

## МГД-ВОЛНОВОД ВО ВНЕШНЕЙ МАГНИТОСФЕРЕ И МЕХАНИЗМЫ ЕГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

## MHD WAVEGUIDE IN THE OUTER MAGNETOSPHERE AND MECHANISMS OF ITS EXCITATION

**В.А. Мазур<sup>†</sup>**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск,  
Россия*

**Д.А. Чуйко**

*Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск,  
Россия, chuiko@iszf.irk.ru*

**V.A. Mazur<sup>†</sup>**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics, Irkutsk, Russia*

**D.A. Chuiko**

*Institute of Solar-Terrestrial Physics, Irkutsk, Russia,  
chuiko@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** Неоднородность геомагнитного поля и плазмы во внешней приэкваториальной части магнитосферы обеспечивает существование канала низких значений скорости Альфвена, протянувшегося от лобовой области до далеких флангов магнитосферы как в утреннем, так и в вечернем секторах. Этот канал играет роль волновода для быстрых магнитозвуковых волн. При распространении вдоль волновода (т. е. в азимутальном направлении) собственная мода претерпевает определенную эволюцию. Меняются свойства волновода, под которые «подстраивается» собственная мода. В силу изменения сдвиговой скорости солнечного ветра вдоль магнитопаузы меняются условия развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. По той же причине меняются условия проникновения гидромагнитных волн из солнечного ветра в магнитосферу. В частности, на флангах процесс проникновения переходит в режим сверхотражения, что резко увеличивает мощность накачки магнитосферного волновода. Распространению БМЗ-моды вдоль волновода сопутствует наличие связанного с ней альфвеновского резонанса в глубине магнитосферы, в окрестности которого происходит диссипация энергии колебания. Вдоль силовых линий альфвеновский резонанс представляет собой стоячую альфвеновскую волну и поэтому достигает ионосферы и земной поверхности, в то время как БМЗ-моды волновода, запертые в канале низких значений скорости Альфвена, не могут наблюдаться на Земле.

В работе аналитически и численно исследуется эволюция колебаний в волноводе при их распространении от лобовой области до дальнего хвоста магнитосферы с учетом всех вышеуказанных факторов. Определяются спектральный состав колебаний и их пространственная структура. Теория позволяет описать свойства колебаний Pc3 и Pc5 — важнейших гидромагнитных колебаний магнитосферы. В частности, из нее следует, что колебания Pc3 локализованы в дневной части магнитосферы, а колебания Pc5 — на флангах, что полностью соответствует наблюдаемой картине.

**Ключевые слова:** внешняя магнитосфера, МГД-волновод, геомагнитные пульсации, сверхотражение, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

**Abstract.** The geomagnetic field and plasma inhomogeneities in the outer equatorial part of the magnetosphere are responsible for the existence of the channel with low Alfvén speeds, which extends from the nose to the far flanks of the magnetosphere, both in the morning and evening sectors. This channel serves as a waveguide in the fast magnetosonic waves. Travelling along the waveguide (i.e., in the azimuthal direction), an eigenmode undergoes evolution. Parameters of the waveguide vary along the way of the wave propagation and the eigenmode “adapts” to these parameters. Conditions of the Kelvin-Helmholtz instability change due to the variation of the solar wind speed along the magnetopause. Conditions of the penetration of solar wind hydromagnetic waves into the magnetosphere change due to the same variation. The wave penetration process turns to the overreflection regime, which sharply amplifies the pump level of the magnetospheric waveguide. The fast mode propagating along the waveguide is accompanied by the Alfvén resonance deep within the magnetosphere. Oscillation energy dissipation takes place in the vicinity of the Alfvén resonance. Along the magnetic field lines, the Alfvén resonance is a standing Alfvén wave; thus it reaches the ionosphere and the Earth’s surface. At the same time, no fast waveguide modes localized in the low Alfvén speed channel can be observed on the Earth.

Waveguide oscillations evolution is investigated in this paper both analytically and numerically taking into account all of the aforementioned factors as the oscillations propagate from the nose to the tail of the magnetosphere. Spectral composition and spatial structure of the oscillations are found. The theory allows for a description of Pc3 and Pc5 pulsations – the most important magnetospheric pulsations. As such it follows that Pc3 are localized on the dayside of the magnetosphere, whereas Pc 5 are localized in the dawn-dusk sectors – in full agreement with the observations.

**Keywords:** the outer magnetosphere, MHD-waveguide, geomagnetic pulsations, overreflection, Kelvin–Helmholtz instability.

### ВВЕДЕНИЕ

Структура магнитного поля и характер распределения плазмы во внешней магнитосфере обеспечивают существование в этой области МГД-волновода для быстрых магнитозвуковых (БМЗ) волн [Wright, 1994; Walker, 1998; Mann et al., 1999; Wright, Mann, 2006; Dmitrienko, 2013]. Экваториальное и меридиональное сечения этого волновода изображены на рис. 1 и 2. Внешней границей волновода является магнитопауза, на которой резкий скачок скорости быстрого магнитного звука приводит к его отражению и запираению внутри магнитосферы. Существование внутренней границы волновода обусловлено быстрым нарастанием скорости Альфвена по направлению к Земле как поперек магнитных оболочек, так и вдоль силовых линий. Как известно, БМЗ-волны отражаются от области больших значений скорости Альфвена. В результате образуется волноводный канал, лежащий в приэкваториальной области, примыкающий к магнитопаузе и протянувшийся в хвост магнитосферы на неопределенно большое расстояние [Mann et al., 1998; Sung et al., 2006].

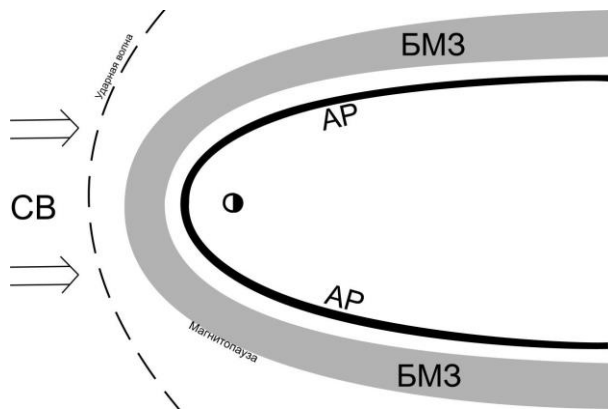


Рис. 1. Экваториальное сечение МГД-волновода. Штриховой линией изображен фронт ударной волны. Серым цветом выделена область распространения БМЗ-волн. Черная узкая полоса — область альфвеновского резонанса (резкого усиления поля колебания, лежащего в области непрозрачности для БМЗ). Стрелками показано течение солнечного ветра

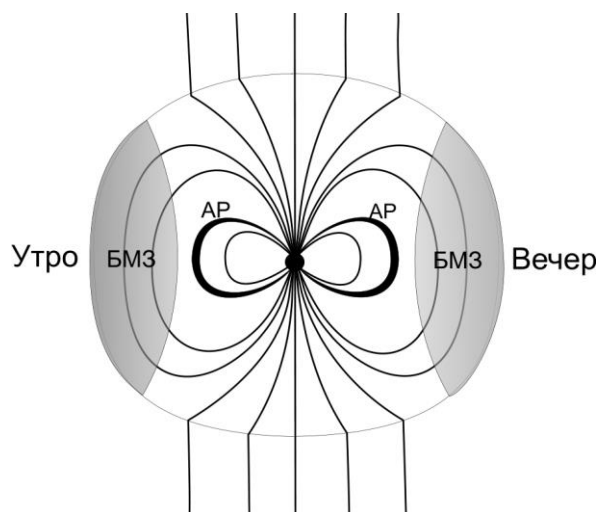


Рис. 2. Меридиональное сечение МГД-волновода плоскостью «утро–вечер». Тонкие линии — силовые линии магнитного поля

На рис. 1 и 2 изображена также область альфвеновского резонанса — резкого усиления поля колебания, лежащего в области непрозрачности для БМЗ, на тех силовых линиях, на которых частота колебания равна собственной альфвеновской частоте.

Два важнейших типа геомагнитных пульсаций — Pc3 и Pc5, — в которых заключена подавляющая часть энергии всех гидромагнитных колебаний магнитосферы, имеют прямое отношение к рассматриваемому волноводу. Колебания Pc3 наблюдаются в дневной полусфере, а Pc5 — на флангах магнитосферы. Этот волновод в большой степени определяет свойства геомагнитных пульсаций Pc3 и Pc5, и его наличие должно быть важным элементом теории этих колебаний.

В настоящей работе мы рассматриваем два механизма возбуждения колебаний волновода во внешней магнитосфере — проникновение волн из солнечного ветра и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе.

Свойства волн, проникающих из солнечного ветра, определяются свойствами головной ударной волны. Фронт головной ударной волны является мощным генератором гидромагнитного шума в переходном слое [Gurnett et al., 1979]. Характерная частота этого шума сравнительно мала, и он является источником геомагнитных пульсаций Pc5 [McPherron, 2005]. Другим источником гидромагнитных волн, падающих на магнитосферу, является циклотронная неустойчивость, развивающаяся в потоке протонов, отраженных от фронта ударной волны [Потапов, 1974; Гульельми и др., 1976; Potapov, Mazur, 1994]. Их характерная частота существенно выше, и они служат источником пульсаций Pc3. Особенностью отражения волн от магнитопаузы является возможность сверхотражения. При сверхотражении отрицательная энергия, уносимая отраженной волной, больше по модулю, чем отрицательная энергия падающей волны. В результате энергия поступает в магнитосферу [Wright, 1999; Leopovich et al., 2003; Mann, Walker, 2005; Kozlov, 2010].

Причиной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца является течение плазмы солнечного ветра относительно плазмы магнитосферы [Pu, Kivelson, 1983; Foullon et al., 2008].

Существование магнитосферного волновода, прилегающего к солнечному ветру, оказывает решающее влияние как на процесс проникновения гидромагнитных волн в магнитосферу [Мазур, 2010; Mazur, Chuiko, 2013b], так и на характер неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [Mazur, Chuiko, 2011, 2013a]. В утреннем секторе наблюдается усиленная активность альфвеновских колебаний мелкомасштабной азимутальной структуры. Такие колебания могут генерироваться неустойчивостями кольцевого тока [Liu, 1991; James, 2013] или внешними воздействиями [Mager, Klimushkin, 2007, 2008], которые мы не учитываем. Поэтому наши результаты применимы только к лобовому и вечернему секторам магнитосферы.

Во всех цитированных выше работах по теории проникновения волн в магнитосферу и теории неустойчивости Кельвина–Гельмгольца используются одномерно-неоднородные модели среды, учитывающие неоднородность только поперек магнитных

оболочек. Они не позволяют изучать влияние неоднородности вдоль магнитного поля и азимутальной неоднородности волновода, которые, конечно, существуют в реальной магнитосфере. В работе [Leonovich, Mazur, 2001] рассмотрены собственные БМЗ-моды в аксиально-симметричной дипольно-подобной модели магнитосферы, в которой плазма и магнитное поле неоднородны поперек магнитных оболочек и вдоль магнитного поля. С математической точки зрения это двумерно-неоднородная модель среды. В работе были определены частоты основных мод такого волновода и их пространственная структура. Если параметры внешней магнитосферы соответствуют ее лобовой части, то основные тоны волновода лежат в диапазоне Pc3–Pc4, а для параметров, отвечающих флангам, они лежат в диапазоне Pc5. Область прозрачности (распространения) для собственных мод в меридиональном сечении качественно совпадает с той, что изображена на рис. 2. В азимутальном направлении такой волновод, очевидно, однороден.

Настоящая работа посвящена исследованию роли азимутальной неоднородности как параметров самого магнитосферного волновода, так и условий его накачки неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца и проникновением немагнитосферных волн [Tomson et al., 2001, 2002; Ghosch, 2009; Stephenson, Walker, 2010]. Мы используем модель среды, однородную вдоль геомагнитного поля и неоднородную поперек магнитных оболочек и в азимутальном направлении. Такая модель в некотором смысле дополняет модель, рассмотренную в работе [Leonovich, Mazur, 2001]. Мы полагаем, что в совокупности результаты работы [Leonovich, Mazur, 2001] и настоящей работы дают достаточно полное представление о свойствах реального трехмерно-неоднородного волновода.

### 1. МОДЕЛЬ СРЕДЫ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ВКБ ПО АЗИМУТУ

В настоящей работе мы используем двумерно-неоднородную модель среды (рис. 3). В отличие от реальной магнитосферы, эта модель однородна по оси Z, силовые линии геомагнитного поля прямолинейны. Таким образом, все параметры плазмы и магнитного поля являются функциями двух координат – координаты x поперек магнитных оболочек (поперек волновода) и азимутальной координаты y (вдоль волновода).

Мы конкретизируем эти зависимости ниже (в разделе 3). Здесь же остановимся только на самых главных свойствах плазмы и магнитного поля в нашей модели. Будем полагать, что в магнитосфере плазма холодная, так что скоростью звука можно пренебречь по сравнению со скоростью Альфвена  $c_A$ . Плазму солнечного ветра, напротив, будем считать горячей и пренебрегать скоростью Альфвена по сравнению со скоростью звука  $c_S$ . Последнее означает, что наличием магнитного поля в солнечном ветре можно пренебречь. Из условия равновесия на магнитопаузе следует соотношение  $c_S/c_{AM} \sim (\rho_M/\rho_W)^{1/2}$ , где  $c_{AM}$  — ско-

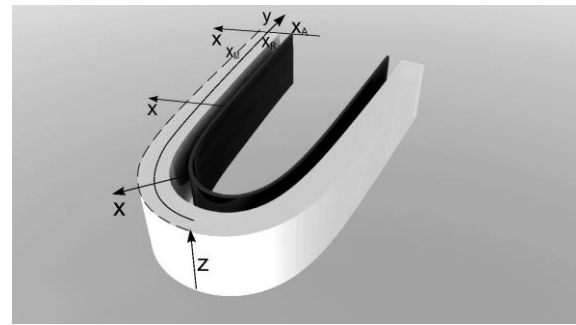


Рис. 3. Двумерно-неоднородная модель среды. Выделены область прозрачности для БМЗ-волн и область альфвеновского резонанса,  $x_M$  — координата магнитопаузы,  $x_R$  — внутренняя точка отражения БМЗ,  $x_A$  — точка альфвеновского резонанса. Геомагнитное поле направлено вдоль оси Z

рость Альфвена на магнитопаузе,  $\rho_M$  и  $\rho_W$  — плотности плазмы во внешней магнитосфере и солнечном ветре соответственно. Поскольку  $\rho_M$  в 10–30 раз меньше, чем  $\rho_W$ , то параметр  $\alpha = c_S/c_{AM}$  достаточно мал. В аналитической части нашей работы мы будем использовать теорию возмущений по малому параметру  $\alpha$ .

В условиях реальной магнитосферы характерный масштаб неоднородности  $L_x$  по координате x в несколько раз меньше, чем характерный масштаб неоднородности  $L_y$  по координате y. Для построения аналитической теории мы будем считать, что  $L_x \ll L_y$ . Тогда можно применить метод двух масштабов, который позволяет свести решение двумерно-неоднородной задачи к последовательному решению двух одномерно-неоднородных задач.

Сделаем важное замечание. Введенные выше координаты x и y не являются декартовыми из-за искривленности волновода. Характерный радиус кривизны по порядку величины совпадает с масштабом  $L_y$ . Нас будут интересовать колебания, длина волны которых вдоль волновода  $\lambda_y$  много меньше  $L_y$ . Из простых соображений ясно, что для таких колебаний искривленность волновода не имеет существенного значения, поэтому далее в уравнениях мы будем рассматривать координаты x и y как декартовы.

Солнечный ветер в нашей модели будем считать однородным по оси x. Фактически масштаб его неоднородности по осям x и y одного порядка и совпадает с масштабом  $L_y$  в магнитосфере. Другими словами, неоднородность плазмы солнечного ветра по нормали к магнитопаузе существенно слабее, чем такая же неоднородность в магнитосфере. Это и оправдывает сделанное предположение. В работе [Mazur, Chuiko, 2013a] было исследовано влияние на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца нормальной к магнитопаузе неоднородности солнечного ветра и выяснено, что не слишком сильная неоднородность не меняет качественным образом свойства неустойчивости.

Поскольку наша модель среды стационарна и однородна по оси Z, то можно рассматривать колебания с заданной частотой  $\omega$  и заданным значением волнового вектора  $k_z$ . Тогда для холодной двумерно-неоднородной плазмы магнитосферы система уравнений идеальной МГД приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{c_A^2} - k_z^2 \right) \xi_x + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{c_A^2} - k_z^2 \right) \xi_y = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\xi_x, \xi_y$  — проекции вектора смещения плазмы,  $c_A = c_A(x, y)$  — скорость Альфвена, зависящая от двух координат.

В рамках метода двух масштабов решение системы уравнений (1, 2) ищется в виде

$$\begin{aligned} \xi_x &= \bar{\xi}_x(x, y) \exp \left[ i \int k_y(y) dy \right], \\ \xi_y &= \bar{\xi}_y(x, y) \exp \left[ i \int k_y(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь предполагается применимость метода ВКБ по переменной  $y$ . Экспоненты в выражениях (3) являются главным порядком приближения ВКБ и описывают быструю зависимость от переменной  $y$ . Зависимость от этой переменной функций  $\bar{\xi}_x(x, y)$  и  $\bar{\xi}_y(x, y)$  гораздо слабее. Рассматриваемые как функции переменной  $y$ , они играют роль предэкспонент, т. е. представляют собой следующий порядок в методе ВКБ.

Подставим выражения (3) в систему уравнений (1), (2) и запишем в операторном виде:

$$(\hat{L}_0 + \hat{L}_1) \bar{\xi} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_x \\ \bar{\xi}_y \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c_A^2} - k_z^2 & ik_y \frac{\partial}{\partial x} \\ ik_y \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\omega^2}{c_A^2} - k_y^2 - k_z^2 \end{pmatrix}, \\ \hat{L}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 2ik_y \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{dk_y}{dy} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

В рамках приближения ВКБ оператор  $\hat{L}_0$  является оператором главного порядка, а  $\hat{L}_1$  — оператором следующего порядка. Поэтому уравнение (4) можно решать методом последовательных приближений:  $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1$ . В главном порядке из уравнения  $\hat{L}_0 \bar{\xi}_0 = 0$  получаем соотношение

$$\bar{\xi}_{0y} = - \frac{ik_y}{\frac{\omega^2}{c_A^2} - k_y^2 - k_z^2} \frac{\partial \bar{\xi}_{0x}}{\partial x} \quad (6)$$

и уравнение на  $\bar{\xi}_{0x}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\omega^2 / c_A^2 - k_z^2}{\omega^2 / c_A^2 - k_y^2 - k_z^2} \frac{\partial \bar{\xi}_{0x}}{\partial x} + \left( \frac{\omega^2}{c_A^2} - k_z^2 \right) \bar{\xi}_{0x} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение является обыкновенным дифферен-

циальным уравнением по переменной  $x$ , переменная  $y$  играет в нем роль параметра.

Уравнение (7) должно быть дополнено граничными условиями по переменной  $x$ . В настоящем разделе мы ограничимся нулевым приближением по малому параметру  $\alpha$ . Предел  $\alpha \rightarrow 0$  при заданном значении  $\rho_M$  следует трактовать как предел  $\rho_W \rightarrow \infty$ . Но солнечный ветер бесконечной плотности не позволяет колебаться плазме магнитосферы нормально к магнитопаузе, т. е. на магнитопаузе, при  $x = x_M$  должно быть равно нулю смещение плазмы  $\bar{\xi}_{0x}$ .

Второе граничное условие должно относиться к глубине магнитосферы, к области, асимптотически далекой от магнитопаузы. Мы будем считать, что эта область соответствует пределу  $x - x_M \rightarrow -\infty$ . Здесь имеет место область непрозрачности, в которой амплитуда колебания быстро стремится к нулю. Таким образом, граничные условия для уравнения (7) имеют вид

$$\bar{\xi}_{0x} |_{x=x_M} = 0, \quad \bar{\xi}_{0x} |_{x-x_M \rightarrow -\infty} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) вместе с граничными условиями (8) при каждом заданном значении переменной  $y$  представляет собой краевую задачу по переменной  $x$ . Эта задача определяет дискретный набор собственных функций и собственных значений, причем роль собственного значения играет величина  $k_y$ :

$$\bar{\xi}_{0x} = \bar{\xi}_{0x}^{(n)}(x, y), \quad k_y = \bar{k}_y^{(n)}(y).$$

Собственная функция и собственное значение как от параметра зависят от переменной  $y$ .

Главный порядок приближения ВКБ определяет зависимость от переменной  $y$  собственного значения  $k_y = \bar{k}_y^{(n)}(y)$ , но не собственной функции  $\bar{\xi}_0 = \bar{\xi}_0(x, y)$ . Последняя определяется только с точностью до множителя, который может быть произвольной функцией  $y$ . Эту произвольность устраняется в следующем порядке приближения ВКБ.

В этом порядке

$$\hat{L}_0 \bar{\xi}_1 + \hat{L}_1 \bar{\xi}_0 = 0. \quad (9)$$

Функция нулевого приближения  $\bar{\xi}_0 = \bar{\xi}_0(x, y)$  фиксируется условием разрешимости уравнения (9) для поправки  $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1(x, y)$ . Это условие получается умножением уравнения на вектор-строку  $\bar{\xi}_0^* = (\bar{\xi}_{0x}^*, \bar{\xi}_{0y}^*)$  и интегрированием по  $x$  в пределах  $(-\infty, x_M)$ . С помощью интегрирования по частям нетрудно показать, что первый член получаемого уравнения обращается в нуль. При этом следует использовать граничные условия для функции  $\bar{\xi}_{1x}$ :

$$\bar{\xi}_{1x} |_{x=x_M} = 0, \quad \bar{\xi}_{1x} |_{x-x_M \rightarrow -\infty} = 0.$$

Граничные условия для поправки  $\bar{\xi}_{1x}$  совпадают с таковыми для функции нулевого приближения  $\bar{\xi}_{0x}$  по той причине, что этим условиям удовлетворяет смещение плазмы  $\bar{\xi}_x$  во всех порядках приближения ВКБ. В результате соотношение (9) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{x_M} \bar{\xi}_0^* \hat{L}_1 \bar{\xi}_0 dx = 0.$$

Используя выражение (5) и соотношение (6), его можно привести к виду

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{k_y} \int_{-\infty}^{x_M} q^2 |\bar{\xi}_{0y}|^2 dx = 0, \quad (10)$$

где  $q^2 = (\omega^2 / c_A^2) - k_z^2$ . Это условие определяет указанный выше множитель, зависящий от  $y$ , уже с точностью до произвольного постоянного множителя. Следует подчеркнуть, что и собственные функции, и собственные значения зависят как от параметра от частоты колебания  $\omega$ .

Из физических соображений следует полагать, что соотношение (10) есть условие постоянства интегрального (проинтегрированного по поперечному сечению) потока энергии волны вдоль волновода. Убедимся в этом. В выражение для компоненты вектора Пойнтинга

$$S_y = \frac{c}{8\pi} (E_z^* B_x - E_x^* B_z) + \kappa.c.$$

подставим выражения, следующие из уравнений идеальной МГД:

$$E_x = -i \frac{\omega}{c} B_0 \xi_y, \quad E_z = 0, \quad B_x = ik_z B_0 \xi_x,$$

$$B_z = -B_0 \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right).$$

В результате, учитывая соотношение (6), получаем

$$S_y = \frac{\omega}{4\pi} B_0^2 \frac{q^2}{k_y} |\xi_y|^2.$$

Интегральный поток энергии:

$$S = \int_{-\infty}^{x_M} S_y dx = \frac{\omega B_0^2}{4\pi} \frac{1}{k_y} \int_{-\infty}^{x_M} q^2 |\xi_y|^2 dx. \quad (11)$$

Мы видим, что соотношение (10) действительно является условием постоянства вдоль волновода интегрального потока энергии:

$$dS/dy = 0.$$

Уравнение (7) для собственной функции имеет точно такой же вид, как и уравнение в среде, однородной по координате  $y$ . Поэтому для описания колебаний в двумерно-неоднородной среде важнейшее значение имеют результаты, полученные в одномерно-неоднородной модели (неоднородной по  $x$ , но однородной по  $y$ ). Исследованию колебаний в рамках такой модели среды был посвящен ряд наших недавних работ [Mazur, Chuiko, 2011, 2013a, b].

## 2. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

В среде, однородной по координатам  $z$  и  $y$ , могут быть заданы компоненты  $k_z$  и  $k_y$ . В таком случае естественной является задача определения собственных колебаний рассматриваемой системы — собственных частот  $\omega = \omega(k_y, k_z)$  и соответствующих им собственных функций  $\xi_x = \xi_x(x, k_y, k_z)$ . Именно

такая задача решалась в работах [Mazur, Chuiko, 2011, 2013a].

В пределе  $\alpha=0$  магнитопауза играет роль неподвижной стенки, поэтому колебания внутри магнитосферы никак не связаны с колебаниями в солнечном ветре. При заданном значении  $c_{AM}$  предел  $\alpha=0$  означает  $c_S=0$ , т. е. звуковые волны в системе отсчета солнечного ветра не распространяются, а являются неподвижными возмущениями плотности. Их частота в этой системе отсчета равна нулю. Вследствие эффекта Доплера в системе отсчета, связанной с магнитосферой, эти колебания имеют частоту  $\omega = k_y V$ , где  $V$  — скорость солнечного ветра. Эти колебания можно назвать сносowymi.

В этом же пределе  $\alpha=0$  собственные колебания магнитосферы, т. е. собственные моды магнитосферного волновода, образуют дискретный набор:  $\omega = \bar{\omega}_n(k_y, k_z)$ ,  $x_x = \xi_x^{(n)}(x, k_y, k_z)$ .

Конкретный вид этих функций определяется профилем скорости Альфвена  $c_A(x)$ . Если для нее можно использовать линейное разложение

$$c_A(x) = c_{AM} \left( 1 - \frac{x - x_M}{2l_M} \right), \quad (12)$$

где  $c_{AM}$  — скорость Альфвена на магнитопаузе,  $l_M$  — характерный масштаб нарастания скорости Альфвена в глубину магнитосферы, то собственная функция выражается через функцию Эйри, а собственная частота дается выражением [Mazur, Chuiko, 2011]

$$\bar{\omega}_n = k_t c_{AM} \left[ 1 + \frac{\bar{\eta}_n}{2(k_t l_M)^{2/3}} \right]. \quad (13)$$

Здесь  $\Delta = l_M^{1/3} / k_t^{2/3} \ll l_M$  — масштаб решения по оси  $x$ ,  $(-\bar{\eta}_n)$  — нули производной функции Эйри [Abramowitz, Stegun, 1965] (первые несколько значений:  $\bar{\eta}_0 = 1.02$ ,  $\bar{\eta}_1 = 3.25$ ,  $\bar{\eta}_2 = 4.82$ ). Предполагается, что  $k_t l_M \gg 1$ , где  $k_t = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ .

Наличие альфвеновского резонанса приводит к появлению у собственной частоты мнимой части — декремента затухания. Альфвеновский резонанс расположен на магнитной поверхности, координата которой  $x_A$  удовлетворяет условию  $c_A(x_A) = \omega / k_z$ . Эта поверхность находится в области непрозрачности для БМЗ-колебаний, а при выполнении условия  $k_t l_M \gg 1$  к тому же достаточно далеко от области прозрачности. Поэтому просачивание энергии колебаний волновода в окрестность альфвеновского резонанса затруднено и декремент затухания  $\nu_A$ , обусловленный диссипацией в этой окрестности, мал [Mazur, 2010]:

$$\nu_A = \omega \delta_A, \quad \delta_A = (k_t l_M)^2 \exp\left(-\frac{4}{3} k_t l_M\right). \quad (14)$$

Таким образом, в пределе  $\alpha=0$ ,  $\delta_A=0$  в рассматриваемой модели системы «магнитосфера — солнечный ветер» имеются два типа колебаний — собственные моды магнитосферного волновода  $\omega = \bar{\omega}_n$  и сносowe колебания солнечного ветра  $\omega = k_y V$ . Частоты этих колебаний как функции скорости ветра

показаны на рис. 5. Видно, что моды пересекаются. Это означает, что в точках пересечения имеет место вырождение. Как известно, вырождение устраняется при учете малых эффектов  $\alpha \neq 0$ ,  $\delta_A \neq 0$ .

Малая поправка к реальной части сама по себе не представляет особого интереса, за исключением того, что она определяет характер «пересоединения» ветвей колебаний нулевого приближения. В работах [Mazur, Chuiko, 2011, 2013a] установлено, что «пересоединение» происходит так, как изображено на рис. 6.

Малые мнимые части частоты, наоборот, очень важны, так как они описывают новый физический эффект — неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Определяющее влияние на свойства этой неустойчивости в нашей модели оказывает наличие в магнитосфере МГД-волновода и альфвеновского резонанса. Инкремент неустойчивости с учетом этих обстоятельств вычислен в работе [Mazur, Chuiko, 2013a]. Графики инкремента как функции параметра  $\omega_w = k_y V$  (доплеровского сдвига частоты) для различных мод изображены на рис. 7.

Отметим, что параметр  $\omega_w$  при заданном значении  $k_y$  пропорционален скорости ветра  $V$ , так что указанные графики можно рассматривать как зависимость от  $V$ .

В работе [Mazur, Chuiko, 2013a] получены аналитические выражения для зависимости  $\gamma_n(\omega_w)$  в трех важных областях — вблизи порога неустойчивости, вблизи максимума инкремента и для асимптотически больших значений  $\omega_w$ . Ниже мы приводим упрощенные формулы, в которых опущены несущественные множители порядка единицы.

Вблизи порога  $\omega_w = \tilde{\omega}_{n-1}$  (для основной моды  $n=0$  следует полагать  $\tilde{\omega}_{n-1} = \omega_A$ )

$$\gamma_n = \alpha \omega^{1/2} (\omega_w - \tilde{\omega}_{n-1})^{1/2}. \quad (15)$$

Вблизи максимума инкремента в точке  $\omega_w = \bar{\omega}_n$

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha} \omega \left[ 1 - \frac{(\omega_w - \bar{\omega}_n)^2}{8\alpha\omega^2} \right] - V_A. \quad (16)$$

Характерная ширина инкремента  $\Delta\omega_w \sim \sqrt{\alpha}\omega$ . Наконец, при  $\omega_w - \bar{\omega}_n \gg \Delta\omega_w$

$$\gamma_n = \frac{\alpha\omega}{\omega_w - \bar{\omega}_n} - V_A. \quad (17)$$

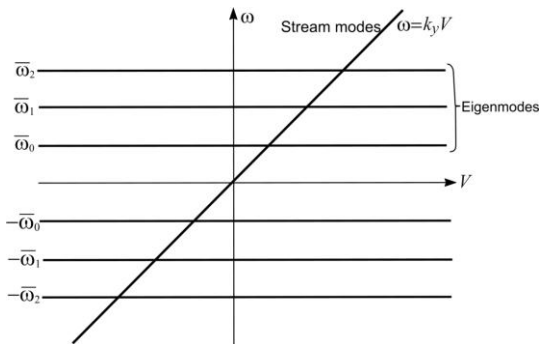


Рис. 5. Частоты собственных мод магнитосферного волновода и сносных колебаний солнечного ветра как функции скорости ветра в нулевом порядке  $\alpha=0$ . В этом приближении колебания в солнечном ветре и магнитосфере не взаимодействуют

Состыковывая эти формулы в промежуточных точках, можно получить выражения, качественно верно описывающие инкремент во всей области неустойчивости.

Для моды  $n=1$  инкремент отрицателен в интервале  $\omega_w < \omega_A$ , а для мод  $n \geq 2$  — в интервале  $\omega_w < \tilde{\omega}_{n-2}$ . Аналитические выражения для инкремента в этих интервалах в определенном смысле аналогичны формулам (15)–(17). Так, для моды  $n=1$  в интервале  $\omega_w < \omega_A$  получаем

$$\gamma_1 = -\alpha \omega^{1/2} (\omega_A - \omega_w)^{1/2}. \quad (18)$$

Для мод  $n \geq 2$  вблизи точки  $\omega_w = \tilde{\omega}_{n-2}$

$$\gamma_n = -\alpha \omega^{1/2} (\tilde{\omega}_{n-2} - \omega_w)^{1/2}, \quad (19)$$

вблизи минимума в точке  $\omega_w = \bar{\omega}_{n-2}$

$$\gamma_n = -\sqrt{\alpha} \omega \left[ 1 - \frac{(\omega_w - \bar{\omega}_{n-2})^2}{8\alpha\omega^2} \right] - V_A \quad (20)$$

и асимптотически далеко от минимума, при  $\bar{\omega}_{n-2} - \omega_w \gg \Delta\omega_w$ ,

$$\gamma_n = -\frac{\alpha\omega}{\bar{\omega}_{n-2} - \omega_w} - V_A. \quad (21)$$

Вторым механизмом возбуждения колебаний в магнитосферном волноводе является проникновение в него волн из солнечного ветра. В работе [Mazur, Chuiko, 2013b] вычислена мощность накачки магнитосферного волновода  $Q$  падающей волной:

$$Q = \frac{\omega}{\omega - k_y V} \frac{4v_A v_w}{(v_A + v_w)^2 + (\omega - \bar{\omega}_n)^2} S_w. \quad (22)$$

Здесь  $S_w$  — поток энергии падающей волны в системе отсчета, связанной с солнечным ветром,

$$v_w = \omega \chi(w), \quad w = \frac{\omega - k_y V}{k_y c_s}, \quad (23)$$

$$\chi(w) = \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w|w|} \theta(w^2 - 1).$$

Волны, распространяющиеся в солнечном ветре, можно разделить на две группы: опережающие, фазовая скорость которых вдоль волновода больше скорости ветра  $\omega/k_y > V$ , и отстающие, у которых  $\omega/k_y < V$ . Опережающие волны имеют положительную энергию. Они испытывают частичное отражение от магнитопаузы: амплитуда отраженной волны меньше, чем амплитуда падающей, коэффициент отражения меньше единицы. Часть положительного потока энергии падающей волны проникает в волновод. Отстающие волны имеют отрицательную энергию. Они испытывают сверхотражение: амплитуда отраженной волны больше, чем падающей. Коэффициент отражения больше единицы и в зависимости от параметров волны может принимать сколь угодно большие значения. Падающий поток приносит отрицательную энергию, но отраженный уносит большую отрицательную энергию. В результате в магнитосферу проникает также положительный поток энергии, в этом случае ничем не ограниченный.

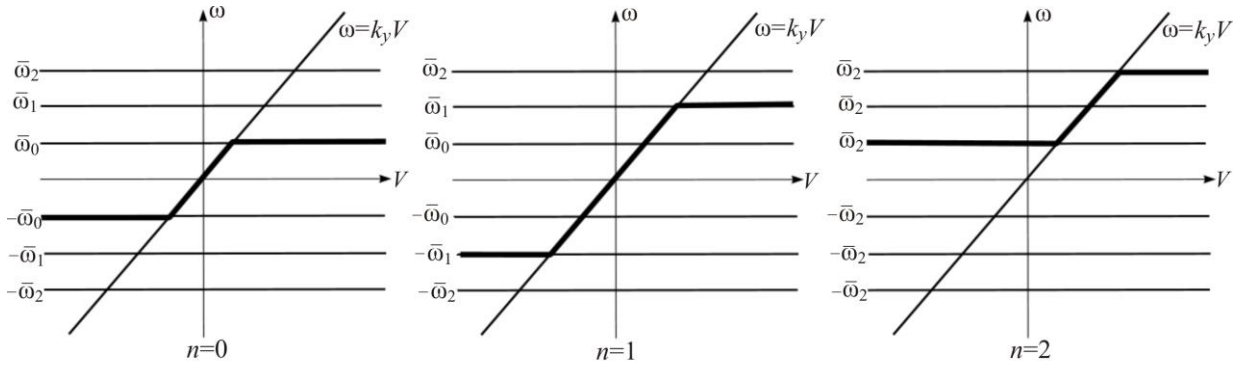


Рис. 6. Частоты собственных мод системы «магнитосфера — солнечный ветер» в нулевом порядке  $\alpha=0$  как результат «пересоединения» собственных мод магнитосферного волновода и сносных колебаний солнечного ветра

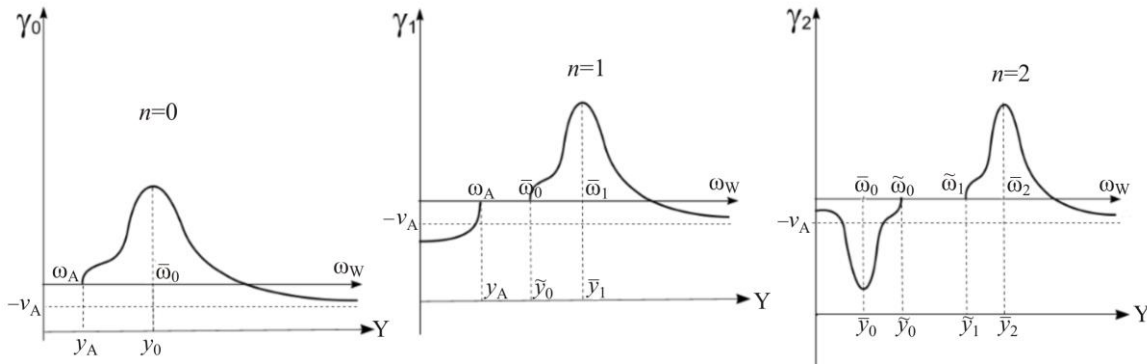


Рис. 7. Схематические графики зависимости инкремента неустойчивости Кельвина–Гельмгольца  $\gamma_n$  от параметра  $\omega_w = k_y V$  и от координаты  $y$  для мод  $n=0, 1, 2$ . Области отрицательных значений обусловлены наличием диссипации в областях альфвеновского резонанса

### 3. АЗИМУТАЛЬНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ ВОЛНОВОДА

Для исследования влияния азимутальной неоднородности волновода на распространение собственных мод необходимо задать зависимость существенных параметров среды от азимутальной координаты  $y$ . Для качественного аналитического исследования достаточно знать общий характер указанных зависимостей, но для численных расчетов необходимо задать их явно. Мы примем следующие выражения:

$$V(y) = 600 \frac{y/L}{1 + y/L} \text{ км/с}, \tag{24}$$

$$c_{AM}(y) = \left( 200 + \frac{800}{1 + y^2/L^2} \right) \text{ км/с}.$$

Здесь  $L$  — характерный масштаб неоднородности по координате  $y$ . Положим  $L=5 \cdot 10^4$  км. Для скорости звука примем соотношение  $c_s(y) = 0.15 c_{AM}(y)$ , это означает, что малый параметр  $\alpha = c_s / c_{AM} = 0.15$  является константой. На рис. 8 изображены функции (24) и  $c_s(y)$ . Будем считать, что по координате  $z$  в волноводе возбуждается основной тон, поэтому  $k_z = \pi / L_z$ , где  $L_z$  — вертикальный размер волновода. Мы положим  $L_z=5 \cdot 10^4$  км. Наконец, для характерного поперечного масштаба волновода примем значение  $l_z=2 \cdot 10^4$  км.

Следует подчеркнуть, что особую роль играет зависимость  $V=V(y)$ . Скорость ветра меняется от  $V=0$  в лобовой точке магнитосферы при  $y=0$  до максимальных значений в ее далеком хвосте. Поэтому зависимость частоты моды от скорости ветра  $V$ , приведенная на рис. 6, в значительной мере превращается в зависимость от координаты  $y$ , хотя, конечно, играют роль и зависимости от  $y$  других величин.

В рамках одномерно-неоднородной модели среды дисперсионное уравнение для мод колебаний системы «магнитосфера — солнечный ветер» можно записать в виде

$$\omega = \omega_n(k_y, k_z, c_{AM}, l_M, V, c_s). \tag{25}$$

Подразумевается, что частота моды есть функция волнового вектора  $k_y$ , а все остальные величины — волновой вектор  $k_z$  и величины  $c_{AM}, l_M, V, c_s$ , характеризующие модель среды, — рассматриваются как заданные параметры. Но дисперсионное уравнение можно трактовать не только как зависимость частоты от волнового вектора, но и наоборот — как зависимость волнового вектора от частоты. Для этого нужно решить (25) относительно  $k_y$ :

$$k_y = k_{yn}(\omega, k_z, c_{AM}, l_M, V, c_s). \tag{26}$$

Именно это уравнение определяет квазиклассический волновой вектор в рамках приближения ВКБ по координате  $y$ . При этом параметры, характеризующие среду, и волновой вектор  $k_z$  считаются задан-

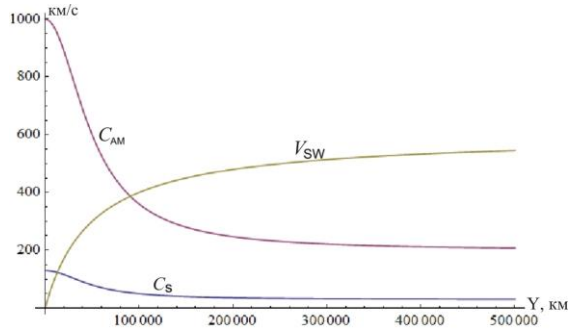


Рис. 8. Азимутальная зависимость параметров  $V(y)$ ,  $c_{AM}(y)$ ,  $c_s(y)$

ными функциями координаты  $y$ :  $c_{AM}=c_{AM}(y)$ ,  $l_M=l_M(y)$ ,  $c_s=c_s(y)$ ,  $k_z=k_z(y)$ . Тогда соотношение (26) можно записать в виде

$$k_y = k_{yn}(y, \omega).$$

В нашей модели среды и в нулевом приближении по параметру  $\alpha$  (которым мы ограничиваемся для реальной части частоты) дисперсионное уравнение (25) составляется из отрезков двух зависимостей  $\omega = k_y V$  и  $\omega = \bar{\omega}_n(k_y)$ . Решая эти соотношения относительно  $k_y$ , получаем

$$k_y = k_{yW} \equiv \frac{\omega}{V(y)}, \quad k_y = \bar{k}_{yn}(y, \omega). \quad (27)$$

Для  $\bar{k}_{yn}(y, \omega)$  в рамках приближения ВКБ из выражения (13) имеем

$$\bar{k}_{yn}^2(y, \omega) = \bar{k}_n^2(y, \omega) - k_z^2(y),$$

$$\bar{k}_n(y, \omega) = \frac{\omega}{c_{AM}(y)} \left\{ 1 - \frac{\bar{n}_n}{2} \left[ \frac{c_{AM}(y)}{\omega l_M(y)} \right]^{2/3} \right\}. \quad (28)$$

Схематические графики функций (27) показаны на рис. 9.

Через  $\bar{y}_n$  обозначены абсциссы точек пересечения кривых (27). Функция  $k_y = k_{yn}(y, \omega)$  также составляется из отрезков зависимостей (27). Каким именно образом — легко понять из рис. 6. Соответствующие графики для различных значений  $n$  приведены на рис. 10.

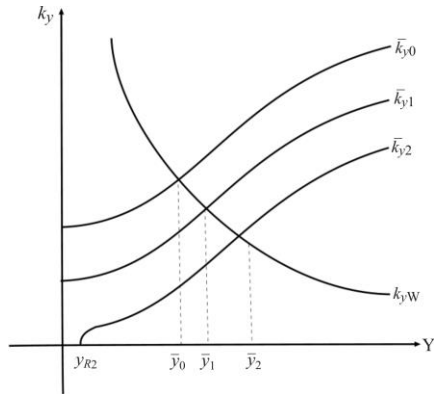


Рис. 9. Схематические графики зависимости от  $y$  функции  $k_{yW} = \omega/V(y)$  и семейства функций  $\bar{k}_{yn}(y, \omega)$ . Опорные точки  $\bar{y}$  определяются как абсциссы пересечений  $k_{yW}$  и  $\bar{k}_{yn}$

Отметим одну важную особенность. В интервале  $y < \bar{y}_{n-2}$  мода с номером  $n \geq 2$  внутри волновода фактически является модой с номером  $n-2$ . Ее собственная функция по координате  $x$  есть  $\bar{\xi}_{n-2}(x, y, \omega)$ , а волновой вектор по координате  $y$  есть  $k_y = \bar{k}_{y(n-2)}(y, \omega)$ . Модой  $n$  она является, потому что при увеличении  $y$  на интервале  $(\bar{y}_{n-2}, \bar{y}_n)$  превращается в  $n$ -ю гармонику волновода. Особую роль далее будет играть мода  $n=2$ , которая при  $y < \bar{y}_0$  является нулевой гармоникой волновода.

При значении частоты  $\omega$  меньше некоторого критического значения (оно зависит от номера моды) величина  $k_{yn}^2$  отрицательна в некотором интервале  $(0, y_{Rn})$ . Это означает, что интервал  $(0, y_{Rn})$  является областью непрозрачности для рассматриваемой моды и волноводное распространение в этом интервале фактически невозможно.

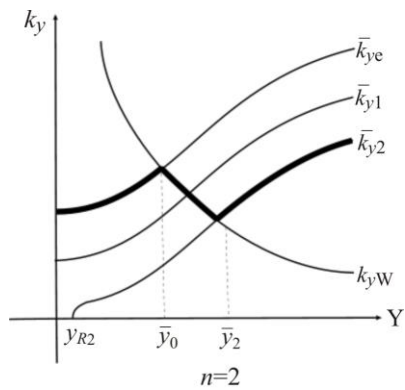
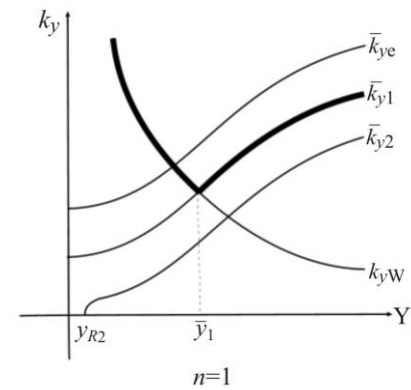
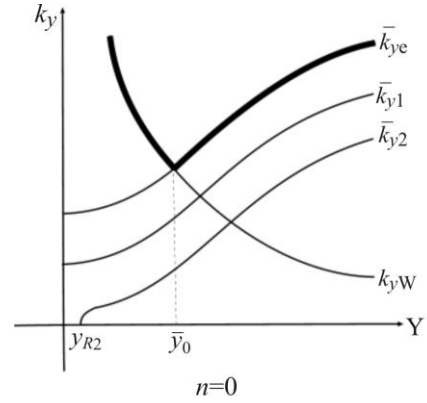


Рис. 10. Схематические графики функций  $k_y = k_{yn}(y, \omega)$  для  $n=0, 1, 2$



В дальнейшем нам понадобится групповая скорость волны по оси  $Y$ . Она определяется соотношением

$$\frac{1}{v_{gy}(y, \omega)} = \frac{\partial k_y(y, \omega)}{\partial \omega}.$$

В области, где  $k_y = \omega/V$ , очевидно, что  $v_{gy} = V$ . В области, где  $k_y = \bar{k}_{yn}$ , из выражения (28) получаем

$$v_{gy} = \bar{v}_{gn} \equiv c_{AM} \left( 1 - \frac{k_z^2 c_{AM}^2}{\omega^2} \right) \times \left[ 1 - \frac{\bar{\eta}_n}{6} \frac{\omega^2 + 2k_z^2 c_{AM}^2}{\omega^2 - k_z^2 c_{AM}^2} \left( \frac{c_{AM}}{\omega l_M} \right)^{2/3} \right]. \quad (29)$$

Из (29) следует, что  $\bar{v}_{gn} < c_{AM}$  и что  $\bar{v}_{gn}$  убывает с ростом номера  $n$ . На рис. 11 показано, как график  $v_{gn}(y, \omega)$  составляется из отрезков различных кривых.

В дополнение к координатам  $\bar{y}_n$  мы будем использовать аналогичные координаты  $\tilde{y}_n$ . Они определяются точно так же, как координаты  $\bar{y}_n$ , с тем отличием, что вместо функции  $\omega = \bar{\omega}_n(k_y)$  нужно использовать функцию  $\omega = \tilde{\omega}_n(k_y)$ , которая в приближении ВКБ по координате  $x$  дается соотношением из работы [Mazur, Chuiko, 2011], схожим с (13). Наконец, нам понадобится точка  $y_A$ , определяемая уравнением

$$\omega = k_z(y_A) c_{AM}(y_A).$$

Указанные точки чередуются следующим образом:  $y_A < \bar{y}_0 < \tilde{y}_0 < \bar{y}_1 < \tilde{y}_1 < \dots$ .

#### 4. ПОГОННАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ СОБСТВЕННОЙ МОДЫ ВОЛНОВОДА

Пусть  $E(\omega, k_y, x, y)$  — спектральная плотность энергии колебаний в волноводе. Это означает, что  $E(\omega, k_y, x, y) d\omega dk_y dx dy dz$  — энергия, содержащаяся в интервале частот  $d\omega$ , в интервале волновых векторов  $dk_y$  и в элементе объема  $dx dy dz$ . В силу однородности нашей модели по координате  $z$ , функция  $E$  от нее не зависит. Кроме того, предполагается, что у волнового вектора  $k_z = \pi N / L_z$  фиксированное волновое число  $N$  (фактически мы ограничиваемся основной гармоникой  $N=1$ ).

Спектральная плотность удовлетворяет уравнению [Шафранов, 1963]

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S} = 2\gamma E,$$

где  $\mathbf{S} = \mathbf{v}_g E$  — плотность потока энергии. Для рассматриваемой нами стационарной двумерно-неоднородной модели это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 2\gamma E.$$

Проинтегрируем его по  $x$  в интервале  $(-\infty, x_M)$ .

Поскольку при  $x \rightarrow -\infty$  имеет место область непрозрачности, то  $S_x(-\infty) = 0$  и мы получаем

$$\frac{dS}{dy} = 2\gamma W - S_x(x_M). \quad (30)$$

Здесь  $W = W(\omega, k_y, y) = \int_{-\infty}^{x_M} E(\omega, k_y, x, y) dx$  — погонная (на единицу длины волновода) спектральная плотность энергии, а  $S$  — интегральный поток энергии по оси  $y$ , определенный соотношением (11). Поскольку  $S_y = v_{gy} E$ , а групповая скорость  $v_{gy}$  не зависит от  $x$ , то  $S = v_{gy} W$ . Величина  $S_x(x_M)$  является плотностью потока энергии по оси  $x$  на магнитопаузе. Поскольку в нашей модели ось  $x$  направлена от магнитосферы, то  $-S_x(x_M)$  — плотность потока энергии, проникающего в магнитосферу, т. е. то, что мы ранее называли мощностью накачки магнитосферного резонатора  $Q$ . Очевидно, что  $Q = Q(\omega, k_y, y)$ . Итак, уравнение (30) принимает вид

$$d(v_{gy} W) / dy = 2\gamma W + Q. \quad (31)$$

В нулевом порядке по параметру  $\alpha$  при заданных значениях  $\omega$  и  $y$  величина  $k_y$  имеет строго определенное (собственное) значение  $k_y = k_{yn}(y, \omega)$ . Это означает, что

$$W(\omega, k_y, y) \sim \delta[k_y - k_{yn}(y, \omega)].$$

Заметим, что если имеется интервал непрозрачности  $(0, y_{Rn})$ , то в нем следует полагать  $W=0$ . При ненулевом, но малом значении  $\alpha$  спектр по волновому вектору  $k_y$  уширяется, но остается узким. При  $\alpha \neq 0$  появляются два эффекта — неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и накачка внешними волнами. Первая приводит к появлению инкремента неустойчивости, что при заданном вещественном значении  $\omega$  следует трактовать как появление мнимой части волнового вектора  $\text{Im} k_y = -\gamma / v_{gy}$ . Наличие мнимой части  $k_y$  равносильно уширению спектра по  $k_y$  на величину  $\text{Im} k_y$ . Накачка внешними волнами также приводит к уширению спектра. Из выражения (22) ясно видна резонансная зависимость мощности накачки  $Q$  от частоты волны. Однако при заданной частоте она превращается в резонансную зависимость от волнового вектора: внешние волны накачивают волновод в узком интервале  $k_y$  вблизи значения  $k_y = k_{yn}(y, \omega)$ . Это будет продемонстрировано чуть ниже.

Таким образом, оба эффекта приводят к тому, что спектральная плотность энергии  $W(\omega, k_y, y)$  представляет собой узкий пик по  $k_y$  вблизи собственного значения  $k_y = k_{yn}(y, \omega)$ . Естественно ввести спектральную плотность, проинтегрированную по ширине этого пика:

$$W_n(\omega, y) = \int W(\omega, k_y, y) dk_y. \quad (32)$$

Предполагается, что интегрирование осуществляется по интервалу  $k_y$ , много большему ширины пика, но много меньшему расстояния до соседних пиков с номерами  $n-1$  и  $n+1$ . Величина  $W_n(\omega, y)$  — спектральная погонная плотность энергии колебания  $n$ -й собственной моды волновода, т. е. спектральная плотность в точке  $y$ , приходящаяся на единицу длины

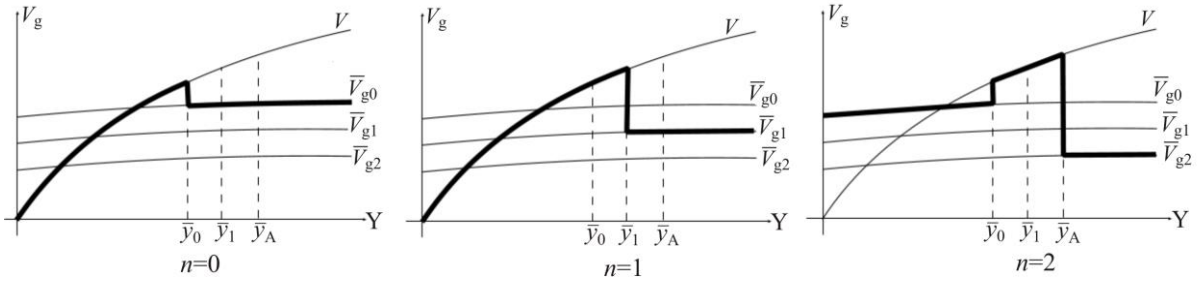


Рис. 11. Схематические графики функции  $v_{gn}(y)$  для  $n=0, 1, 2$

вдоль волновода. Далее именно функция  $W_n(\omega, y)$  будет основным предметом нашего исследования.

Чтобы получить уравнение этой функции, проинтегрируем уравнение (31) по  $k_y$  в соответствии с указанным выше правилом. Поскольку величины  $v_{gn}$  и  $\gamma$  являются плавными функциями  $k_y$ , по сравнению с  $W(\omega, k_y, y)$ , то они могут быть вынесены из-под знака интеграла в точке  $k_y = k_{yn}(\omega, y)$ . В результате получаем

$$\frac{d(v_{gn}W_n)}{dy} = 2\gamma_n W_n + Q_n. \quad (33)$$

Здесь  $v_{gn}(\omega, y)$  — групповая скорость и  $\gamma_n(\omega, y)$  — инкремент неустойчивости  $n$ -й собственной моды, а мощность ее накачки

$$Q_n(\omega, y) = \int Q(\omega, k_y, y) dk_y. \quad (34)$$

Функция  $v_{gn}(\omega, y)$  приведена выше, а функции  $\gamma_n(\omega, y)$  и  $Q_n(\omega, y)$  будут описаны далее.

Как уже говорилось во введении, БМЗ-колебанию в волноводе соответствует альфвеновский резонанс, сосредоточенный в узкой (по координате  $x$ ) окрестности резонансной поверхности, расположенной в области непрозрачности для БМЗ-колебания. Координата  $x = x_A$  этой поверхности определяется уравнением  $\omega = k_z(y)c_A(x_A, y)$ . Таким образом, в рамках нашей двумерно-неоднородной модели  $x_A = x_A(\omega, y)$ .

Обозначим через  $E_A(\omega, k_y, y)$  погонную плотность энергии колебаний, сосредоточенную в окрестности альфвеновского резонанса. Величина  $E_A(\omega, k_y, y)$  аналогична погонной плотности энергии колебаний волновода  $W(\omega, k_y, y)$ . Отличие заключается в том, что интегрирование по  $x$  осуществляется не по ширине волновода, а по окрестности альфвеновского резонанса. В работе [Мазур, 2010] установлена связь между этими величинами:

$$E_A(\omega, k_y, y) = \frac{v_A(\omega, k_y, y)}{\gamma_A} W(\omega, k_y, y). \quad (35)$$

Декремент затухания альфвеновских волн обусловлен диссипацией энергии на ионосферных торцах, и выражение для него имеет вид [Hughes, 1974]

$$\gamma_A = \frac{c^2}{4\pi \Sigma_p c_A^* t_A}. \quad (36)$$

Здесь  $\Sigma_p$  — интегральная педерсеновская проводимость ионосферы,  $c_A^*$  — скорость Альфвена в верхней ионосфере,  $t_A$  — время пробега альфвеновской

волны вдоль силовой линии между сопряженными ионосферами. Проинтегрировав соотношение (35) по  $k_y$ , получаем

$$E_{An}(\omega, y) = \frac{V_{An}(\omega, y)}{\gamma_A} W_n(\omega, y). \quad (37)$$

Здесь по аналогии с (34) обозначено

$$E_{An}(\omega, y) = \int E_A(\omega, k_y, y) dk_y.$$

Поскольку наземные проявления рассматриваемых колебаний обусловлены альфвеновским резонансом, то именно функция  $E_{An}(\omega, y)$  определяет распределение амплитуды колебаний по земной поверхности.

## 5. АЗИМУТАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИНКРЕМЕНТА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Зависимость инкремента от координаты  $y$  определяется из выражений (15)–(21), и входящие в них величины следует рассматривать как функции  $y$ . В частности, функцией  $y$  следует считать волновой вектор:  $k_y = k_{yn}(\omega, y)$ . При таком понимании, согласно определению величин  $\tilde{y}_n$ , разность  $\omega_w(y) - \tilde{\omega}_{n-1}(y)$  в точке  $y = \tilde{y}_{n-1}$  обращается в нуль и вблизи этой точки может быть представлена в виде

$$\omega_w(y) - \tilde{\omega}_{n-1}(y) = \omega \frac{y - \tilde{y}_{n-1}}{\tilde{L}_{n-1}},$$

где  $\tilde{L}_{n-1}^{-1} = |d \ln(c_{AM}/V) / dy|_{\tilde{y}_{n-1}}$ . Для случая  $n=0$  следует полагать  $\tilde{y}_{n-1} = y_A$  и  $\tilde{L}_{n-1} = L_A$ . Аналогично вблизи точки  $y = \tilde{y}_n$

$$\omega_w(y) - \bar{\omega}_n(y) = \omega \frac{y - \tilde{y}_n}{\bar{L}_n},$$

где  $\bar{L}_n^{-1} = |d \ln(c_{AM}/V) / dy|_{\tilde{y}_n}$ . Параметры  $\tilde{L}_{n-1}$ ,  $L_A$  и  $\bar{L}_n$  одного порядка величины, совпадающего с характерным масштабом неоднородности по оси  $y$  в формулах (24). Далее мы не будем делать между ними различия и будем обозначать одной буквой  $L$ .

Тогда выражения (15)–(17) можно представить в следующем виде. Вблизи порога неустойчивости, при  $y - \tilde{y}_{n-1} \ll L$ ,

$$\gamma_n(\omega, y) = \alpha \omega \left( \frac{y - \tilde{y}_{n-1}}{L} \right)^{1/2}. \quad (38)$$

Здесь при  $n=0$  следует полагать  $\tilde{y}_{n-1} = y_A$ . Вблизи максимума инкремента, при  $|y - \bar{y}_n| \ll \sqrt{\alpha L}$ ,

$$\gamma_n(y, \omega) = \sqrt{\alpha\omega} \left[ 1 - \frac{(y - \bar{y}_n)^2}{4\alpha L^2} \right] - \bar{v}_{An}. \quad (39)$$

Здесь обозначено  $\bar{v}_{An} = v_A(\bar{k}_{yn})$ . Вдали от максимума, при  $y - \bar{y}_n \gg \sqrt{\alpha L}$ ,

$$\gamma_n(y, \omega) = \frac{\alpha\omega L}{y - \bar{y}_n} - \bar{v}_{An}. \quad (40)$$

Для моды  $n=0$  инкремент равен нулю вблизи любой области магнитосферы на интервале  $(0, y_A)$ . У мод с номерами  $n \geq 1$  инкремент равен нулю в интервале  $(\tilde{y}_{n-2}, \tilde{y}_{n-1})$ , а в лобовой области он отрицателен. Из выражения (18) для моды  $n=1$  при  $y < y_A$  имеем

$$\gamma_1(y, \omega) = -\alpha\omega \left( \frac{y_A - y}{L} \right)^{1/2}.$$

Соответственно из выражений (19)–(21) для мод с номерами  $n \geq 2$  получаем вблизи точки  $y = \tilde{y}_{n-2}$

$$\gamma_n(y, \omega) = -\alpha\omega \left( \frac{\tilde{y}_{n-2} - y}{L} \right)^{1/2},$$

вблизи минимума инкремента

$$\gamma_n(y, \omega) = -\sqrt{\alpha\omega} \left[ 1 - \frac{(y - \bar{y}_{n-2})^2}{8\alpha L^2} \right]$$

и вдали от минимума, при  $\bar{y}_{n-2} - y \gg \sqrt{\alpha L}$ ,

$$\gamma_n(y, \omega) = -\frac{\alpha\omega L}{\bar{y}_{n-2} - y} - \bar{v}_{A(n-2)}.$$

Сравнивая выражения для инкремента неустойчивости в разных интервалах, можно получить аналитические выражения для всех значений  $y$ . Зависимость инкремента различных мод от координаты  $y$  приведена на рис. 7.

## 6. АЗИМУТАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МОЩНОСТИ НАКАЧКИ

При вычислении мощности накачки  $Q_n(y, \omega)$  следует иметь в виду, что волна может распространяться в солнечном ветре только при выполнении условия  $|\omega - k_y V| > k_{iCS}$ . Это означает, что на той части дисперсионной кривой, где  $k_y = \omega/V$ , накачка отсутствует, т. е. накачка равна нулю в интервале  $(\bar{y}_{n-2}, \bar{y}_n)$ . В действительности неравенство  $|\omega - k_y V| > k_{iCS}$  определяет несколько более широкий интервал. Легко убедиться, что накачка отсутствует в интервале  $(\bar{y}_{n-2} - \alpha L, \bar{y}_n + \alpha L)$ . Для мод с номерами  $n=0, 1$  накачка отсутствует в интервале  $(0, \bar{y}_n + \alpha L)$ .

Пусть  $y > \bar{y}_n + \alpha L$ . Мы знаем, что эффективная накачка волновода производится волной не только с  $k_y = \bar{k}_{yn}(y, \omega)$ , но и в некотором узком интервале  $k_y$  вблизи этого значения. Для таких  $k_y$

$$\bar{\omega}_n(k_y) = \omega + \frac{\bar{k}_{yn} c_{AM}}{\bar{k}_{yn}} (k_y - \bar{k}_{yn}).$$

Подставляя это разложение в (22), получаем

$$Q = \frac{\omega}{\omega - \bar{k}_{yn} V} \frac{4\bar{v}_{An} \bar{v}_{Wn}}{(\bar{v}_{An} + \bar{v}_{Wn})^2 + \frac{\bar{k}_{yn}^2 c_{AM}^2}{k_m^2} (k_y - \bar{k}_{yn})^2} \bar{S}_{Wn}. \quad (41)$$

Здесь все остальные величины, зависящие от  $k_y$ , взяты в точке  $k_y = \bar{k}_{yn}$ :

$$\bar{v}_{An} = v_A(\bar{k}_{yn}), \quad \bar{v}_{Wn} = v_W(\bar{k}_{yn}), \quad \bar{S}_{Wn} = S_W(\bar{k}_{yn}).$$

Выражение (41) позволяет вычислить интеграл в (32). Представим результат в виде

$$Q_n(y) = \frac{\omega}{\omega - \bar{k}_{yn} V} \frac{\bar{k}_{yn}}{\bar{k}_{yn} c_{AM}} \frac{4\pi \bar{v}_{An} \bar{v}_{Wn}}{|\bar{v}_{An} + \bar{v}_{Wn}|} \bar{S}_{Wn}(y). \quad (42)$$

Для  $y < \bar{y}_{n-2} - \alpha L$  получается аналогичное выражение с заменой  $n \rightarrow n-2$ . Таким образом

$$\begin{aligned} Q_n &= \bar{Q}_{n-2} \quad \text{при } y < \bar{y}_{n-2} - \alpha L, \\ Q_n &= 0 \quad \text{при } \bar{y}_{n-2} - \alpha L < y < \bar{y}_n + \alpha L, \\ Q_n &= \bar{Q}_n \quad \text{при } y > \bar{y}_n + \alpha L, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(y, \omega) &\equiv F_n(y, \omega) \bar{S}_{Wn}(y, \omega), \\ F_n(y, \omega) &= \frac{\omega}{\omega - \bar{k}_{yn} V} \frac{\bar{k}_{yn}}{\bar{k}_{yn} c_{AM}} \frac{4\pi \bar{v}_{An} \bar{v}_{Wn}}{|\bar{v}_{An} + \bar{v}_{Wn}|}. \end{aligned} \quad (44)$$

Прежде чем анализировать зависимость  $Q_n(y)$ , необходимо сделать важное замечание. Тот факт, что коэффициенты уравнения (33) определяются результатами, полученными в одномерной модели среды, является следствием ВКБ-приближения по координате  $y$ . Но это приближение накладывает ограничение на скорость изменения коэффициентов уравнения. Так, применительно к функции  $Q_n(y)$  оно имеет вид

$$\left| \frac{d \ln Q_n}{dy} \right| \ll k_y.$$

Если это ограничение нарушается в некотором интервале значений  $y$ , то функция  $Q_n(y)$  в этом интервале не успевает «подстраиваться» под текущие параметры волновода. В таком случае ее значения уже не определяются результатами одномерной модели, а получаются сглаживанием этих результатов по интервалу  $\Delta y \sim k_y^{-1}$ . В частности, если  $Q_n(y)$  имеет в некоторой точке особенность (а мы увидим, что это действительно так), то эта особенность должна быть также регуляризована на интервале  $\Delta y \sim k_y^{-1}$ .

Анализ зависимости мощности накачки  $Q_n(y)$  начнем с изучения функции  $F_n(y)$ , которая определяет эффективность проникновения волн в магнитосферу. Преобразуем выражение (44) для  $F_n$ , подставив в него соотношения (14) и (23):

$$F_n = \frac{4\pi \bar{k}_{yn}^2 \chi(\bar{w}_n)}{\alpha \bar{k}_{yn} \bar{w}_n} \frac{\bar{\delta}_{An}}{|\bar{\delta}_{An} + \chi(\bar{w}_n)|}. \quad (45)$$

Здесь обозначено

$$\bar{w}_n = \frac{\omega - \bar{k}_{yn} V}{\bar{k}_m c_s}, \quad \bar{\delta}_{An} = \delta_A(\bar{k}_m).$$

Для численного решения уравнения (33) выражения (45) вполне достаточно, так как все входящие в него сомножители имеют явное аналитическое выражение. Однако для качественного аналитического исследования оно слишком громоздко, поэтому мы сделаем в нем существенные упрощения, которые не меняют качественный вид решения уравнения (33). С этой целью проанализируем поведение различных сомножителей в (45).

Для характерных значений параметров нашей модели среды  $k_z$  существенно меньше, чем  $k_y$ . В таком случае

$$\frac{\bar{k}_{zn}^2}{\bar{k}_{yn}} \approx \bar{k}_{zn} \approx \frac{\omega}{c_{AM}}.$$

Здесь опущена также малая поправка в формуле (28) для  $\bar{k}_{zn}$ .

Функция  $\bar{w}_n(y)$  для значений  $|y - \bar{y}_n| \ll L$  представляется в виде

$$\bar{w}_n(y) = -\frac{y - \bar{y}_n}{\alpha L}. \quad (46)$$

Мы распространим выражение (46) на всю интересующую нас область изменения аргумента  $y$ . Это приводит к заметному искажению функции  $F_n(y)$  только в асимптотически далекой области, где эта функция мала, и не сказывается существенным образом на поведении решения уравнения (33).

Используя выражение (46), имеем

$$\chi(\bar{w}_n) = \chi\left(-\frac{y - \bar{y}_n}{\alpha L}\right).$$

При  $|y - \bar{y}_n| \gg \alpha L$  из определения (23) для функции  $\chi(w)$  получаем

$$\chi(\bar{w}_n) = -\frac{\alpha L}{y - \bar{y}_n}. \quad (47)$$

В области  $|y - \bar{y}_n| \sim \alpha L$  функция  $\chi(\bar{w}_n)$  характеризуется более сложным поведением и отличается от значения (47) на величину порядка самой функции  $\chi(\bar{w}_n)$ . Но быстрое изменение на малом интервале длиной порядка  $\alpha L$  в соответствии со сказанным выше должно быть сглажено. А такое сглаженное поведение столь несущественно отличается от описываемого выражением (47), что последнее может быть принято и для этого интервала. Таким образом, мы примем выражение (47) для всех значений  $|y - \bar{y}_n| > \alpha L$ .

Использование (46) и (47) дает

$$F_n = 4\pi \frac{\omega}{c_{AM}} \bar{\delta}_{An} \frac{L}{|y - \bar{y}_n|} \frac{Y_n - \bar{y}_n}{|Y_n - y|}, \quad (48)$$

где обозначено

$$Y_n = \bar{y}_n + \frac{\alpha}{\bar{\delta}_{An}} L.$$

Отметим, что точка  $Y_n$ , в которой выражение (48) обращается в бесконечность, — это та же самая точка, в которой инкремент (40) обращается в нуль. О глубокой связи этих двух обстоятельств подробно сказано в работе [Mazur, Chuiko, 2013b].

В соответствии со сказанным выше особенность в выражении (48) должна быть регуляризована на масштабе  $k_y^{-1} \sim \Delta \equiv c_{AM}/\omega$ . Это можно сделать многими способами, которые качественно не отличаются друг от друга. Мы примем следующую регуляризацию:

$$F_n = 4\pi \frac{\omega}{c_{AM}} \bar{\delta}_{An} \frac{L}{|y - \bar{y}_n|} \frac{Y_n - \bar{y}_n}{\sqrt{(Y_n - y)^2 + \Delta^2}}. \quad (49)$$

Характер зависимости  $F_n$  от  $y$  в большой степени зависит от значения частоты  $\omega$ . Это обстоятельство главным образом определяется сильной зависимостью от  $\omega$  вида функции  $\bar{\delta}_{An} = \bar{\delta}_{An}(y)$ . Мы видим (рис. 1), что для частоты в диапазоне Pc3 функция  $\bar{\delta}_{An} = \bar{\delta}_{An}(y)$  относится к лобовой области магнитосферы, а в диапазоне Pc5 — к флангам. Уже одно это обстоятельство предопределяет соответствующую локализацию самих колебаний.

Перейдем к обсуждению второго множителя  $\bar{S}_{wn}$  в первом уравнении системы (44). Он определяется свойствами волновой турбулентности в области солнечного ветра, примыкающей к магнитопаузе, т. е. в магнитослое. Волновая турбулентность описывается функцией  $\varepsilon_w$  — спектральной плотностью энергии волн, которая определяется соотношением

$$dE_w = \varepsilon_w dx dy dz dk_x dk_y dk_z,$$

где  $dE_w$  — энергия, содержащаяся в элементе объема  $dx dy dz$  и в элементе объема  $k$ -пространства  $dk_x dk_y dk_z$ . Мы примем самую простую модель турбулентности, согласно которой спектральная плотность энергии волн в магнитослое (переходной области, примыкающей к волноводу) является функцией модуля волнового вектора  $k$ , или, что то же самое, функцией частоты волны в системе отсчета, связанной с солнечным ветром,  $\bar{\omega} = kc_s$ :

$$\varepsilon_w = \varepsilon_w(\bar{\omega}).$$

Напомним, что в силу эффекта Доплера  $\bar{\omega} = \omega - k_y V$ . Из этого соотношения видно, что величина  $\bar{\omega}$  может иметь любой знак. Мы будем предполагать, что  $\varepsilon_w(-\bar{\omega}) = \varepsilon_w(\bar{\omega})$ .

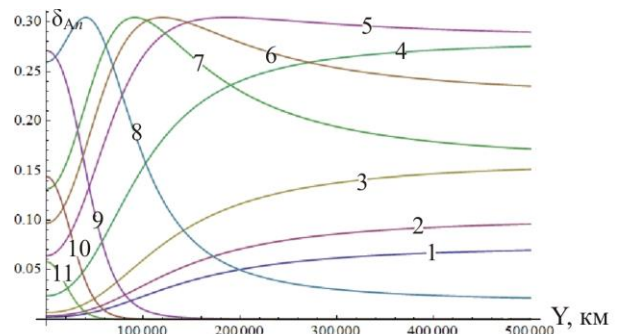


Рис. 12. Функция  $\bar{\delta}_{An} = \bar{\delta}_{An}(y)$  при различных значениях частоты  $\omega$ : 1 — 2 МГц, 2 — 3 МГц, 3 — 4 МГц, 4 — 5 МГц, 5 — 8 МГц, 6 — 10 МГц, 7 — 12 МГц, 8 — 20 МГц, 9 — 40 МГц, 10 — 60 МГц, 11 — 90 МГц

Спектральная плотность потока энергии на магнитопаузе

$$f_w = v_{gx} \varepsilon_w = \frac{d\bar{\omega}}{dk_x} \varepsilon_w.$$

Это означает, что поток энергии, падающий на площадку  $dydz$  в интервале волновых векторов  $dk_x dk_y dk_z$ ,

$$dF_w = f_w dydz dk_x dk_y dk_z. \quad (50)$$

Переходя в (50) от  $dk_x$  к  $d\bar{\omega}$  в соответствии с формулой  $dk_x = (dk_x / d\bar{\omega}) d\bar{\omega}$ , приводим (50) к виду

$$dF_w = \varepsilon_w dydz d\bar{\omega} dk_y dk_z. \quad (51)$$

Отметим следующее важное обстоятельство. При заданных значениях  $k_y$  и  $k_z$  минимальное значение  $\bar{\omega}^2$  равно  $k_t^2 c_S^2$ . При  $\bar{\omega}^2 < k_t^2 c_S^2$  волна в солнечном ветре не может распространяться, поэтому для таких значений частоты следует считать  $dF_w = 0$ .

Из выражения (51) видно, что введенная выше величина  $S_w$  является плотностью потока энергии, приходящейся на интервалы  $d\bar{\omega}$  и  $dk_y$ :

$$S_w = \int \varepsilon_w dk_z. \quad (52)$$

В нашей однородной по оси  $Z$  модели среды величина  $k_z$  фиксирована и имеет одно и то же значение в солнечном ветре и магнитосфере. Это означает, что волну с заданным значением  $k_z$  в магнитосфере может возбуждать только волна с тем же  $k_z$  в солнечном ветре. При этом очевидно, что волна в солнечном ветре со строго фиксированным значением  $k_z$  несет энергию, равную нулю (отлична от нуля энергия в некотором конечном интервале  $dk_z$ ). Однако мы должны иметь в виду, что в действительности волновод неоднороден по оси  $Z$  и собственная мода описывается не функцией  $\exp(ik_z z)$ , а какой-то более сложной функцией, имеющей характерный масштаб  $L_z$ . Это означает, что ее фурье-образ имеет характерный масштаб  $\Delta k_z \sim 1/L_z$ . Именно по такому интервалу должно вестись интегрирование в (52). Это позволяет нам принять следующую качественную модель:

$$S_w = S_w(\bar{\omega}) \equiv \frac{\varepsilon_w(\bar{\omega})}{L}.$$

Здесь мы опять-таки не стали делать различие между  $L_z$  и  $L$ . Плотность потока энергии падающих волн  $S_w$  также следует считать равной нулю при  $\bar{\omega}^2 < k_t^2 c_S^2$ . Функции  $\varepsilon_w(\bar{\omega})$  и  $S_w(\bar{\omega})$  различаются постоянным множителем, поэтому далее мы будем обсуждать модели непосредственно для функции  $S_w(\bar{\omega})$ .

Как уже говорилось во введении, существуют два различных механизма возбуждения МГД-волн в переходном слое. Первый из них, сравнительно низкочастотный, — генерация волн на фронте головной ударной волны. Характерный пространственный масштаб данной турбулентности — размер поперечного сечения переходного слоя, по порядку величины совпадающий с нашим основным пространственным масштабом  $L$ . Поэтому характерная ча-

стота данной турбулентности  $\Omega_L = c_S / L$ . Для параметров нашей модели среды  $\Omega_L \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Второй механизм — неустойчивость БМЗ-волн в потоке ионов, отраженных от фронта головной ударной волны. Он порождает сравнительно высокочастотные волны с характерной частотой  $\Omega_H \approx 0.2 \text{ с}^{-1}$ . Как мы увидим, первый механизм порождает колебания Pc5 во фланговых областях магнитосферного волновода, а второй — в его лобовой части.

Для обоих механизмов мы выберем одинаковую модель спектральной плотности потока энергии волн:

$$S_w(\bar{\omega}) = S \left( \frac{\bar{\omega}}{\Omega} \right)^2 \exp \left( - \frac{\bar{\omega}^2}{\Omega^2} \right). \quad (53)$$

Здесь  $\Omega$  — характерное значение частоты в спектре падающих волн. Выбор модели (53) определяется тем, что спектральная плотность стремится к нулю при больших и малых значениях частот:  $|\bar{\omega}| \gg \Omega$  и  $|\bar{\omega}| \ll \Omega$ . Максимум находится в точках  $\bar{\omega} = \pm \Omega$ . Кроме того, функция (53) обладает должной симметрией:  $S_w(-\bar{\omega}) = S_w(\bar{\omega})$ . Для двух указанных механизмов накачки параметры спектра будем полагать разными: для низкочастотного механизма  $\Omega = \Omega_L$ ,  $S = S_L$ , а для высокочастотного  $\Omega = \Omega_H$ ,  $S = S_H$ . Конкретные значения этих величин будут указаны ниже.

Согласно определению,  $\bar{S}_{wn} = S_w(\bar{k}_{yn})$ . Это означает, что в  $\bar{\omega} = \omega - k_y V$  следует подставить  $k_y = \bar{k}_{yn}$ . Как мы знаем, в таком случае при  $|y - \bar{y}_n| \ll L$

$$\bar{\omega} = -\omega \frac{y - \bar{y}_n}{L}.$$

Как и ранее, мы распространим это соотношение на все интересующие нас значения  $y$ . Функция  $S_w(\bar{\omega}) = 0$  при  $|\bar{\omega}| < k_t c_S$ . Это означает, что  $\bar{S}_{wn}(y) = 0$  при  $|y - \bar{y}_n| < \alpha L$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{S}_{wn}(y, \omega) &= S \left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \left( \frac{y - \bar{y}_n}{L} \right)^2 \times \\ &\times \exp \left[ - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \left( \frac{y - \bar{y}_n}{L} \right)^2 \right] \theta(|y - \bar{y}_n| - \alpha L). \end{aligned} \quad (54)$$

Соотношения (49) и (54) вместе дают

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(y, \omega) &= 4\pi S \frac{\Omega}{c_{AM}} \bar{\delta}_{An}(y, \omega) \times \\ &\times \frac{Y_n - \bar{y}_n}{\sqrt{(Y_n - y)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^3 \left| \frac{y - \bar{y}_n}{L} \right| \exp \left[ - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \left( \frac{y - \bar{y}_n}{L} \right)^2 \right] \times \\ &\times \theta(|y - \bar{y}_n| - \alpha L). \end{aligned} \quad (55)$$

В соответствии с соотношениями (43) через эту функцию выражается мощность накачки магнитосферного резонатора  $Q_n(y, \omega)$ .

## 7. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

Уравнение переноса энергии (33) удобнее переписать для функции  $S_n = v_{gn} W_n$  — потока энергии вдоль волновода. Из (33) получаем

$$\frac{dS_n(y, \omega)}{dy} = 2\kappa_n(y, \omega)S_n(y, \omega) + Q_n(y, \omega), \quad (56)$$

где  $\kappa_n(y, \omega) = \frac{\gamma_n(y, \omega)}{v_{gn}(y, \omega)}$  — пространственный ин-

кремент усиления, совпадающий с точностью до знака с мнимой частью волнового вектора:  $\kappa_n(y, \omega) = -\text{Im}k_{yn}(y, \omega)$ . Решение уравнения (56), очевидно, дает и выражение для погонной плотности энергии:

$$W_n(y, \omega) = \frac{S_n(y, \omega)}{v_{gn}(y, \omega)}. \quad (57)$$

Уравнение (56) должно быть дополнено начальным условием, которое естественно поставить в точке  $y=0$ . Наша модель среды симметрична относительно этой точки, поэтому логично считать, что

$$dS_n / dy |_{y=0} = 0. \quad (58)$$

Такое условие обеспечивает и симметричность решения относительно точки  $y=0$ .

Для мод  $n=0$  и  $n=1$  накачка и неустойчивость в точке  $y=0$  отсутствуют. Из уравнения (56) видно, что в таком случае условие (58) совместимо с любым значением  $S_n(0, \omega)$ , однако мы будем полагать

$$S_n(0, \omega) = 0, \quad n=0, 1. \quad (59)$$

Это означает, что мы пренебрегаем наличием в волноводе теплового МГД-шума. Как известно, фазовый объем, приходящийся на МГД-волны, ничтожно мал по сравнению с полным фазовым объемом всех колебаний плазмы, в котором львиную долю занимают ленгмюровские волны. Поэтому амплитуда тепловых МГД-колебаний пренебрежимо мала и остается пренебрежимо малой даже после усиления неустойчивостью. Только нетепловые механизмы возбуждения могут дать наблюдаемый уровень МГД-волн. В нашем случае таким механизмом является накачка внешними волнами. Для мод  $n=0, 1$  она начинается с точки  $y = \bar{y}_n + \alpha L$ , и только с этой точки функция  $S_n(y, \omega)$  отлична от нуля.

Для мод  $n \geq 2$  величины  $Q_n(0, \omega)$  и  $\kappa_n(0, \omega)$  отличны от нуля (при этом  $\kappa_n < 0$ ). Тогда из уравнения (56) следует, что условие (58) выполняется, если

$$S_n(0, \omega) = -\frac{Q_n(0, \omega)}{2\kappa_n(0, \omega)}, \quad n \geq 2. \quad (60)$$

Соотношения (59) и (60) мы будем рассматривать далее как начальные условия для уравнения (56).

Функция  $S_n(y, \omega)$  и выражающаяся через нее функция  $W_n(y, \omega)$  несут в себе подробную информацию о распределении энергии вдоль волновода на

разных частотах. Однако, являясь функциями двух переменных, они трудны для наглядного обозрения, поэтому целесообразно ввести функции, проинтегрированные по одной из двух переменных:

$$\bar{W}_n(y) = \int_0^\infty W_n(y, \omega) d\omega, \quad \tilde{W}_n(\omega) = \int_0^\infty W_n(y, \omega) dy. \quad (61)$$

Первая из них описывает распределение полной погонной плотности энергии вдоль волновода, а вторая — спектральную плотность энергии всего волновода. По аналогии можно ввести функции

$$\bar{E}_{An}(y) = \int_0^\infty E_{An}(y, \omega) d\omega, \quad \tilde{E}_{An}(\omega) = \int_0^\infty E_{An}(y, \omega) dy,$$

которые имеют тот же смысл, что и функции (61), но для энергии, сосредоточенной в окрестности альфвеновского резонанса.

Далее мы ограничимся изучением только трех первых мод  $n=0, 1, 2$ . В любой физической системе в первую очередь возбуждаются низшие гармоники колебаний. Чем больше номер гармоники, тем более затруднено ее возбуждение и тем меньше ее амплитуда. В нашей задаче свойства мод с номерами  $n=0, 1$  очень похожи. Для обеих этих мод накачка отсутствует от лобовой точки до точки  $y = \bar{y}_n + \alpha L$ . Следовательно, согласно сказанному выше, на этом интервале  $S_n(y, \omega) = 0$ . Неустойчивость включается раньше — с точки  $\tilde{y}_{n-1} < \bar{y}_n + \alpha L$ . Тем не менее поток энергии моды  $S_n(y, \omega)$  остается равным нулю вплоть до включения накачки. Подчеркнем еще раз: это означает, что мы игнорируем колебания на уровне теплового шума. У моды  $n=2$  имеется накачка в лобовой области  $(0, \bar{y}_0 - \alpha L)$ . Инкремент в этой области отрицателен и уровень колебаний определяется конкуренцией накачки и затухания. Напомним, что в этой области мода является нулевой гармоникой колебаний волновода.

Сделаем теперь несколько простых замечаний относительно решений уравнения (56). Если в правой части этого уравнения  $\kappa_n = 0$  и  $Q_n = 0$ , то  $S_n = \text{const}$ . Таким образом, если в некоторой области нет усиления и накачки, то поток энергии вдоль волновода постоянен, а погонная плотность энергии меняется только вследствие изменения групповой скорости в соответствии с (57).

Пусть мощность накачки  $Q_n = 0$ , но усиление волны имеется, т. е.  $\kappa_n \neq 0$ . Тогда решение уравнения (56) имеет вид

$$S_n(y, \omega) = S_n(0, \omega) \exp[2\Gamma_n(y, \omega)],$$

где  $\Gamma_n(y, \omega)$  — интегральный коэффициент усиления:

$$\Gamma_n(y, \omega) = \int_0^y \kappa_n(y', \omega) dy' = \int_0^y \frac{\gamma_n(y', \omega)}{v_{gn}(y', \omega)} dy'.$$

Влияние усиления волны (т. е. неустойчивости Кельвина–Гельмгольца) является существенным, если изменения коэффициента усиления  $\Gamma_n(y, \omega)$  вдоль волновода не являются малыми по сравнению

с единицей.

Формулы (38)–(40) для инкремента неустойчивости позволяют оценить полный набег коэффициента усиления. При такой оценке мы будем полагать, что групповая скорость  $v_{gn} \sim c_{AM}$ , что вполне согласуется с формулой (29). Тогда

$$\Gamma_n^{(1)} = \int_{\bar{y}_{n-1}}^{\bar{y}_n} \frac{\alpha\omega}{v_{gn}} \left( \frac{y - \bar{y}_{n-1}}{L} \right)^{1/2} dy \sim \frac{2}{3} \frac{\alpha\omega L}{c_{AM}},$$

$$\Gamma_n^{(2)} = \int_{\bar{y}_n - 2\sqrt{\alpha}L}^{\bar{y}_n + 2\sqrt{\alpha}L} \frac{\sqrt{\alpha}\omega}{v_{gn}} \left[ 1 - \frac{(y - \bar{y}_n)^2}{4\alpha L^2} \right] dy \sim \frac{8}{3} \frac{\alpha\omega L}{c_{AM}},$$

$$\Gamma_n^{(3)} = \int_{\bar{y}_n - 2\sqrt{\alpha}L}^{\bar{y}_n} \frac{1}{v_{gn}} \left( \frac{\alpha\omega L}{y - \bar{y}_n} - \bar{V}_{An} \right) dy \sim \left( \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{\bar{\delta}_{An}} - 1 \right) \frac{\alpha\omega L}{c_{AM}}.$$

Таким образом,

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(3)} \sim \left( \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{\bar{\delta}_{An}} + \frac{7}{3} \right) \frac{\alpha\omega L}{c_{AM}}.$$

Логарифм в круглой скобке формально велик, но фактически он не может быть слишком большим именно потому, что он логарифм. Его значение можно положить равным  $2 \div 3$  и в целом число в круглой скобке равным 5. Итак

$$\Gamma_n \sim 5 \frac{\alpha\omega L}{c_{AM}}. \quad (62)$$

При оценках по порядку величины не принято придавать значение безразмерным коэффициентам. Но в нашем случае уверенно определяется, что этот безразмерный коэффициент является достаточно большим, поэтому он оставлен в оценке (62). При характерных для нашей задачи значениях  $\alpha=0.15$ ,  $L=5 \cdot 10^4$  км,  $c_{AM}=300$  км/с и в частотном диапазоне Рс5, т. е. для  $\omega=0.02$  с<sup>-1</sup>, имеем  $\Gamma_n=2.5$ . Это большое значение. Оно означает, что амплитуда колебаний возрастает в результате неустойчивости в  $\exp \Gamma_n \approx 10$  раз, а их энергия — в  $\exp(2\Gamma_n) \approx 100$  раз. Таким образом, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца играет важную роль. Не менее важную роль играет и затухание в тех областях, где инкремент отрицателен. В этих областях величина  $\Gamma_n$  достигает таких же по модулю, но отрицательных значений. Это обстоятельство особенно важно для колебаний Рс3, сосредоточенных в лобовой области магнитосферы, где инкремент отрицателен.

В общем случае при  $\kappa_n \neq 0$  и  $Q_n \neq 0$  нетрудно написать решение уравнения (56):

$$S_n(y, \omega) = \exp[2\Gamma_n(y, \omega)] \times \left\{ S_n(0, \omega) + \int_0^y Q_n(y', \omega) \exp[-2\Gamma_n(y', \omega)] dy' \right\}. \quad (63)$$

Однако получение аналитического решения в данном случае чрезвычайно затруднено тем, что входящие в него функции  $Q_n(y, \omega)$  и  $\exp[2\Gamma_n(y, \omega)]$  меняются по переменной  $y$  экспоненциально быстро и скорость этого изменения сильно зависит от значения частоты  $\omega$ . Поэтому более адекватным является численное решение (56). Это удобнее делать не на

основании формулы (63), а непосредственно интегрируя уравнение (56) с граничными условиями (59) или (60). Такое интегрирование шагами по переменной  $y$  не представляет труда.

Дальнейший анализ мы проведем отдельно для частотных диапазонов Рс3 и Рс5.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВДОЛЬ ВОЛНОВОДА ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ Рс3

Для колебаний Рс3 в выражении (55) для мощности накачки полагаем  $\Omega = \Omega_H = 0.2$  с<sup>-1</sup>. Именно на такую частоту приходится максимум интенсивности генерации колебаний циклотронной неустойчивостью отраженных протонов [Потапов, 1974; Гульельми и др., 1976]. Как видно из рис. 12, для частот  $\omega \sim \Omega_H$  функция  $\bar{\delta}_{An}(y, \omega)$  сосредоточена в лобовой области и практически равна нулю на флангах магнитосферы. Отсюда следует, что моды  $n=0, 1$  вообще не возбуждаются. Действительно, для  $n=0, 1$  накачка в интервале  $y < \bar{y}_n + \alpha L$  отсутствует. Но в области  $y > \bar{y}_n + \alpha L$  мощность накачки также равна нулю, поскольку для таких значений  $y$  уже можно считать, что  $\bar{\delta}_{An}(y, \omega) = 0$ . Таким образом, для мод  $n=0, 1$  накачка отсутствует вдоль всей длины волновода, а следовательно, эти моды в диапазоне частот Рс3 не возбуждаются.

Мода  $n=2$  имеет область накачки в лобовой части магнитосферы  $y < \bar{y}_0 - \alpha L$ , где функция  $\bar{\delta}_{A0}(y, \omega)$  отлична от нуля. Как уже указывалось выше, в этой области колебание внутри волновода представляет собой нулевую моду волновода. Инкремент в этой области отрицателен. Оба эти обстоятельства определяют локализацию Рс3 в лобовой области.

При отрицательном значении инкремента качественное представление о решении уравнения (56) можно получить следующим образом. Предположим, что левая часть этого уравнения много меньше, чем любой из членов в правой части. Тогда

$$S_n(y, \omega) = -\frac{Q_n(y, \omega)}{2\kappa_n(y, \omega)}, \quad W_n(y, \omega) = -\frac{Q_n(y, \omega)}{2\gamma_n(y, \omega)}. \quad (64)$$

Это решение очевидно удовлетворяет начальному условию (60). Предположение, которое мы сделали, означает, что  $|d \ln S_n / dy| \ll |\kappa_n|$ . Если для левой части этого неравенства принять оценку  $|d \ln S_n / dy| \sim 1/L$ , а для правой —  $|\kappa_n| \sim \alpha\omega / c_{AM}$ , то оно примет вид

$$\frac{\alpha\omega L}{c_{AM}} \gg 1.$$

Для частот в диапазоне Рс3 это неравенство выполняется с большим запасом. Таким образом, можно ожидать, что выражения (64) дают хорошее приближение для решения уравнения (56).

Можно было бы ожидать, что мощность накачки максимальна, если максимум множителя во второй строчке выражения (55) находится вблизи точки

$y=0$ . Тогда максимумы этого множителя и функции  $\bar{\delta}_{A0}(y, \omega)$  перекрываются. Это имеет место при  $\omega \sim (L/\bar{y}_0\sqrt{2})\Omega_H \approx 0.3\Omega_H$ . Однако при такой частоте малое значение имеет множитель  $(\omega/\Omega_H)^3 \approx 0.03$ , фигурирующий в выражении (55) для  $Q_n$ . Поэтому в действительности мощность накачки максимальна на несколько большей частоте, ближе к  $\Omega_H$ . Тогда максимум мощности накачки, а вместе с ним и максимум энергии в волноводе, будет уже не в лобовой точке.

Это подтверждается результатами численного решения уравнения (56). На рис. 13 приведены графики зависимости функции  $W_2(y, \omega)$  от переменной  $y$  для нескольких значений частоты. Видно, что амплитуда решения максимальна на частотах, близких к  $\omega = \Omega_H = 0.2 \text{ с}^{-1}$ . На рис. 14 проведено сравнение приближенного аналитического решения (64) и решения численного (56) для частоты  $\omega = \Omega_H$ . Они хорошо согласуются друг с другом. Распределение Pc3 по частотам нагляднее видно на графике функции  $\bar{W}_2(\omega)$ , приведенном на рис. 15. Спектр колебаний имеет максимум на частоте  $\omega = 0.18 \text{ с}^{-1}$  и быстро спадает при удалении от максимума.

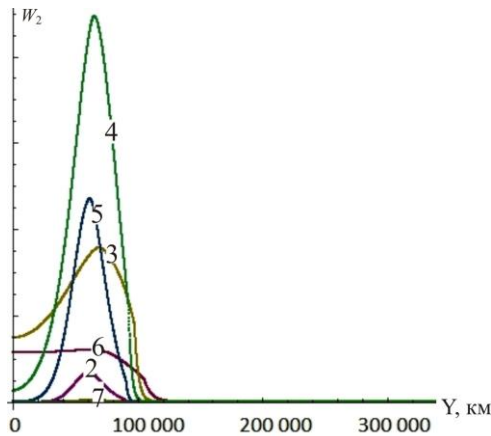


Рис. 13. Зависимость функции  $W_2(y, \omega)$  от переменной  $y$  для нескольких значений частоты в диапазоне Pc3: 2 — 10 МГц, 3 — 20 МГц, 4 — 40 МГц, 5 — 60 МГц, 6 — 80 МГц, 7 — 90 МГц

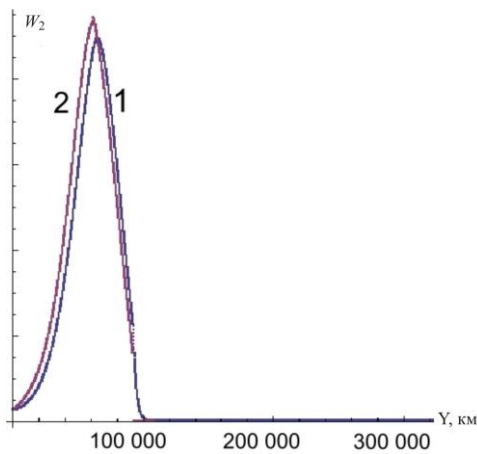


Рис. 14. Сравнение аналитического и численного решения для функции  $W_2(y, \omega)$  при  $\omega = \Omega_H$ : 1 — численное решение уравнения, 2 — приближенное аналитическое решение

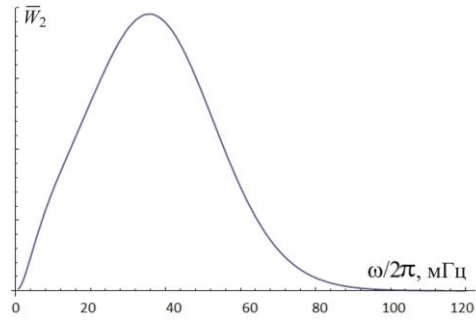


Рис. 15. График функции  $\bar{W}_2(\omega)$  для колебаний Pc3

Из рис. 14 видно, что для колебания на частоте  $\omega \approx 0.2 \text{ с}^{-1}$ , обладающего наибольшей амплитудой, максимум находится не в лобовой точке, а несколько смещен относительно нее. Это отчетливо видно на графике функции  $\tilde{W}_2(y)$ , описывающей распределение полной энергии колебаний, проинтегрированной по всем частотам (рис. 16).

Функции  $W_n(y, \omega)$ ,  $\bar{W}_n(\omega)$ ,  $\tilde{W}_n(y)$  описывают распределение энергии в БМЗ-волноводе. Аналогичные им функции  $E_{An}(y, \omega)$ ,  $\bar{E}_{An}(\omega)$ ,  $\tilde{E}_{An}(y)$  описывают распределение энергии в альфвеновском резонансе. С точки зрения наземных проявлений эти функции играют большую роль, поскольку на Земле наблюдаются именно альфвеновские волны, сосредоточенные вблизи резонансных магнитных оболочек. Выражение для  $E_{An}(y, \omega)$  дается формулой (37), в которой следует задать распределение по координате  $y$  декремента затухания альфвеновских волн  $\gamma_A(y)$  на ионосфере. Согласно формуле (36), этот декремент определяется интегральной педерсеновской проводимостью ионосферы  $\Sigma_p$ . В средних и высоких широтах она меняется не очень сильно. Следовательно, для качественного рассмотрения можно считать ее константой и принять характерное значение  $\Sigma_p = 10^8 \text{ км/с}$  (в системе СГС), тогда  $\gamma_A \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . После этого функции  $E_{An}(y, \omega)$ ,  $\bar{E}_{An}(\omega)$ ,  $\tilde{E}_{An}(y)$  легко вычисляются. Мы ограничимся тем, что приведем график функции  $\tilde{E}_{An}(y)$  (рис. 17), который в целом аналогичен графику функции  $\tilde{W}_n(y)$ , но его максимумы сильнее смещены к нулю.

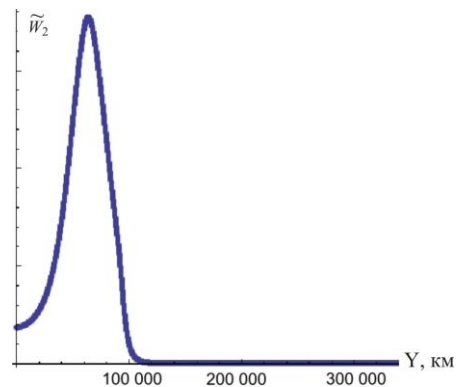


Рис. 16. График функции  $\tilde{W}_2(y)$  для колебаний Pc3



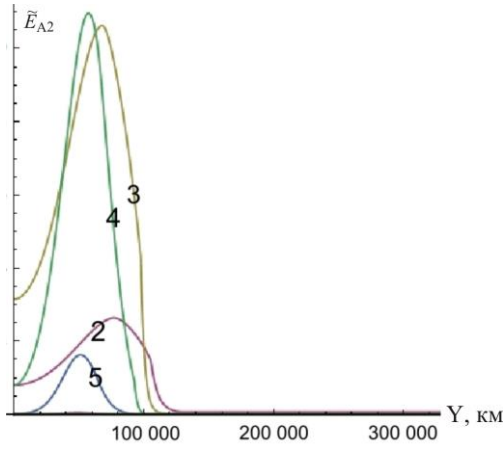


Рис. 17. Функция  $\tilde{E}_{A2}(y)$  (вторая мода) для пульсаций Pc3: 3 — 20 МГц, 4 — 40 МГц, 5 — 60 МГц

### 9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДЛЬ ВОЛНОВОДА ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ Pc5

В области частот Pc5 функция  $\bar{\delta}_{A0}(y, \omega)$ , как это видно из рис. 13, имеет широкий максимум на фланге магнитосферы, что обеспечивает существование на фланге накачки для нулевой моды. Кроме того, на фланге положителен инкремент неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Таким образом, нулевая мода на фланге отлична от нуля и мы ограничимся только ее изучением.

Для низкочастотного механизма возбуждения магнитосферного волновода в выражении для мощности накачки полагаем  $\Omega = \Omega_L \approx \pi(c_s/L) \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Для границы области накачки, в точке  $y = \bar{y}_0 + \alpha L$ , вторая строчка в выражении (55) равна

$$\frac{\alpha \omega^3}{\Omega_L^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \omega^2}{\Omega_L^2}\right).$$

Это выражение имеет максимум на частоте

$$\omega \sim \Omega_L / \alpha \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Элементарное рассмотрение показывает, что на этой частоте мощность накачки имеет наибольшую величину и во всей области  $y > \bar{y}_0 + \alpha L$ . В результате именно на этой частоте находится максимум в спектре Pc5. Как мы видим, фильтрационные свойства магнитопаузы существенно сдвигают спектральный максимум колебаний в волноводе по сравнению со спектральным максимумом в потоке энергии падающих волн (53) — от частоты  $\Omega_L$  до частоты  $\Omega_L/\alpha$ .

Из (55) видно, что для частот  $\omega \sim \Omega_L/\alpha$  характерный масштаб изменения мощности накачки по переменной  $y$  равен  $\alpha L$  — именно на таком масштабе спадает функция  $Q_0(y, \omega)$  при  $y > \bar{y}_0 + \alpha L$ . Это обстоятельство позволяет получить простое аналитическое решение уравнения переноса энергии (63). Действительно, в подынтегральном выражении множитель  $\exp[-2\Gamma_n(y', \omega)]$  меняется гораздо медленнее. Его характерный масштаб изменения  $\Delta y \sim v_g/\gamma \sim 5 \cdot 10^4$ , т. е.  $\Delta y \sim L \gg \alpha L$ . Это позволяет

представить выражение (63) при  $y > \bar{y}_0 + \alpha L$  в виде

$$S_0(y, \omega) = \tilde{Q}_0(\omega) \exp[2\tilde{\Gamma}_0(y, \omega)]. \quad (65)$$

Здесь обозначено

$$\tilde{Q}_0(\omega) = \int_{\bar{y}_0 + \alpha L}^{\infty} Q_0(y, \omega) dy, \quad (66)$$

$$\tilde{\Gamma}_0(y, \omega) = \Gamma_0(y, \omega) - \Gamma_0(\bar{y}_0 + \alpha L, \omega) = \int_{\bar{y}_0 + \alpha L}^y \frac{\gamma(y', \omega)}{v_g(y', \omega)} dy'.$$

Интегрирование в (66) формально распространено до бесконечности, но при этом имеется в виду, что фактически интеграл набирается вблизи нижнего предела на масштабе порядка  $\alpha L$ . Выражение (65) применимо только при  $y > \bar{y}_0 + \alpha L$ . В области  $y < \bar{y}_0 + \alpha L$ , конечно,  $S_0(y, \omega) = 0$ .

Решение (65) означает, что вблизи точки  $y = \bar{y}_0 + \alpha L$  колебание в волноводе получает импульсную накачку, а затем эволюционирует в соответствии с инкрементом неустойчивости. Исходя из выражения (55) легко вычислить интеграл (66):

$$\tilde{Q}_0(\omega) = 2\pi S_L \bar{\delta}_{A0}(\bar{y}_0, \omega) \frac{\omega L}{c_{AM}(\bar{y}_0)} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \omega^2}{\Omega_L^2}\right). \quad (67)$$

Множитель  $\bar{\delta}_{A0}(\bar{y}_0, \omega)$  в области частот Pc5 меняется мало, и зависимость  $\tilde{Q}_0(\omega)$  определяется двумя последними множителями в (67). Соответствующее выражение имеет максимум на частоте  $\omega_m = \Omega_L / \alpha \sqrt{2}$ . На этой частоте

$$\tilde{Q}_0(\omega_m) = \pi \sqrt{\frac{2}{e}} S_L \bar{\delta}_{A0}(\bar{y}_0, \omega_m) \frac{\Omega_L L}{c_s(\bar{y}_0)}.$$

Результаты численных расчетов подтверждают выводы проведенного качественного исследования. Из графиков зависимости от  $y$  функции  $W_0(y, \omega)$  (рис. 18) видно, что максимальную амплитуду имеют колебания с частотами, близкими к  $\omega = 0.02 \text{ с}^{-1}$ , что совпадает с частотой  $\Omega_L/\alpha$ . На рис. 19 для частоты  $\omega = 0.02 \text{ с}^{-1}$  приведены кривые  $W_0(y, \omega)$ , полученные аналитически с помощью (65) и численным решением уравнения (56). Видно, что между результатами аналитического и численного решения имеется вполне удовлетворительное согласие.

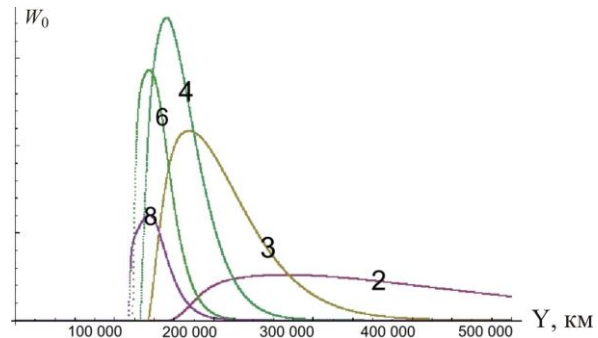


Рис. 18. Функция  $W_0(y, \omega)$  (нулевая мода) для нескольких значений частоты в диапазоне Pc5: 2 — 2 МГц, 3 — 3 МГц, 4 — 5 МГц, 6 — 8 МГц, 8 — 12 МГц

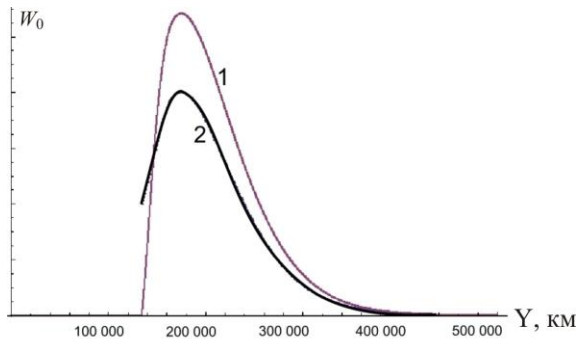


Рис. 19. Аналитическое и численное решения для функции  $W_0(y, \omega)$  (нулевая мода) при частоте  $\omega=0.02 \text{ с}^{-1}$ : 1 — численное решение уравнения, 2 — приближенное аналитическое решение

Более наглядно спектр колебаний в волноводе описывается функцией  $\bar{W}_0(\omega)$  (рис. 20). Легко увидеть (рис. 20), что максимум спектральной плотности находится на частоте  $\omega=0.02 \text{ с}^{-1}$  и быстро спадает при удалении от нее. Пространственное распределение колебаний в волноводе наглядно описывается функцией  $\tilde{W}_0(y)$ , приведенной на рис. 21. Видно, что колебания Pc5 локализованы на фланге магнитосферы.

Графики функций  $E_{A0}(y, \omega)$ ,  $\bar{E}_{A0}(\omega)$ ,  $\tilde{E}_{A0}(y)$  для колебаний Pc5 мы приводить не будем, поскольку функция  $\bar{\delta}_{A0}(y, \omega)$  незначительно меняется в области локализации Pc5 и, следовательно, ход указанных функций качественно не отличается от хода соответствующих функций  $W_0(y, \omega)$ ,  $\bar{W}_0(\omega)$ ,  $\tilde{W}_0(y)$ .

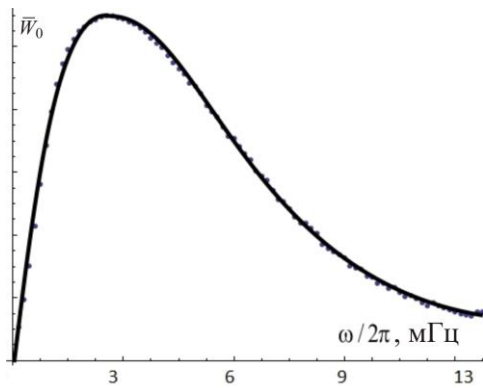


Рис. 20. Функция  $\bar{W}_0(\omega)$  (нулевая мода), полученная численным методом, для колебаний Pc5

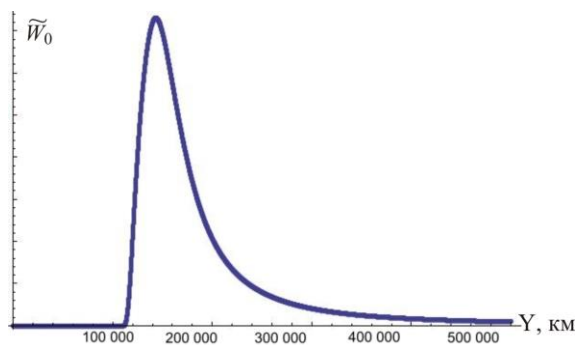


Рис. 21. Функция  $\tilde{W}_0(y)$  (нулевая мода), полученная численным методом, для колебаний Pc5

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты работы.

1. Предложена двумерно-неоднородная модель магнитосферы, описывающая многие важные ее свойства, в рамках которой возможно аналитическое исследование БМЗ-колебаний во внешней магнитосфере и связанных с ними альфвеновских волн в ее глубине. Поскольку, как показывают наши оценки, для описания структуры колебаний по координате  $y$  применимо ВКБ-приближение, можно использовать однородную модель среды с параметрами, соответствующими локальному значению координаты  $y$ . При распространении вдоль волновода свойства колебаний подстраиваются под локальные свойства волновода.

2. Изменение инкремента неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в основном определяется изменением скорости солнечного ветра вдоль волновода — от нулевого значения в застойной точке до максимальных значений на далеких флангах. В лобовой области инкремент отрицателен, т. е. фактически является декрементом затухания, которое обусловлено альфвеновским резонансом. При продвижении к флангу имеется область, в которой инкремент равен нулю, соответствующая области непрозрачности для колебаний с данными параметрами в солнечном ветре. Затем, начиная с некоторой пороговой точки, инкремент положителен и достигает максимума в точке, где скорость солнечного ветра равна фазовой скорости колебаний вдоль волновода. Далее инкремент уменьшается, проходит через нуль и снова стремится к асимптотическому значению, равному декременту затухания в альфвеновском резонансе.

3. Для колебаний с частотами  $\omega \sim \Omega_H$  декремент затухания на альфвеновском резонансе, а вместе с ним и мощность накачки, имеет максимум в лобовой области магнитосферы и обращается в нуль на ее флангах. Колебания локализируются в лобовой области, где устанавливается определенное равновесие между накачкой внешними волнами и диссипацией в альфвеновском резонансе. Это есть не что иное, как колебания Pc3. Максимум амплитуды колебаний находится не точно в лобовой точке. Этот эффект обусловлен тем, что максимум мощности накачки для частот, близких к  $\Omega_H$ , также смещен относительно лобовой точки. Волны в переходном слое, порождаемые на фронте головной ударной волны, имеют спектральный максимум на частоте  $\Omega_L = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Но фильтрационные свойства магнитопаузы не пропускают столь низкочастотные волны, в результате максимум в спектре проникших волн сдвигается с частоты  $\Omega_L$  до частоты  $\Omega_L/\alpha = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует частоте колебаний Pc5. В этом частотном диапазоне декремент затухания в альфвеновском резонансе, а вместе с ним и мощность накачки, имеет максимумы на фланге магнитосферы. Инкремент неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на фланге также положителен. Оба эти обстоятельства предопределяют локализацию на фланге рассматриваемых колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гульельми А.В., Потапов А.С., Д'Коста А. К теории возбуждения геомагнитных пульсаций типа Pc3 // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1976. Вып. 39. С. 27–32.

Мазур В.А. Резонансное возбуждение магнитосферной гидромагнитными волнами, падающими из солнечного ветра // *Физика плазмы*. 2010. Т. 36, № 11. С. 1013–1023. DOI: 10.1134/S1063780X10110048.

Потапов А.С. Возбуждение геомагнитных пульсаций типа Pc3 перед фронтом околосолнечной ударной волны пучком отраженных протонов // *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*. 1974. Вып. 34. С. 3–12.

Шафранов В.Д. Электромагнитные волны в плазме // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М.А. Леонтовича. Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 3–140.

Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publ., 1965. 1046 p.

Dmitrienko I.S. Evolution of FMS and Alfvén waves produced by the initial disturbance in the FMS waveguide // *J. Plasma Phys.* 2013. V. 79, N 01. P. 7–17. DOI: 10.1017/S0022377812000608.

Foullon C., Farrugia C.J., Fazakerley A.N., et al. Evolution of Kelvin–Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. p. A11203. DOI: 10.1029/2008JA013175.

Ghosch S., Thomson D.J., Matthaeus W.H., Lanzerotti L.J. Coexistence of turbulence and discrete modes in the solar wind // *J. Geophys. Res.* 2009. V. 114. P. A08106. DOI: 10.1029/2009JA014092.

Gurnett D.A., Anderson R.R., Tsurutani B.T., et al. Plasma wave turbulence at the magnetopause: Observations from ISEE 1 and 2 // *J. Geophys. Res.* 1979. V. 84. P. 7043–7058. DOI: 10.1029/JA084iA12p07043.

Hughes W.J. The effect of the atmosphere and ionosphere on long period magnetospheric micropulsations // *Planet. Space Sci.* 1974. V. 22. P. 1157. DOI: 10.1016/0032-0633(74)90001-4.

James M.K. The spatio-temporal characteristics of ULF waves driven by substorm injected particles. // *J. Geophys. Res.* 2013. V. 118. P. 1737. DOI: 10.1002/jgra.50131.

Kozlov D.A. Transformation and absorption of magnetosonic waves generated by solar wind in the magnetosphere // *JASTP*. 2010. V. 72, N 18. P. 1348–1353. DOI: 10.1016/j.jastp.2010.09.023.

Leonovich A.S., Mazur V.A. On the spectrum of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 3919–3928. DOI: 10.1029/2000JA000228.

Leonovich A.S., Mishin V.V., Cao J.B. Penetration of magnetosonic waves into the magnetosphere: Influence of a transition layer // *Annales Geophysicae*. 2003. V. 21, N 5. P. 1083–1093. DOI: 10.5194/angeo-21-1083-2003.

Liu Chen. Kinetic theory of geomagnetic pulsations // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96. P. 1503. DOI: 10.1029/90JA02346.

Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Generation of Alfvén waves by a plasma inhomogeneity moving in the Earth's magnetosphere // *Plasma Phys. Rep.* 2007. V. 33. P. 391. DOI: 10.1134/S1063780X07050042.

Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Alfvén ship waves: High-m ULF pulsations in the magnetosphere generated by a moving plasma inhomogeneity // *Ann. Geophys.* 2008. V. 26. P. 1653–1663. DOI: 10.5194/angeo-26-1653-2008.

Mann I.R., Chisham G., Bale S.D. Multisatellite and ground-based observations of a tailward propagating Pc5 magnetospheric waveguide mode // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103, N A3. P. 4657–4669. DOI: 10.1029/97JA03175.

Mann I.R., Wright A.N., Mills K.J., et al. Excitation of magnetospheric waveguide modes by magnetosheath flows // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104, N A1. P. 333–353. DOI: 10.1029/1998JA900026.

Mann I.R., Wright A.N. Diagnosing the excitation mechanisms of Pc5 magnetospheric flank waveguide modes and FLRs // *Geophys. Res. Lett.* 1999. V. 26, N 16. P. 2609–2612. DOI: 10.1029/1999GL900573.

Mazur V.A., Chuiko D.A. Excitation of a magnetospheric MHD cavity by Kelvin–Helmholtz instability // *Plasma Phys. Rep.* 2011. V. 37, N 11. P. 913–934. DOI: 10.1134/S1063780X11090121.

Mazur V.A., Chuiko D.A. Kelvin–Helmholtz instability on the magnetopause, magnetospheric waveguide in the outer magnetosphere, and Alfvén resonance deep in the magnetosphere // *Plasma Phys. Rep.* 2013a. V. 39, N 6. P. 488–503. DOI: 10.1134/S1063780X13060068.

Mazur V.A., Chuiko D.A. Influence of the outer-magnetospheric magnetohydrodynamic waveguide on the reflection of hydromagnetic waves from a shear flow at the magnetopause // *Plasma Phys. Rep.* 2013b. V. 39, N 12. P. 959–975. DOI: 10.1134/S1063780X13120064.

McPherron R.L. Magnetic pulsations: Their sources and relation to solar wind and geomagnetic activity // *Surveys in Geophysics*. 2005. V. 26. P. 545–592. DOI: 10.1007/s10712-005-1758-7.

Potapov A.S., Mazur V.A. Pc3 pulsations: From the source in the upstream region to Alfvén resonances in the magnetosphere. Theory and observations // *Solar Wind Sources of Magnetospheric Ultra-Low-Frequency Waves* / Ed. by M. J. Engebretson, K. Takahashi, and M. Scholer. Washington, D.C.: American Geophysical Union, 1994. P. 135–145. (Geophysical Monograph. V. 81). DOI: 10.1029/GM081.

Pu Zu-yin, Kivelson M.G. The Kelvin–Helmholtz instability at the magnetopause // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. P. 853–861. DOI: 10.1029/JA088iA02p00841.

Stephenson J.A.E., Walker A.D.M. Coherence between radar observation of magnetospheric field line resonances and discrete oscillations in the solar wind // *Ann. Geophys.* 2010. V. 28. P. 47–59. DOI: 10.5194/angeo-28-47-2010.

Sung S.K., Kim K.H., Lee D.H., et al. Simultaneous ground-based and satellite observations of Pc5 geomagnetic pulsations: A case study using multipoint measurements // *Earth Planets Space*. 2006. V. 58. P. 873–883. DOI: 10.1186/BF03351992.

Thomson D.J., Lanzerotti L.J., MacLennan C.G. Interplanetary magnetic field: Statistical properties and discrete modes // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 15941–15962. DOI: 10.1029/2000JA000113.

Thomson D.J., Lanzerotti L.J., MacLennan C.G. Studies of some statistics of the interplanetary magnetic field and implications for discrete modes // *Adv. Space Res.* 2002. V. 29, N 12. P. 1911–1916. DOI: 10.1016/S0273-1177(02).

Walker A.D.M. Excitation of magnetohydrodynamic cavities in the magnetosphere // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 1998. V. 60. P. 1279–1293. DOI: 10.1016/S1364-6826(98)00077-7.

Walker A.D.M. Excitation of field line resonances by sources outside the magnetosphere // *Annales Geophysicae*. 2005. V. 23. P. 3375–3388. DOI: 10.5194/angeo-23-3375-2005.

Wright A.N. Dispersion and wave coupling in inhomogeneous MHD waveguides // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99. P. 159–167. DOI: 10.1029/93JA02206.

Wright A.N., Mann I.R. Global MHD eigenmodes of the outer magnetosphere // *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions* / Ed. by Kazuo Takahashi et al. Washington, DC: American Geophysical Union, 2006. P. 51–72. (Geophysical Monograph. V. 169). DOI: 10.1029/GM169.

## REFERENCES

Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publ., 1965, 1046 p.

Dmitrienko I.S. Evolution of FMS and Alfvén waves produced by the initial disturbance in the FMS waveguide. *J. Plasma Phys.* 2013. vol. 79, no. 01. pp. 7–17. DOI: 10.1017/S0022377812000608.

Foullon C., Farrugia C.J., Fazakerley A. N., et al. Evolution of Kelvin–Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause. *J. Geophys. Res.* 2008, vol. 113, pp. A11203. DOI: 10.1029/2008JA013175.

- Ghosch S., Thomson D.J., Matthaeus W.H., Lanzerotti L.J. Coexistence of turbulence and discrete modes in the solar wind. *J. Geophys. Res.* 2009, vol. 114, p. A08106. DOI: 10.1029/2009JA014092.
- Guglielmi A.V., Potapov A.S., D'Costa A. On the theory of excitation of Pc3 geomagnetic pulsations. *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Research on Geomagnetism, Aeronomy and Physics of the Sun]. 1976, iss. 39, pp. 27–32 (in Russian).
- Gurnett D.A., Anderson R.R., Tsurutani B.T., et al. Plasma wave turbulence at the magnetopause: Observations from ISEE 1 and 2. *J. Geophys. Res.* 1979, vol. 84, pp. 7043–7058. DOI: 10.1029/JA084iA12p07043.
- Hughes W.J. The effect of the atmosphere and ionosphere on long period magnetospheric micropulsations. *Planet. Space Sci.* 1974, vol. 22, p. 1157. DOI: 10.1016/0032-0633(74)90001-4.
- James M.K. The spatio-temporal characteristics of ULF waves driven by substorm injected particles. *J. Geophys. Res.* 2013, vol. 188, p. 1737. DOI: 10.1002/jgra.50131.
- Kozlov D.A. Transformation and absorption of magnetosonic waves generated by solar wind in the magnetosphere. *JASTP.* 2010, vol. 72, no. 18, pp. 1348–1353. DOI: 10.1016/j.jastp.2010.09.023.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. On the spectrum of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, pp. 3919–3928. DOI: 10.1029/2000JA000228.
- Leonovich A.S., Mishin V.V., Cao J.B. Penetration of magnetosonic waves into the magnetosphere: Influence of a transition layer. *Annales Geophysicae.* 2003, vol. 21, no. 5, pp. 1083–1093. DOI:10.5194/angeo-21-1083-2003.
- Liu Chen. Kinetic theory of geomagnetic pulsations. *J. Geophys. Res.* 1991, vol. 96, p. 1503. DOI: 10.1029/90JA02346.
- Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Generation of alfvén waves by a plasma inhomogeneity moving in the Earth's magnetosphere. *Plasma Physics Reports.* 2007, vol. 33, p. 391. DOI: 10.1134/S1063780X07050042.
- Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Alfvén ship waves: High-m ULF pulsations in the magnetosphere generated by a moving plasma inhomogeneity. *Ann. Geophys.* 2008, vol. 26, pp. 1653–1663. DOI:10.5194/angeo-26-1653-2008.
- Mann I.R., Chisham G., Bale S.D. Multisatellite and ground-based observations of a tailward propagating Pc5 magnetospheric waveguide mode. *J. Geophys. Res.* 1998, vol. 103, no. A3, pp. 4657–4669. DOI: 10.1029/97JA03175.
- Mann I.R., Wright A.N., Mills K.J., et al. Excitation of magnetospheric waveguide modes by magnetosheath flows. *J. Geophys. Res.* 1999, vol. 104, no. A1, pp. 333–353. DOI: 10.1029/1998JA900026.
- Mann I.R., Wright A.N. Diagnosing the excitation mechanisms of Pc5 magnetospheric flank waveguide modes and FLRs. *Geophys. Res. Lett.* 1999, vol. 26, no. 16, pp. 2609–2612. DOI: 10.1029/1999GL900573.
- Mazur V.A. Resonance excitation of the magnetosphere by hydromagnetic waves incident from solar wind. *Fizika plazmy* [Plasma Physics]. 2010, vol. 36, no. 11, pp. 1013–1023. (in Russian). DOI: 10.1134/S1063780X10110048.
- Mazur V.A., Chuiko D.A. Excitation of a magnetospheric MHD cavity by Kelvin–Helmholtz instability. *Plasma Physics Reports.* 2011, vol. 37, no. 11, pp. 913–934. DOI: 10.1134/S1063780X11090121.
- Mazur V.A., Chuiko D.A. Kelvin–Helmholtz instability on the magnetopause, magnetospheric waveguide in the outer magnetosphere, and Alfvén resonance deep in the magnetosphere. *Plasma Physics Reports.* 2013a, vol. 39, no. 6, pp. 488–503. DOI: 10.1134/S1063780X13060068.
- Mazur V.A., Chuiko D.A. Influence of the outer-magnetospheric magnetohydrodynamic waveguide on the reflection of hydromagnetic waves from a shear flow at the magnetopause. *Plasma Physics Reports.* 2013b, vol. 39, no. 12, pp. 959–975. DOI: 10.1134/S1063780X13120064.
- McPherron R.L. Magnetic pulsations: Their sources and relation to solar wind and geomagnetic activity. *Surveys in Geophysics.* 2005, vol. 26, pp. 545–592. DOI 10.1007/s10712-005-1758-7.
- Potapov A.S. Excitation of Pc3 geomagnetic pulsations ahead of the bow shock by the beam of reflected protons. *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Research on Geomagnetism, Aeronomy and Physics of the Sun]. 1974, iss. 34, pp. 3–12 (in Russian).
- Potapov A.S., Mazur V.A. Pc3 pulsations: From the source in the upstream region to Alfvén resonances in the magnetosphere. Theory and observations. Engebretson M.J., Takahashi K., Scholer M. (eds.). *Solar Wind Sources of Magnetospheric UltraLow-Frequency Waves.* Washington, American Geophysical Union Publ., 1994, pp. 135–145. (Geophysical Monograph. Vol. 81). DOI: 10.1029/GM081.
- Pu Zu-yin, Kivelson M.G. The Kelvin–Helmholtz instability at the magnetopause. *J. Geophys. Res.* 1983, vol. 88, pp. 853–861. DOI: 10.1029/JA088iA02p00841.
- Shafranov V.D. Electromagnetic waves in a plasma. Eds. by M.A. Leontovich. *Voprosy teorii plazmy* [Plasma theory issues]. Gosatomizdat Publ., 1963, iss. 3, pp. 3–140 (in Russian).
- Stephenson J.A.E., Walker A.D.M. Coherence between radar observation of magnetospheric field line resonances and discrete oscillations in the solar wind. *Ann. Geophys.* 2010, vol. 28, pp. 47–59. DOI:10.5194/angeo-28-47-2010.
- Sung S.K., Kim K.H., Lee D.H., et al. Simultaneous ground-based and satellite observations of Pc5 geomagnetic pulsations: A case study using multipoint measurements. *Earth Planets Space.* 2006, vol. 58, pp. 873–883. DOI: 0.1186/BF03351992.
- Thomson D.J., Lanzerotti L.J., MacLennan C.G. Interplanetary magnetic field: Statistical properties and discrete modes. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, pp. 15941–15962. DOI: 10.1029/2000JA000113.
- Thomson D.J., Lanzerotti L.J., MacLennan C.G. Studies of some statistics of the interplanetary magnetic field and implications for discrete modes. *Adv. Space Res.* 2002, vol. 29, no. 12, pp. 1911–1916. DOI:10.1016/S0273-1177(02).
- Walker A.D.M. Excitation of magnetohydrodynamic cavities in the magnetosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 1998, vol. 60, pp. 1279–1293. DOI: 10.1016/S1364-6826(98)00077-7.
- Walker A.D.M. Excitation of field line resonances by sources outside the magnetosphere. *Annales Geophysicae.* 2005, vol. 23, pp. 3375–3388. DOI:10.5194/angeo-23-3375-2005.
- Wright A.N. Dispersion and wave coupling in inhomogeneous MHD waveguides. *J. Geophys. Res.* 1994, vol. 99, pp. 159–167. DOI: 10.1029/93JA02206.
- Wright A.N., Mann I.R. Global MHD eigenmodes of the outer magnetosphere. Kazue Takahashi et al. (eds.). *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions.* Washington, American Geophysical Union Publ., 2006, pp. 51–72. (Geophysical Monograph. Vol. 169). DOI: 10.1029/GM169.