяет произвести их оценку «в целом», делая выбор образа для задач дизайна. Подробное исследование фракталов Ляпунова ранее авторами не встречалось.

Возможно получение фракталов, напоминающих образы фракталов Ляпунова, для чисто вычислительных (без символов) моделей, например механических систем [6].

Представляет интерес дальнейшее построение таблиц миниатюр фракталов Ляпунова для большего числа символов (9–12), а также более подробных деталей.

Литература

1. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
 2. Бойков А.А., Ефремов А.В., Рустамян В.В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75.
 3. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Кадыкова Н.С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34.
 4. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Ефремов А.В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.
 5. Енот-Математик. Фрактал Ляпунова. – Текст: электронный // Дзен [сайт]. – URL: <https://dzen.ru/a/ZNdG5oksBGEYRlsP> (Дата обращения: 27.06.2025).
 6. Фрактал Ляпунова. – Текст: электронный // Рувики [сайт]. – URL: <https://ru.ruviki.ru/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%9B%D1%8F%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0> (Дата обращения: 26.06.2025).