

УДК 515:514.174.5

DOI: 10.12737/2308-4898-2025-14-2-35-46

В.В. Рустамьян

Старший преподаватель,
МИРЭА – Российский технологический университет,
Россия, 119454, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78,
e-mail: vv@rustamyan.ru

А.М. Жигулин

Студент,
МИРЭА – Российский технологический университет,
Россия, 119454, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78,
e-mail: knowhow30082020@gmail.com

Эйлерова характеристика $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности

Аннотация. Статья продолжает исследование $\alpha\beta$ -триангуляции — оптимальной по критерию минимизации суммы длин β -рёбер триангуляции с выделенным множеством α -треугольников. Ранее модель была определена на евклидовой плоскости и распространена на замкнутые сферические поверхности; обобщение на произвольный род g до сих пор не было получено. Инструментом исследования служит формула Эйлера — Пуанкаре в сочетании с характеристическим равенством $V = 3a$ для $\alpha\beta$ -триангуляции. Получены формулы числа β -граней $b = 5a + 4g - 4$ и числа β -рёбер $E_\beta = 6(a + g - 1)$ для замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции рода g . Результаты обобщены на компактные ориентируемые поверхности с произвольным числом компонент границы h : получено точное равенство для b , двойное неравенство для b через тройку (a, g, h) и необходимое условие существования $a \geq h$. Все ранее известные результаты — для сферы, для замкнутой поверхности рода g и для топологического диска — получаются как частные случаи. Формулы проверены на 15 замкнутых $\alpha\beta$ -триангуляциях родов 1, 2, 4 (вплоть до $a = 2884$) и на восьми образцах дисков с отверстиями. Полученные результаты позволяют прогнозировать размер $\alpha\beta$ -триангуляции до её построения, контролировать корректность алгоритмов и выбирать параметры дискретизации при аппроксимации поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных граней.

Ключевые слова: $\alpha\beta$ -триангуляция, эйлерова характеристика, замкнутые поверхности, поверхности с границей, дискретные поверхности.

V.V. Rustamyan

Senior Lecturer,
MIREA – Russian Technological University,
78, Vernadskogo av., Moscow, 119454, Russia,
e-mail: vv@rustamyan.ru

A.M. Zhigulin

Student,
MIREA – Russian Technological University,
78, Vernadskogo av., Moscow, 119454, Russia
e-mail: knowhow30082020@gmail.com

Euler Characteristic of $\alpha\beta$ -Triangulation of a Compact Orientable Surface

Abstract. This paper continues the study of $\alpha\beta$ -triangulation — a triangulation with a designated set of α -triangles that is optimal in the sense of minimising the total length of β -edges. The model

was previously defined on the Euclidean plane and extended to closed spherical surfaces; a generalisation to arbitrary genus g has not been obtained until now. The research tool is the Euler — Poincaré formula combined with the characteristic identity $V = 3a$ for $\alpha\beta$ -triangulation. We obtain formulas for the number of β -faces $b = 5a + 4g - 4$ and β -edges $E_\beta = 6(a + g - 1)$ of a closed $\alpha\beta$ -triangulation of genus g . The results are extended to compact orientable surfaces with an arbitrary number of boundary components h : an exact equality for b , a double inequality for b in terms of (a, g, h) , and the necessary existence condition $a \geq h$. All previously known results — for the sphere, for the closed surface of genus and for the topological disk — follow as special cases. The formulas are verified on 15 closed $\alpha\beta$ -triangulations of genera 1, 2, 4 (up to $a = 2884$) and on eight samples of disks with holes. The results allow predicting the size of an $\alpha\beta$ -triangulation before its construction, verifying the correctness of generating algorithms, and choosing discretisation parameters when approximating free-form surfaces by polyhedra with groups of congruent faces.

Keywords: $\alpha\beta$ -triangulation, Euler characteristic, closed surfaces, surfaces with boundary, discrete surfaces.

Аппроксимация гладких поверхностей свободной формы дискретными поверхностями — одна из фундаментальных задач современного геометрического моделирования. В архитектурном проектировании она особенно остро проявляется в задачах возведения большепролётных оболочек сложной формы: криволинейные поверхности параметрической архитектуры [7; 12] реализуются через полиэдральные конструкции, собираемые из плоских панелей и балок. Практика показывает, что основным источником затрат при возведении таких конструкций является не общая площадь поверхности, а разнообразие типов строительных элементов: каждая уникальная форма панели, балки или узла требует собственной формы (опалубки, пресс-формы) и индивидуальной оснастки. Поэтому задача рационализации свободных форм сводится к минимизации числа различных типов панелей, балок и узлов при сохранении близости к целевой геометрии — обзор современных подходов к этой задаче приведён ниже.

В зарубежной литературе по архитектурной геометрии разработан ряд подходов к этой задаче. Один из них использует специальные классы поверхностей, для которых повторяемость элементов возникает естественно из их дифференциально-геометрических свойств, — поверхности с постоянным отношением главных кривизн [17] и структуры из повторяющихся модулей [22]. Другой подход опирается на кластеризацию элементов сетки по геометрическому сходству с последующей оптимизацией положений вершин [19; 20]; в последние годы этот подход развивается в направлении одновременной оптимизации нескольких типов элементов (узлов, балок и панелей) [23] и использования фрагментов поверхностей вра-

щения, обеспечивающих точную конгруэнтность граней внутри каждой группы [24]. Отдельную линию составляют работы, ориентированные на повторное использование опалубки за счёт специальной структуры панелей [21]. Близкая по постановке задача — изометрическая декомпозиция органических форм на k классов конгруэнтных треугольников — рассматривается в [18] в связи с 3D-печатью биологических моделей. Во всех этих работах одним из центральных вопросов остаётся вопрос о комбинаторной структуре полученной дискретной поверхности: число и типы граней, рёбер и вершин, соотношения между ними и их связь с топологией аппроксимируемой поверхности.

Комбинаторная сторона триангуляций замкнутых поверхностей имеет богатую математическую традицию. Классическая формула Эйлера — Пуанкаре [2], связывающая число вершин, рёбер и граней триангуляции с родом поверхности, вместе с соотношениями Дена—Соммервилля [1; 3] даёт основу для анализа f -векторов триангуляций сфер и многообразий. В этом контексте изучаются минимальные триангуляции двумерных многообразий [14], в том числе минимальные симплициальные отображения между триангулированными поверхностями разного рода [25], сбалансированные триангуляции и операции над ними [16]. С другой стороны, в последние годы активно развивается линия вычислительной геометрии триангуляций с оптимизационными ограничениями [4–6; 15]; операции преобразования триангуляций (флип, стягивание, расщепление) [8] являются основным инструментом перехода от произвольной триангуляции к оптимальной.

В ряде предыдущих работ автора [9–11] развивается математическая модель $\alpha\beta$ -триангуляции — триангуляции с выделенным множеством попарно не смежных α -треугольников, в которой сумма длин β -рёбер минимальна. Модель возникла как ответ на практическую потребность: для того, чтобы до начала оптимизации аппроксимирующего полиэдра можно было задать группу или группы конгруэнтных граней, не теряя при этом подвижности математической модели для механизмов оптимизации. Теоретические основы $\alpha\beta$ -триангуляции для евклидовой плоскости изложены в [9], алгоритм рекомбинации β -рёбер посредством флипа описан в [10], а расширение модели на трёхмерное евклидово пространство, включая замкнутые дискретные поверхности, проведено в [11]. В последней работе получен ряд свойств замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции, среди которых особое место занимает свойство 7.1: число β -граней b в замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции рода 0 связано с числом α -граней соотношением

$$b = 5(a - 1) + 1.$$

Данное свойство выведено индуктивным построением $\alpha\beta$ -триангуляций, гомеоморфных сфере, и справедливо исключительно для поверхностей рода 0. Однако естественная геометрическая и вычислительная потребность — аппроксимация поверхностей произвольной топологической сложности — требует распространения указанной зависимости на случай любого рода g . В [11] эта задача прямо обозначена как перспективное направление: «интересным к дальнейшему изучению представляется обобщение свойства 7.1 для $\alpha\beta$ -триангуляций рода, отличного от 0».

Настоящая статья посвящена решению именно этой задачи. Основным инструментом исследования выступает формула Эйлера — Пуанкаре. Ключевое наблюдение состоит в том, что аксиома 2 $\alpha\beta$ -триангуляции, устанавливающая равенство множества вершин триангуляции множеству α -вершин, приводит к жёсткой связи $V = 3a$. Подстановка этой связи в формулу Эйлера превращает её из соотношения между тремя независимыми параметрами (V , E , F) в линейное уравнение с двумя свободными комбинаторными параметрами a и g , что и позволяет выразить b как функцию a и g .

Дополнительно по ходу вывода возник естественный вопрос о зависимости числа β -рёбер от a и g . Поскольку число α -рёбер выражается через a элементарно (свойство 1 в [9]), а общее число рёбер связано с числом граней соотношением $3F = 2E$, число β -рёбер также возможно выразить через a и g . Получение этой формулы стало второй задачей исследования.

Цели исследования. В представленном исследовании ставятся следующие задачи:

- 1) вывести уравнение, выражающее число β -граней замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции через число α -граней и род поверхности;
- 2) вывести уравнение, выражающее число β -рёбер замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции через число α -граней и род поверхности;
- 3) распространить полученные результаты на $\alpha\beta$ -триангуляции компактных ориентируемых поверхностей с произвольным числом компонент границы и установить согласование с ранее известным двойным неравенством свойства 7 из [9] для топологического диска;
- 4) провести экспериментальную проверку полученных уравнений с помощью программных средств построения $\alpha\beta$ -триангуляций [13].

Предварительные сведения. В целях ознакомления читателя с математической моделью, которая по сути своей является оптимальной триангуляцией с огра-

нениями по критерию минимизации суммы длин рёбер, процитируем из [9] определение $\alpha\beta$ -триангуляции и систему её аксиом.

«**Определение.** Возьмём сильно связную триангуляцию K размерности 2 в пространстве E^2 . Выделим некоторое множество граней и обозначим их замыкания α -треугольниками. Соответственно остальные элементы триангуляции обозначаются β -элементами. Такой комплекс назовём $\alpha\beta$ -триангуляцией ($T_{\alpha\beta}$), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Тела α -треугольников не имеют общих точек;
2. Триангуляция содержит в себе только вершины остовов α -треугольников;
3. Сумма длин β -рёбер минимальна.»

Ограничения, заданные автором в определении, являются аксиомами математической модели $\alpha\beta$ -триангуляции и в [9] выписаны отдельно как *аксиома 1* («Тела α -треугольников не имеют общих точек»), *аксиома 2* («Вершинами $\alpha\beta$ -триангуляции являются только α -вершины множества T_α^0 ») и *аксиома 3* (« α -треугольники связны между собой β -рёбрами, длины которых минимальны из возможных»). Алгоритм построения $\alpha\beta$ -триангуляции из произвольной триангуляции, включая механизм рекомбинации β -рёбер посредством флипа, подробно описан в [9; 10].

Из определения и аксиом в [9] выведен ряд свойств, из которых для дальнейшего нам понадобятся следующие.

«**Свойство 1.** Для $\alpha\beta$ -триангуляции справедливо соотношение $|T_\alpha^0| = |T_\alpha^1| = 3|T_\alpha^2|$, где T_α^0 — количество α -вершин, $|T_\alpha^1|$ — количество α -отрезков, $|T_\alpha^2|$ — количество α -треугольников.» [9]

«**Свойство 2.** Множество β -граней служит дополнением α -граней до множества всех граней триангуляции.» [9]

Из свойства 2 непосредственно следует разбиение множества граней $\alpha\beta$ -триангуляции на α -границы и β -границы и, соответственно, равенство

$$F = a + b, \quad (1)$$

где F — общее число граней, a — число α -граней, b — число β -граней.

Из аксиомы 2 следует, что вершинами $\alpha\beta$ -триангуляции являются исключительно α -вершины. С учётом свойства 1 это даёт соотношение

$$V = 3a, \quad (2)$$

где V — общее число вершин $\alpha\beta$ -триангуляции. Важно подчеркнуть, что равенство (2) является характеристической чертой $\alpha\beta$ -триангуляции и отличает её от произвольной триангуляции с тем же числом граней.

Множество рёбер $\alpha\beta$ -триангуляции разбивается на α -рёбра и β -рёбра (свойство 3 в [9], являющееся дополнительным к свойству 2). Обозначим общее число рёбер за E , число α -рёбер — за E_α , число β -рёбер — за E_β . Тогда

$$E = E_\alpha + E_\beta, \quad (3)$$

причём согласно свойству 1

$$E_\alpha = 3a. \quad (4)$$

Наконец, в любой триангуляции двумерного замкнутого комплекса без края каждое ребро инцидентно ровно двум граням, а каждая грань — трём рёбрам, откуда вытекает хорошо известное [2] комбинаторное тождество

$$3F = 2E. \quad (5)$$

Таким образом, равенства (1)–(5) дают полный набор комбинаторных соотношений, связывающих параметры замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции.

Формула Эйлера — Пуанкаре и $\alpha\beta$ -триангуляция. Напомним формулу Эйлера — Пуанкаре для замкнутой ориентируемой поверхности рода g [2, с. 214]:

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g, \quad (6)$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности. Величина χ является топологическим инвариантом и для замкнутой ориентируемой поверхности однозначно определяется родом $g \in \mathbb{N}_0$. В частности, для сферы ($g = 0$) имеем $\chi = 2$, для тора ($g = 1$) — $\chi = 0$, для кренделя рода 2 — $\chi = -2$ и т.д.

Для произвольной триангуляции замкнутой поверхности формула (6) связывает три независимых комбинаторных параметра V , E , F . В случае же $\alpha\beta$ -триангуляции в силу соотношений (1), (2), (5) число параметров сокращается. Действительно, подставим (1), (2) в (5):

$$3(a + b) = 2E,$$

откуда

$$E = \frac{3(a+b)}{2}. \quad (7)$$

Подставляя теперь (1), (2) и (7) в (6), получим

$$3a - \frac{3(a+b)}{2} + (a+b) = 2 - 2g.$$

Приведение подобных членов даёт

$$\frac{5a}{2} - \frac{b}{2} = 2 - 2g.$$

Умножая обе части на 2 и выражая b , окончательно приходим к формуле

$$b = 5a + 4g - 4. \quad (8)$$

Формула (8) и есть искомое обобщение свойства 7.1 из [11] на случай замкнутых ориентируемых поверхностей произвольного рода. Отметим, что при $g = 0$ формула (8) даёт $b = 5a - 4 = 5(a - 1) + 1$, что в точности совпадает со свойством 7.1, полученным в [11] индуктивным построением.

Приведём результат в виде отдельного утверждения, продолжая нумерацию свойств $\alpha\beta$ -триангуляции, начатую в [9; 11].

Свойство 10. Для замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции рода число β -граней выражается через число α -граней формулой (8).

В терминах эйлеровой характеристики формула (8) допускает более компактную запись:

$$b = 5a - 2\chi, \quad (9)$$

что подчёркивает центральную роль характеристики χ в рассматриваемой зависимости. Заметим, что коэффициент 5 при a не зависит от топологии поверхности; топология проявляется исключительно в свободном члене, пропорциональном χ . Геометрически это можно интерпретировать так: добавление одной «ручки» к поверхности (увеличение рода на единицу) при фиксированном числе α -треугольников требует четырёх дополнительных β -граней — именно столько β -граней необходимо для минимальной замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции, покрывающей дополнительную ручку, при сохранении аксиом модели. Отметим, что аналогичная роль эйлеровой характеристики как центрального инварианта, связывающего комбинаторику и топологию, прослеживается и в классических соотношениях Дена — Соммервилля для f -векторов триангуляций сфер и многообразий [1, 3].

Число β -рёбер замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции. Имея формулу (8), можно получить явное выражение для числа β -рёбер. Подставим (8) в (1):

$$F = a + (5a + 4g - 4) = 6a + 4g - 4. \quad (10)$$

Далее, используя (5),

$$E = \frac{3}{2} \cdot F = \frac{3}{2} (6a + 4g - 4) = 9a + 6g - 6. \quad (11)$$

Наконец, вычитая из (11) число α -рёбер согласно (4), получаем

$$E_\beta = E - E_\alpha = (9a + 6g - 6) - 3a = 6a + 6g - 6. \quad (12)$$

Формула (12) может быть записана в более симметричной форме:

$$E_\beta = 6(a + g - 1) \quad (13)$$

или, в терминах эйлеровой характеристики,

$$E_\beta = 6a - 3\chi. \quad (14)$$

Сформулируем полученное в виде утверждения.

Свойство 11. Для замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции рода $g \in \mathbb{N}_0$ число β -рёбер выражается через число α -граней формулой (13).

Замечание. Коэффициент при a в формуле (13) равен 6, что согласуется с известным фактом: в регулярной триангуляции плоскости (и, шире, в триангуляции, стремящейся к регулярной при $a \rightarrow \infty$) средняя степень вершины стремится к 6. Действительно, для $\alpha\beta$ -триангуляции средняя степень вершины

$$\dot{d} = \frac{2E}{V} = \frac{2(9a + 6g - 6)}{3a} = 6 + \frac{4(g-1)}{a} \quad (15)$$

и при $a \rightarrow \infty$ справедливо $\dot{d} \rightarrow 6$ для любого рода g .

Отметим также, что отношение числа α -граней к общему числу граней $\alpha\beta$ -триангуляции согласно (10) равно

$$\frac{a}{F} = \frac{a}{(6a + 4g - 4)} \rightarrow \frac{1}{6} \text{ при } a \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Таким образом, доля α -треугольников в $\alpha\beta$ -триангуляции асимптотически стремится к $\frac{1}{6} \approx 16,67\%$, что

согласуется с эмпирическим наблюдением, сделанным в [11] для замкнутых сферических $\alpha\beta$ -триангуляций. Формула (16) показывает, что этот предельный результат справедлив для замкнутых ориентируемых поверхностей любого рода.

Экспериментальная проверка. Для экспериментальной проверки формул (8) и (13) использована программа построения $\alpha\beta$ -триангуляций [13], реализующая алгоритм образования $\alpha\beta$ -триангуляции из произвольной сильно связанной триангуляции, описанный в [9; 10]. С её помощью построены образцы замкнутых $\alpha\beta$ -триангуляций для родов $g = 1, 2, 4$ и различных значений числа α -граней a . Полученные образцы представляют собой дискретные поверхности, гомеоморфные тору ($g = 1$), кренделю ($g = 2$) и поверхности рода 4 соответственно. Для каждого образца программа фиксировала комбинаторные характеристики — число α -граней и число β -граней.

Число β -рёбер при необходимости вычислялось через соотношение (5).

Пример построенной $\alpha\beta$ -триангуляции рода 1 показан на рис. 1. Цветом выделены α -треугольники, тонкими линиями — β -рёбра, точками — α -вершины.

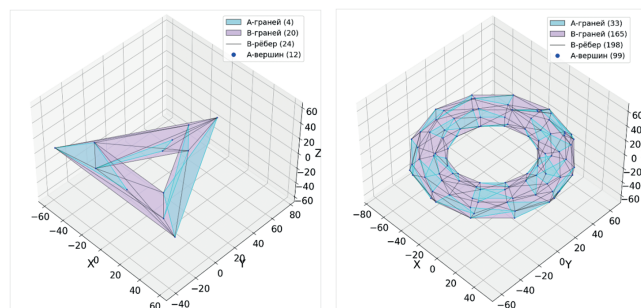


Рис. 1. $\alpha\beta$ -триангуляция замкнутой поверхности рода 1 (тора): минимальная $a = 4$, $b = 20$ (слева), произвольная $a = 33$, $b = 165$ (справа)

Результаты измерений для трёх значений рода и пяти различных значений a в каждой серии сведены в табл. 1. В столбце b (эксп.) помещены значения числа β -граней, полученные при построении $\alpha\beta$ -триангуляции в [13], в столбце b (теор.) — значения, вычисленные по формуле (8). Последний столбец содержит число β -рёбер, вычисленное по формуле (13); оно согласуется с данными программы для всех проверенных конфигураций.

Таблица 1

Экспериментальная проверка формул (8) и (13)

g	a	b (эксп.)	b (теор., (8))	E_β (эксп.)	E_β (теор., (13))
1	4	20	20	24	24
1	10	50	50	60	60
1	23	115	115	138	138
1	33	165	165	198	198
1	48	240	240	288	288
2	8	44	44	54	54
2	33	169	169	204	204
2	83	419	419	504	504
2	148	744	744	894	894
2	220	1104	1104	1326	1326
4	165	837	837	1008	1008
4	832	4172	4172	5010	5010
4	1501	7517	7517	9024	9024
4	2503	12 527	12 527	15 036	15 036
4	2884	14 432	14 432	17 322	17 322

Как видно из табл. 1, теоретические значения числа β -граней, вычисленные по формуле (8), в точности совпадают с экспериментальными данными

во всех 15 проверенных конфигурациях. Это служит практическим подтверждением корректности формулы (8). Справедливость формулы (13) для числа β -рёбер устанавливается аналогично через соотношение (5) и также подтверждается на всех построенных образцах.

Отдельного упоминания заслуживает серия образцов для $g = 4$. Наибольшая из проверенных триангуляций содержит $a = 2884$ α -треугольника и $b = 14432$ β -треугольника; общее число граней такой триангуляции превышает 17 тысяч, число вершин — около 8,6 тысяч. Полное совпадение экспериментальных и теоретических значений на образцах такого масштаба свидетельствует об устойчивости полученных формул и о корректности работы программы [13].

$\alpha\beta$ -триангуляция компактных ориентируемых поверхностей с границей. Перейдём к обобщению полученных формул на случай компактной ориентируемой поверхности произвольного рода g с произвольным числом компонент границы. Замкнутая поверхность отвечает значению $h = 0$, топологический диск — $g = 0$, $h = 1$, кольцо — $g = 0$, $h = 2$ и т.д. Объединяющая роль параметров g и h в построении $\alpha\beta$ -триангуляции определяется тем, что вместе они полностью задают эйлерову характеристику поверхности. Схемы построенных замкнутых $\alpha\beta$ -триангуляций родов 4 и 7 приведены на рис. 2.

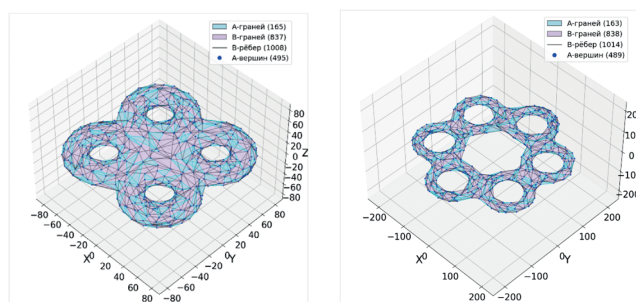


Рис. 2. Схемы замкнутых $\alpha\beta$ -триангуляций родов 4 и 7

Напомним формулу Эйлера — Пуанкаре для компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами границы [2, с. 214]:

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g - h. \quad (17)$$

При $h = 0$ формула (17) переходит в (6). Однако в случае поверхности с границей соотношение (5) видоизменяется. Действительно, каждое внутреннее ребро триангуляции инцидентно ровно двум граням, тогда как каждое граничное ребро (т.е. ребро, лежащее на границе поверхности) — ровно одной грани. Обозначим число граничных рёбер за E_∂ (сумма по

всем h компонентам границы). Подсчёт инцидентностей «грань — ребро» с двух сторон даёт

$$3F = 2E - E_{\partial}, \quad (18)$$

откуда

$$E = \frac{3F + E_{\partial}}{2}. \quad (19)$$

Соотношение (18) обобщает классическое (5) на случай поверхности с границей: при $h = 0$ в нём $E_{\partial} = 0$, и оно переходит в обычную форму. Подчеркнём, что (18), (19) справедливы для любой триангуляции компактной поверхности и не используют специфики $\alpha\beta$ -триангуляции; последняя проявится при подстановке (1), (2).

Подставим (1), (2) и (19) в (17):

$$3a - \frac{3(a+b) + E_{\partial}}{2} + a + b = 2 - 2g - h.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$5a - b - E_{\partial} = 4 - 4g - 2h,$$

откуда, выражая b , окончательно приходим к формуле

$$b = 5a + 4g + 2h - 4 - E_{\partial}. \quad (20)$$

Формула (20) даёт точное равенство, выражающее число β -граней $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности через четыре параметра — число α -граней a , род g , число компонент границы h и число граничных рёбер E_{∂} . В терминах эйлеровой характеристики (17) формула (20) принимает компактный вид $b = 5a - 2\chi - E_{\partial}$. Сформулируем полученное в виде утверждения.

Свойство 12. Для $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами границы число β -граней выражается через число α -граней, род поверхности, число компонент границы и число граничных рёбер формулой (20).

При $h = 0$ (замкнутая поверхность) выполняется $E_{\partial} = 0$, и формула (20) переходит в равенство $b = 5a + 4g - 4$ — формулу (8) свойства 10. Это служит первым подтверждением корректности вывода.

Двойное неравенство для числа β -граней. Параметр E_{∂} в формуле (20) не является произвольным: он подчинён двусторонней оценке, вытекающей из аксиом $\alpha\beta$ -триангуляции и из топологии границы. Снизу: в силу сильной связности триангуляции [9,

аксиоматика], исключающей вырожденные конфигурации, каждая компонента границы — простая замкнутая ломаная, состоящая не менее чем из трёх рёбер. Поскольку всего компонент границы h , имеем $E_{\partial} \geq 3h$. Сверху: по аксиоме 2 все вершины $\alpha\beta$ -триангуляции — α -вершины, в частности, все граничные вершины суть α -вершины; так как граница компактной поверхности — несвязное объединение простых замкнутых ломаных (то есть не имеет точек самопересечения), число граничных вершин равно числу граничных рёбер; поскольку всех α -вершин в триангуляции $3a$, имеем $E_{\partial} \leq 3a$. Объединяя эти оценки и подставляя крайние значения E_{∂} в (20), получаем двойное неравенство

$$2a + 4g + 2h - 4 \leq b \leq 5a + 4g - h - 4 \quad (21)$$

или, в эквивалентной форме через эйлерову характеристику,

$$2a - 2\chi \leq b \leq 5a - 2\chi - 3h. \quad (22)$$

Свойство 13. Для $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами границы число β -граней удовлетворяет двойному неравенству (21).

Условие, при котором $\alpha\beta$ -триангуляция указанной топологии может существовать (21), даёт неравенство $3a - 3h \geq 0$, откуда

$$a \geq h. \quad (23)$$

Геометрический смысл (23) прозрачен: число α -треугольников в $\alpha\beta$ -триангуляции компактной поверхности не может быть меньше числа компонент границы. Иначе говоря, на каждую компоненту границы должен приходиться хотя бы один α -треугольник. При $a = h$ верхняя и нижняя границы (21) совпадают, и $\alpha\beta$ -триангуляция жёстко определена в смысле числа β -граней; в этом случае все $3a$ α -вершин лежат на границе.

Свойство 14. Для существования $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами границы необходимо выполнение условия (23).

Согласование с ранее известными результатами. Покажем, что неравенство (21) и равенство (20) включают в себя ранее установленные результаты как частные случаи.

1. **Замкнутая ориентируемая поверхность рода g ($h = 0$).** При $h = 0$ единственно возможное значение E_{∂} равно нулю, и формула (20) превращается в равенство $b = 5a + 4g - 4$ — в точности равенство (8) свойства 10.

2. *Замкнутая сфера* ($g = 0, h = 0$). Из (20) при указанных значениях получаем $b = 5a - 4 = 5(a - 1) + 1$, что совпадает со свойством 7.1 из [11].
3. *Топологический диск* ($g = 0, h = 1$). Подставляя в (21), получаем $2a - 2 \leq b \leq 5a - 5$, или, что то же, $2(a - 1) \leq b \leq 5(a - 1)$. Это в точности двойное неравенство свойства 7 из [9]. Следует подчеркнуть, что в [9] оно было получено индуктивным построением минимальной и максимальной по числу β -граней $\alpha\beta$ -триангуляций для малых значений a ; настоящий вывод даёт другое — топологическое — обоснование того же результата и расширяет его на произвольные g и h .
4. *Минимальная $\alpha\beta$ -триангуляция диска*. При $g = 0, h = 1, a = 1$ формула (21) даёт $0 \leq b \leq 0$, т.е. единственно возможное значение, что соответствует одному α -треугольнику — минимальной $\alpha\beta$ -триангуляции на плоскости (свойство 6 в [9]). Таким образом, общая формула (20) и неравенство (21) единообразно описывают $\alpha\beta$ -триангуляции замкнутых и ограниченных компактных ориентируемых поверхностей и охватывают все ранее известные частные результаты.

Тождество, связывающее число β -граней с числом внутренних α -вершин. Из формулы (20) и определения нижней границы $b_{\min} = 2a + 4g + 2h - 4$ непосредственно следует тождество

$$B - b_{\min} = 3a - E_{\partial}. \quad (24)$$

Правая часть (24) равна числу α -вершин, не лежащих на границе $\alpha\beta$ -триангуляции — т.е. числу внутренних α -вершин. Таким образом, отклонение b от нижней границы диапазона в точности совпадает с числом внутренних α -вершин, что даёт прозрачную геометрическую интерпретацию положения b в диапазоне (21) и связывает комбинаторный параметр b с расположением α -треугольников относительно границы.

Свойство 15. Для $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами границы отклонение числа β -граней от нижней границы диапазона (21) равно числу внутренних α -вершин и выражается тождеством (24).

Достаточность условия существования для поверхностей рода 0. Необходимое условие (23) при роде $g = 0$ оказывается и достаточным. Назовём β -грань внутренней, если ни одно из её рёбер не лежит на границе комплекса, а удалением внутренней β -границы — исключение этой грани как открытого двумерного элемента при сохранении её рёбер и вершин.

Лемма (об удалении внутренней β -границы). Удаление внутренней β -границы $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности рода g с h компонентами

границы даёт $\alpha\beta$ -триангуляцию той же поверхности с $h + 1$ компонентами границы и тем же числом α -граней a .

Пусть f — внутренняя β -грань, её замыкание — β -треугольник с рёбрами e_1, e_2, e_3 и вершинами v_1, v_2, v_3 . По аксиоме 2 вершины v_1, v_2, v_3 являются α -вершинами и принадлежат α -треугольникам, поэтому после удаления грани f они остаются в комплексе. Каждое ребро e_i внутренней грани инцидентно ровно двум граням, одна из которых — f ; после удаления f ребро e_i оказывается инцидентным ровно одной грани, т.е. становится граничным. Три ребра e_1, e_2, e_3 образуют замкнутый цикл, не пересекающийся с прежней границей (грань f внутренняя), — это новая компонента границы, и число компонент границы возрастает на единицу. При этом α -треугольники не затронуты (аксиома 1), множество вершин не изменилось и состоит только из α -вершин (аксиома 2), новые β -рёбра не появляются, и сумма их длин не возрастает (аксиома 3), а число α -граней сохраняется. Удалена ровно одна грань, поэтому эйлерова характеристика возрастает на единицу, что согласуется с переходом $\chi = 2 - 2g - h \rightarrow 2 - 2g - (h + 1)$. Полученный комплекс остаётся сильно связным.

Свойство 16. Для компактной ориентируемой поверхности рода $g = 0$ условие $a \geq h$ (свойство 14) является необходимым и достаточным условием существования $\alpha\beta$ -триангуляции с a α -гранями и h компонентами границы.

Необходимость установлена свойством 14. Достаточность докажем построением. При $h = 1$ $\alpha\beta$ -триангуляция топологического диска с любым числом α -граней $a \geq 1$ существует: случай $a = 1$ даёт свойство 6 из [9] (минимальная $\alpha\beta$ -триангуляция — α -треугольник), а произвольное $a \geq 1$ — индуктивное построение свойства 7 из [9]. Максимальная по числу β -граней $\alpha\beta$ -триангуляция диска с a α -гранями содержит $a - 1$ попарно несмежных внутренних β -граней (по одной на каждый шаг рекуррентного построения, рис. 2 в [9]). Удаляя из неё последовательно $h - 1$ таких граней, по доказанной лемме получаем $\alpha\beta$ -триангуляцию рода 0 с тем же числом α -граней a и с h компонентами границы, что возможно при любом h в пределах $1 \leq h \leq a$. Тем самым для каждой пары (a, h) , удовлетворяющей условию $a \geq h$, $\alpha\beta$ -триангуляция рода 0 построена, что и доказывает достаточность.

Замечание. Каждое удаление внутренней β -границы уменьшает b на единицу и увеличивает E_{∂} на три, переводя максимальную $\alpha\beta$ -триангуляцию диска в максимальную $\alpha\beta$ -триангуляцию поверхности с большим числом границ (пример такой поверхности с отверстиями — рис. 3); получаемые значения b и E_{∂} согласуются с равенством (20). В частности, в вы-

рожденной точке $a = h = 2$ операция даёт $b = 4$ и $E_\phi = 6$ — единственные значения, допускаемые равенством (20) и неравенством (21). Операция удаления внутренней β -границы изменяет только число компонент границы, сохраняя род, поэтому для поверхностей рода $g \geq 1$ требуется дополнительная конструкция, и достаточность условия $a \geq h$ при $g \geq 1$ остаётся открытым вопросом.

Экспериментальная проверка для поверхностей с границей. Для экспериментальной проверки формул (20) и (21) применительно к поверхностям с границей с помощью программы [13] построены образцы $\alpha\beta$ -триангуляций топологического диска с одним, двумя, тремя и четырьмя отверстиями — по два образца разного размера для каждого числа отверстий. Каждый такой образец представляет собой компактную ориентируемую поверхность рода $g = 0$ с $h = 2$, $h = 3$, $h = 4$ и $h = 5$ компонентами границы соответственно (внешняя граница диска плюс $h - 1$ внутренних отверстий). Для каждого образца программа фиксировала комбинаторные характеристики — число α -граней a и число β -граней b . Число граничных рёбер E_ϕ измерялось программой непосредственно — путём подсчёта рёбер, инцидентных ровно одной грани. Полученное значение сопоставлялось с величиной, предсказываемой формулой (20) при подстановке экспериментальных a и b ; совпадение этих двух независимо полученных значений и служит подтверждением формулы (20). Параллельно проверка эйлеровой характеристики (17) на построенных образцах не выявила отклонений. Результаты измерений сведены в табл. 2.

Таблица 2

Экспериментальная проверка формул (20) и (21) на дисках с отверстиями

Поверхность	g	h	a	b_{min} (теор.)	b (эсп.)	b_{max} (теор.)	E_{δ}
Диск с 1 отв.	0	2	6	12	12	24	18
			46	92	152	224	78
Диск с 2 отв.		3	8	18	18	33	24
			28	58	94	133	48
Диск с 3 отв.		4	15	34	48	67	31
			25	54	87	117	42
Диск с 4 отв.		5	28	62	93	131	53
			54	114	187	261	89

Как видно из табл. 2, во всех восьми проверенных конфигурациях экспериментальные значения числа β -граней лежат в теоретическом диапазоне, заданном неравенством (21); проверка через эйлерову характеристику также проходит без отклонений ($\chi = 0$, -1 , -2 , -3 для дисков с одним, двумя, тремя и че-

тырьмя отверстиями соответственно). Если все α -вершины расположены на границе, значение b совпадает с нижней границей $b_{\min}$, чему отвечает $E_\phi = 3a$; появление внутренних α -вершин сдвигает b вверх внутри диапазона согласно тождеству (24). Так, для диска с тремя отверстиями при $a = 15$ число внутренних α -вершин равно $3a - E_\phi = 45 - 31 = 14$, что в точности совпадает с разностью $b - b_{\min} = 48 - 34 = 14$. Это служит подтверждением как формулы (20), так и тождества (24), т.е. свойства 15, на нетривиальной конфигурации.

Обсуждение результатов. Полученные результаты — формулы (8) и (13) для замкнутых поверхностей, обобщения (20) и (21) для поверхностей с границей, а также тождество (24) — позволяют сделать ряд наблюдений, имеющих как теоретическое, так и практическое значение. Геометрическая интерпретация — расположение α -вершин на границе и внутри области — показана на рис. 3.

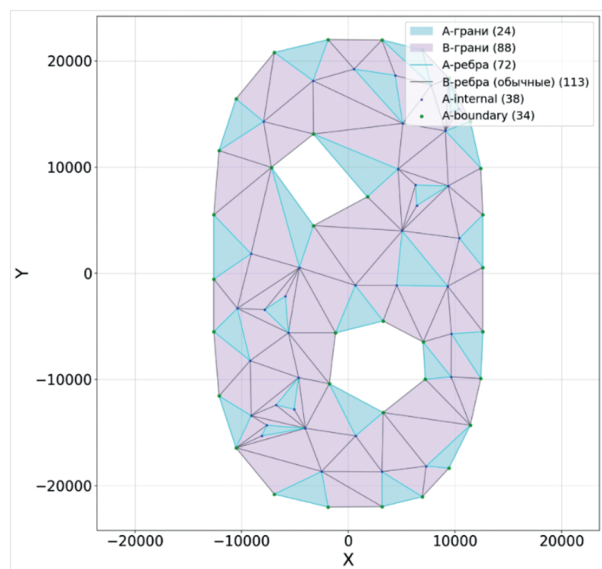


Рис. 3. Пример плоской $\alpha\beta$ -триангуляции с границей и отверстиями: α -вершины на границе и внутренние α -вершины (к тождеству (24))

1. Топологическая интерпретация коэффициентов. В обеих формулах свободный член пропорционален эйлеровой характеристике: в (9) $b = 5a - 2\chi$, в (14) $E_\beta = 6a - 3\chi$. Коэффициенты 5 и 6 при a отражают локальные свойства $\alpha\beta$ -триангуляции и не зависят от топологии поверхности. Коэффициенты -2 и -3 при χ показывают, как топологическая сложность (наличие ручек) влияет на комбинаторные характеристики модели. Подобная структура — линейная комбинация величины, зависящей от a , и топологического инварианта — характерна для классических результатов комбинаторной топологии триангуляций многообразий [1; 3].

2. *Согласование с ранее известным результатом.*

При $g = 0$ формула (8) принимает вид $b = 5a - 4 = 5(a - 1) + 1$, в точности совпадающий со свойством 7.1, установленным в [11] для замкнутых сферических $\alpha\beta$ -триангуляций. Это согласование служит дополнительным подтверждением корректности вывода.

3. *Минимальные конфигурации.* Формула (8) позволяет определить минимальное число α -граней, при котором замкнутая $\alpha\beta$ -триангуляция заданного рода в принципе возможна. Поскольку $b \geq 1$, из (8) получаем $a \geq (5 - 4g)/5$. При $g = 0$ это даёт $a \geq 1$, что соответствует минимальной замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции из [11] — треугольному диэдру с $a = 1$, $b = 1$. Отметим, что вопрос о минимальных триангуляциях двумерных многообразий как самостоятельная комбинаторно-топологическая задача подробно рассматривается в [14]; в нашем случае аксиомы $\alpha\beta$ -триангуляции дают собственный критерий минимальности, не совпадающий с классическим.

4. *Связь со средней степенью вершины.* Формула (15) показывает, что средняя степень вершины $\alpha\beta$ -триангуляции стремится к 6 при $a \rightarrow \infty$, причём, согласно (15), при фиксированном g отклонение имеет порядок $1/a$ с коэффициентом $4(g - 1)$. В частности, при $g = 1$ (тор) средняя степень тождественно равна 6 при любом a . Это согласуется с известным результатом комбинаторной топологии о средней степени вершины в триангуляции замкнутой поверхности [2] и демонстрирует, что $\alpha\beta$ -триангуляция в пределе ведёт себя локально как регулярная треугольная сетка, сохраняя при этом глобальные ограничения, заданные аксиомой 2.

5. *Практическое значение.* Формулы (8) и (13) позволяют без построения самой $\alpha\beta$ -триангуляции оценить её размер по известному числу α -граней и роду аппроксимируемой поверхности. Это полезно при предварительном планировании вычислительных экспериментов, при оценке требуемого объёма памяти и при контроле корректности работы алгоритмов генерации $\alpha\beta$ -триангуляций. Кроме того, полученные формулы позволяют ставить обратные задачи — например, определять число α -граней, необходимое для достижения заданного отношения a/F (в частности, близкого к асимптотическому значению $1/6$) для поверхности заданного рода. В задачах аппроксимации поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных граней это отношение определяет долю граней, которые могут быть заданы конгруэнтными до начала оптимизации, без потери подвижности математической модели.

6. *Двойное неравенство для поверхностей с границей.* Неравенство (21) — двусторонняя оценка числа β -граней через тройку (a, g, h) — обобщает свойство 7 из [9], выведенное там для топологического диска ин-

дуктивным построением минимальной и максимальной по числу β -граней $\alpha\beta$ -триангуляций. Настоящий вывод даёт неравенству (21) топологическое обоснование, опирающееся непосредственно на формулу Эйлера — Пуанкаре и аксиомы $\alpha\beta$ -триангуляции, и распространяет его на произвольные g и h . В частности, ширина диапазона возможных значений b равна $3a - 3h$ и линейно растёт с числом α -треугольников при фиксированной топологии.

7. *Геометрический смысл тождества (24).* Тождество $b - b_{\min} = 3a - E_{\partial}$ (свойство 15) показывает, что положение b в диапазоне (21) полностью определяется числом внутренних α -вершин: при отсутствии внутренних α -вершин (когда все α -треугольники прижаты к границе) реализуется нижняя граница $b_{\min}$, а каждая внутренняя α -вершина увеличивает b ровно на единицу. Это даёт прямой способ оценить b до построения $\alpha\beta$ -триангуляции, исходя из предполагаемого распределения α -треугольников между границей и внутренностью поверхности.

8. *Необходимое условие существования.* Условие $a \geq h$ (свойство 14) есть необходимое условие существования $\alpha\beta$ -триангуляции компактной ориентируемой поверхности с h компонентами границы: на каждую компоненту границы должен приходиться хотя бы один α -треугольник. При $a = h$ верхняя и нижняя границы (21) совпадают, и число β -граней жёстко определено. Достаточность условия $a \geq h$, т.е. существование $\alpha\beta$ -триангуляции для любой допустимой пары (a, h) , для рода $g = 0$ установлена в свойстве 16: необходимое условие $a \geq h$ оказывается и достаточным (см. лемму об удалении внутренней β -границы). Для поверхностей рода $g \geq 1$ вопрос требует отдельной конструкции, добавляющей ручку с контролем числа α -граней, и остаётся открытым.

Выводы. В статье решена задача обобщения свойства 7.1 из [11], выражающего число β -граней замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции рода 0 через число α -граней, на случай замкнутых ориентируемых поверхностей произвольного рода. Центральным инструментом исследования послужила формула Эйлера — Пуанкаре, а ключевым наблюдением — то, что аксиома 2 $\alpha\beta$ -триангуляции приводит к жёсткой связи между числом вершин и числом α -граней ($V = 3a$), благодаря которой формула Эйлера превращается в линейное уравнение между a , b и g .

В результате получены две формулы:

- 1) $b = 5a + 4g - 4$ — число β -граней (свойство 10);
- 2) $E_{\beta} = 6(a + g - 1)$ — число β -рёбер (свойство 11).

Эквивалентная запись этих формул в терминах эйлеровой характеристики ($\chi = 2 - 2g$) имеет вид $b = 5a - 2\chi$ и $E_{\beta} = 6a - 3\chi$, что подчёркивает центральную роль эйлеровой характеристики в структуре $\alpha\beta$ -триангуляции.

Установлено, что коэффициент 5 при a в формуле для числа β -граней и коэффициент 6 — в формуле для числа β -рёбер не зависят от топологии поверхности; влияние топологии сосредоточено исключительно в свободных членах, пропорциональных χ . Показано, что доля α -граней в замкнутой $\alpha\beta$ -триангуляции при $a \rightarrow \infty$ стремится к $1/6 \approx 16,67\%$ независимо от рода, что обобщает на произвольный g эмпирическое наблюдение из [11]. Средняя степень вершины стремится к 6, причём скорость сходимости определяется отношением g/a .

Полученные результаты дополнительно обобщены на компактные ориентируемые поверхности произвольного рода g с произвольным числом компонент границы h . С использованием формулы Эйлера — Пуанкаре с поправкой на число граничных рёбер

E_ϕ установлены: точное равенство $b = 5a + 4g + 2h - 4 - E_\phi$ (свойство 12); двойное неравенство $2a + 4g + 2h - 4 \leq b \leq 5a + 4g - h - 4$ (свойство 13); необходимое условие существования $\alpha\beta$ -триангуляции $a \geq h$ (свойство 14); тождество $b - b_{\min} = 3a - E_\phi$, связывающее положение b в диапазоне с числом внутренних α -вершин (свойство 15). Показано, что все ранее известные результаты — равенство для замкнутой сферы (свойство 7.1 из [11]), равенство для замкнутой поверхности рода g (свойство 10) и двойное неравенство для топологического диска (свойство 7 из [9]) — получаются как частные случаи. Для поверхностей рода 0 показано, что условие $a \geq h$ не только необходимо, но и достаточно (свойство 16); достаточность доказана конструктивно — операцией удаления внутренней β -границы (соответствующая лемма).

Литература

1. Айзенберг А.А. Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов [Текст]: курс лекций / А.А. Айзенберг. — М.: НОЦ Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2016. — 90 с.
2. Александров П.С. Комбинаторная топология [Текст] / П.С. Александров. — 2-е изд. — М. — Л.: Ленанд, 2020. — 664 с.
3. Бухштабер В.М. Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия [Текст] / В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2005. — Т. 247. — С. 41–58.
4. Галиулин Р.В. Системы Делоне как основа геометрии дискретного мира [Текст] / Р.В. Галиулин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43. — № 6. — С. 790–801.
5. Клячин В.А. Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества [Текст] / В.А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. — 2015. — Т. 3. — С. 27–33.
6. Клячин В.А. Об одном обобщении условия Делоне [Текст] / В.А. Клячин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2008. — № 1. — С. 48–50.
7. Коновалова Н.А. Архитектура оперного театра в Дубае: цели и компромиссы [Текст] / Н.А. Коновалова // Современная архитектура мира. — 2022. — Вып. 18. — С. 217–232. — DOI: 10.25995/NPITIAG.2022.18.1.011
8. Лебединская Н.А. Преобразование триангуляций при помощи элементарных операций [Текст] / Н.А. Лебединская, Д.М. Лебединский // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2009. — № 1. — С. 84–86.
9. Рустамьян В.В. $\alpha\beta$ -триангуляция на евклидовой плоскости [Текст] / В.В. Рустамьян // Геометрия и графика. — 2025. — Т. 13. — № 1. — С. 15–25. — DOI: 10.12737/2308-4898-2025-13-1-15-25
10. Рустамьян В.В. Рекомбинация β -рёбер $\alpha\beta$ -триангуляции на евклидовой плоскости [Текст] / В.В. Рустамьян, Н.С. Кадыкова // Журнал естественнонаучных исследований. — 2025. — Т. 10. — № 4. — С. 115–120.
11. Рустамьян В.В. Развитие теории $\alpha\beta$ -триангуляции в трёхмерном евклидовом пространстве [Текст] / В.В. Рустамьян // GraphiCon 2025: Материалы 35-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению, Йошкар-Ола, 30 сентября — 2 октября 2025 года. — Йошкар-Ола: Изд-во Поволжского гос. технологического университета, 2025. — С. 920–929. — DOI: 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-920-929
12. Салех М.С. Внедрение цифровых методов на различных этапах архитектурного проектирования [Текст] / М.С. Салех // Архитектура и современные информационные технологии. — 2021. — № 1. — С. 268–278. — DOI: 10.24412/1998-4839-2021-1-268-278
13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2026614351 Российская Федерация. Создание $\alpha\beta$ -триангуляции из произвольной триангуляции: заявл. 25.11.2025; опубл. 13.02.2026 / В.В. Рустамьян.
14. Сечкин Г.М. О минимальных триангуляциях двумерного многообразия [Текст] / Г.М. Сечкин // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2016. — № 1. — С. 9–16.
15. Скворцов А.В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции [Текст] / А.В. Скворцов, Н.С. Мирза. — Томск: Изд-во Томского университета, 2006. — 168 с.
16. Izmistiev I. Simplicial moves on balanced complexes [Text] / I. Izmistiev, S. Klee, I. Novik // Advances in Mathematics. 2017. V. 320. Pp. 82–114. DOI: 10.1016/j.aim.2017.08.036

17. Jiménez M.R. Discretizations of Surfaces with Constant Ratio of Principal Curvatures [Text] / M.R. Jiménez, C. Müller, H. Pottmann // *Discrete & Computational Geometry*. 2020. V. 63. P. 670–704. DOI: 10.1007/s00454-019-00098-7
18. Khan D. Dr. KID: Direct Remeshing and K-set Isometric Decomposition for Scalable Physicalization of Organic Shapes [Text] / D. Khan, C. Bohak, I. Viola // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2023. DOI: 10.1109/TVCG.2023.3326595
19. Liu Y. Reducing the number of different nodes in space frame structures through clustering and optimization [Text] / Y. Liu, T.-U. Lee, A. Koronaki, N. Pietroni, Y.M. Xie // *Engineering Structures*. 2023. V. 284. Art. 116016. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116016
20. Liu Y. Reducing the Number of Different Faces in Free-Form Surface Approximations Through Clustering and Optimization [Text] / Y. Liu, T.-U. Lee, A. Rezaee Javan, N. Pietroni, Y.M. Xie // *Computer-Aided Design*. 2024. V. 166. Art. 103633. DOI: 10.1016/j.cad.2023.103633.
21. Pellis D. Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold re-use [Text] / D. Pellis, M. Kilian, H. Wang, C. Jiang, C. Müller, H. Pottmann // *Advances in Architectural Geometry*. 2020. Paris: Presses des Ponts, 2021. P. 70–81.
22. Schling E. Repetitive Structures [Text] / E. Schling, R. Barthel // *Impact: Design With All Senses: Proceedings of the Design Modelling Symposium Berlin 2019*. Cham: Springer, 2019. P. 360–375. DOI: 10.1007/978-3-030-29829-6_29
23. Bi M. Clustering and optimisation of nodes, beams and panels for cost-effective fabrication of free-form surfaces [Text] / M. Bi, Y. Liu, T. Xu, Y. He, J. Ma, Z. Zhuang, Y.M. Xie // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 307. Art. 117912. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.117912
24. Liu Y. Free-form Surface Approximation Using Rotational Patches [Text] / Liu, Y.M. Xie, T.-U. Lee, Z. Wang, N. Pietroni // *ACM Transactions on Graphics*. 2025. V. 44. I. 5. Art. 168. DOI: 10.1145/3744707
25. Basak B. Minimal Simplicial Degree d Maps from Genus g Surfaces to the Torus [Text] / Basak, A. Trivedi. arXiv:2505.02386. 2025.
- ings of the Steklov Institute of Mathematics]. 2005, V. 247, pp. 41–58. (in Russian)
4. Galiulin R.V. Sistemy Delone kak osnova geometrii diskretnogo mira [Delaunay systems as the basis of the geometry of the discrete world]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2003, V. 43, I. 6, pp. 790–801. (in Russian)
5. Klyachin V.A. Algoritm triangulyatsii, osnovanny na uslovii pustogo vypuklogo mnozhestva [Triangulation algorithm based on the empty convex set condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika* [Bulletin of Volgograd State University. Series 1. Mathematics. Physics]. 2015, V. 3, pp. 27–33. (in Russian)
6. Klyachin V.A. Ob odnom obobshchenii usloviya Delone [On a generalization of the Delaunay condition]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics]. 2008, I. 1, pp. 48–50. (in Russian)
7. Konovalova N.A. Arkhitektura opernogo teatra v Dubae: tseli i kompromissy [Architecture of the Opera House in Dubai: objectives and compromises]. *Sovremennaya arkhitektura mira* [Contemporary World's Architecture]. 2022, I. 18, pp. 217–232. DOI: 10.25995/NIITIAG.2022.18.1.011. (in Russian)
8. Lebedinskaya N.A., Lebedinskiy D.M. Preobrazovanie triangulyatsiy pri pomoshchi elementarnykh operatsiy [Transforming triangulations using elementary operations]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* [Bulletin of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. 2009, I. 1, pp. 84–86. (in Russian)
9. Rustamyan V.V. $\alpha\beta$ -triangulyatsiya na evklidovoy ploskosti [$\alpha\beta$ -triangulation on the Euclidean plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2025, V. 13, I. 1, pp. 15–25. DOI: 10.12737/2308-4898-2025-13-1-15-25. (in Russian)
10. Rustamyan V.V., Kadykova N.S. Rekombinatsiya β -ryober $\alpha\beta$ -triangulyatsii na evklidovoy ploskosti [Recombination of β -edges in $\alpha\beta$ -triangulation on the Euclidean plane]. *Zhurnal estestvenno-nauchnykh issledovaniy* [Journal of Natural Science Research]. 2025, V. 10, I. 4, pp. 115–120. (in Russian)
11. Rustamyan V.V. Razvitie teorii $\alpha\beta$ -triangulyatsii v tryokhmernom evklidovom prostranstve [Development of the theory of $\alpha\beta$ -triangulation in three-dimensional Euclidean space]. *GrafiKon 2025. Materialy 35-y Mezhdunarodnoy konferentsii po komp'yuternoy grafike i mashinnomu zreniyu* [GraphiCon 2025. Proceedings of the 35th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision]. Yoshkar-Ola, Volga State University of Technology Publ., 2025, pp. 920–929. DOI: 10.25686/978-5-8158-2474-4-2025-920-929. (in Russian)
12. Salekh M.S. Vnedrenie tsifrovyykh metodov na razlichnykh etapakh arkhitekturnogo proektirovaniya [Introduction of digital methods at various stages of architectural design].

References

1. Aizenberg A.A. *Kombinatorika, topologiya i algebra simplitsialnykh kompleksov* [Combinatorics, topology and algebra of simplicial complexes]. Moscow, Steklov Mathematical Institute of RAS Publ., 2016. 90 p. (in Russian)
2. Aleksandrov P.S. *Kombinatornaya topologiya* [Combinatorial topology]. Moscow-Leningrad, Lenand Publ., 2020, 664 p. (in Russian)
3. Bukhshtaber V.M., Panov T.E. *Kombinatorika simplitsialno kletochnykh kompleksov i toricheskie deystviya* [Combinatorics of simplicial cell complexes and torus actions]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova* [Proceed-

- Arkhitektura i sovremennye informatsionnye tekhnologii* [Architecture and Modern Information Technologies]. 2021, I. 1, pp. 268–278. DOI: 10.24412/1998-4839-2021-1-268-278. (in Russian)
13. *Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2026614351 Rossiyskaya Federatsiya. Sozdanie $\alpha\beta$ -triangulyatsii iz proizvolnoy triangulyatsii* [Certificate of state registration of a computer program No. 2026614351 Russian Federation. Creation of $\alpha\beta$ -triangulation from arbitrary triangulation]: appl. 25.11.2025; publ. 13.02.2026 / V.V. Rustamyan. (in Russian)
 14. Sechkin G.M. O minimalnykh triangulyatsiyakh dvumernogo mnogoobraziya [On minimal triangulations of a two-dimensional manifold]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin]. 2016, I. 1, pp. 9–16. (in Russian)
 15. Skvortsov A.V., Mirza N.S. *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyatsii* [Algorithms for constructing and analyzing triangulation]. Tomsk, Tomsk University Press, 2006, 168 p. (in Russian)
 16. Izmetiev I., Klee S., Novik I. Simplicial moves on balanced complexes. *Advances in Mathematics*. 2017, V. 320, pp. 82–114. DOI: 10.1016/j.aim.2017.08.036
 17. Jiménez M.R., Müller C., Pottmann H. Discretizations of Surfaces with Constant Ratio of Principal Curvatures. *Discrete & Computational Geometry*. 2020, V. 63, pp. 670–704. DOI: 10.1007/s00454-019-00098-7
 18. Khan D., Bohak C., Viola I. Dr. KID: Direct Remeshing and K-set Isometric Decomposition for Scalable Physicization of Organic Shapes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2023. DOI: 10.1109/TVCG.2023.3326595
 19. Liu Y., Lee T.-U., Koronaki A., Pietroni N., Xie Y.M. Reducing the number of different nodes in space frame structures through clustering and optimization. *Engineering Structures*. 2023, V. 284, Art. 116016. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116016
 20. Liu Y., Lee T.-U., Rezaee Javan A., Pietroni N., Xie Y.M. Reducing the Number of Different Faces in Free-Form Surface Approximations Through Clustering and Optimization. *Computer-Aided Design*. 2024, V. 166, Art. 103633. DOI: 10.1016/j.cad.2023.103633
 21. Pellis D., Kilian M., Wang H., Jiang C., Müller C., Pottmann H. Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold re-use. *Advances in Architectural Geometry*. 2020. Paris, Presses des Ponts, 2021, pp. 70–81.
 22. Schling E., Barthel R. Repetitive Structures. *Impact: Design With All Senses: Proceedings of the Design Modelling Symposium Berlin 2019*. Cham, Springer, 2019, pp. 360–375. DOI: 10.1007/978-3-030-29829-6_29
 23. Bi M., Liu Y., Xu T., He Y., Ma J., Zhuang Z., Xie Y.M. Clustering and optimisation of nodes, beams and panels for cost-effective fabrication of free-form surfaces. *Engineering Structures*. 2024, V. 307, Art. 117912. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.117912
 24. Liu Y., Xie Y.M., Lee T.-U., Wang Z., Pietroni N. Free-form Surface Approximation Using Rotational Patches. *ACM Transactions on Graphics*. 2025, V. 44, I. 5, Art. 168. DOI: 10.1145/3744707
 25. Basak B., Trivedi A. Minimal Simplicial Degree d Maps from Genus g Surfaces to the Torus. arXiv:2505.02386. 2025.