УДК 517.956.35

И.А. Рудаков, А.П. Лукавый

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доказаны теоремы существования периодических по времени решений квазилинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами и однородными граничными условиями, одно из которых является условием Неймана.

Ключевые слова: волновое уравнение, периодические решения, задача Штурма-Лиувилля, ряд Фурье.

Исследуется задача о периодических решениях волнового уравнения

$$p(x)u_{tt}-(p(x)u_x)_x=g(x,t,u)+f(x,t),\ 0<x<\pi,\quad t\in R; \tag{1}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t)\ ,\quad 0<x<\pi,\quad t\in R; \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=u(\pi,t)+hu_x(\pi,t)=0,\qquad t\in R. \tag{3}$$

Уравнение (1) является нелинейной моделью распространения волн в неизотропной среде [1]. Уравнение более общего вида

$$\rho(z)u_{tt}-(\mu(z)u_z)_z=h(z,t,u)+F(z,t)\ ,$$

описывающее распространение сейсмических волн, приводится к уравнению (1) с помощью замены переменной $x=\int\limits_0^z\sqrt{\dfrac{\rho(s)}{\mu(s)}}\,ds$. Здесь $\mu(z)$ - коэффициент эластичности, $\rho(z)$ - плотность породы, $p=\sqrt{\rho\mu}$ - акустический импеданс [1].

Задача о периодических решениях волнового уравнения с постоянными коэффициентами ($p(x)\equiv 1$) исследовалась в работах [2-7]. В работах [1; 8-10] изучалось квазилинейное волновое уравнение с переменными коэффициентами. В [1; 8] доказано существование по крайней мере одного [1] или счетного числа [8] периодических решений в случае однородных граничных условий Дирихле. В работе [9] доказано существование по крайней мере одного периодического решения при произвольных однородных граничных условиях, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В [10] доказано существование бесконечного числа периодических по времени решений в случае граничных условий третьего рода и Дирихле. Целью данной работы является доказательство теорем о существовании и регуляризации либо бесконечного числа периодических решений для волнового уравнения с переменными коэффициентами и однородными граничными условиями, одно из которых является условием Неймана, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост, либо хотя бы одного решения, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности.

Если в (3) граничные условия при $x=0$ и $x=\pi$ поменять местами, то получим эквивалентную задачу, поскольку замена $x=\pi-y$, $u(x,t)=u(\pi-y,t)$ переставляет местами концы отрезка $[0,\pi]$.

Пусть функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям [1]:

$$p(x)\in C^2[0,\pi],\ p(x)\ge d>0\qquad \forall x\in[0,\pi],\qquad \rho=\min_{[0,\pi]}\eta_p(x)>0, \tag{4}$$

где $\eta_p(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{p''}{p}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p'}{p}\right)^2$. В качестве примера такой функции можно взять

$$p(x) = \left(C_1 x + C_2\right)^{2+\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha, C_1, C_2 > 0$.

В работе будут рассмотрены два случая. В случае I, когда

$$h = 0, \tag{6}$$

потребуем выполнения неравенства

$$p'(0) \geq 0. \tag{7}$$

В случае II, когда в граничных условиях (3) имеем $h > 0$, потребуем выполнения (7), а также неравенства

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} \leq \frac{2}{h}. \tag{8}$$

Если $p(x)$ имеет вид (5), то условие (8) выполнено, когда $\dfrac{C_2}{C_1} \geq \left(1 + \dfrac{\alpha}{2}\right) h - \pi$.

**Свойства волнового оператора.** Решения задач (1)-(3); (1),(2),(4) будем искать в виде ряда Фурье. Для построения ортонормированной системы рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля:

$$-(p(x)\varphi'(x))' = \lambda\, p(x)\varphi(x); \tag{9}$$

$$\varphi'(0) = \varphi(\pi) + h\varphi'(\pi) = 0. \tag{10}$$

Стандартно доказывается [11], что при $h \geq 0$ задача (9), (10) имеет простые положительные собственные значения $\lambda = \lambda_n^2$, $n \in N$. Обозначим $\varphi_n(x)$ собственные функции задачи (9), (10), соответствующие собственным значениям $\lambda_n^2$.

Рассмотрим пространство $L_2(0,\pi)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{[0,\pi]} p(x)\varphi(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \varphi, \psi \in L_2(0,\pi).$$

После нормировки в $L_2(0,\pi)$ система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ станет ортонормированной и полной в $L_2(0,\pi)$ [12].

Для изучения асимптотики $\lambda_n$ сделаем стандартную замену переменной [1] $z(x) = \sqrt{p(x)}\,\varphi(x)$. Тогда соотношению (9) будет соответствовать равенство

$$z'' + (\lambda - \eta_p(x))z = 0. \tag{11}$$

В случаях I, II для функции $z$ будут выполнены соответственно следующие граничные условия:

$$z'(0) - z(0)h_1 = z(\pi) = 0;$$

$$z'(0) - z(0)h_1 = z'(\pi) + h_2 z(\pi) = 0. \tag{12}$$

Здесь $h_1 = \dfrac{p'(0)}{2p(0)}$, $h_2 = \dfrac{2p(\pi) - h\,p'(\pi)}{2h\,p(\pi)}$.

Случай I разобьем на два подслучая. Если $p'(0) > 0$, то $h_1 > 0$ и доказано [10] представление

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \theta_n, \tag{13}$$

в котором для последовательности $\theta_n$ справедливы оценки

$$0 < b_0 \frac{1}{n} \leq \theta_n \leq b_1 \frac{1}{n} \qquad \forall n \in N. \tag{14}$$

Константы $b_0, b_1$ не зависят от $n$. Если $p'(0) = 0$, то $h_1 = 0$ и для $\lambda_n$ также справедливы представление (13) и оценка (14) [9].

Рассмотрим случай II. Если $p'(0)=0$ и $\dfrac{p'(\pi)}{p(\pi)}=\dfrac{2}{h}$, то $z(x)$ удовлетворяет условиям

$$z'(0)=z'(\pi)=0\,.$$

Тогда $\lambda_n$ выражается формулой [9]

$$\lambda_n = n-1+\theta_n\,. \tag{15}$$

Для последовательности $\theta_n$ также справедлива оценка (14), в которой константы $b_0, b_1$ не зависят от $n$.

Пусть в случае II имеют место равенство $p'(0)=0$ и неравенство $\dfrac{p'(\pi)}{p(\pi)}<\dfrac{2}{h}$. Тогда из (12) получим соотношение

$$z'(0)=z'(\pi)+h_2\, z(\pi)=0\,. \tag{16}$$

Следуя плану из работы [10], рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$z''+\bar{\lambda}\, z=0\,. \tag{17}$$

При $\bar{\lambda}=0$ задача (16), (17) имеет единственное решение $z\equiv 0$. При $\bar{\lambda}\neq 0$ имеет место равенство $\bar{\lambda}\int\limits_0^{\pi} z^2(x)\,dx=\int\limits_0^{\pi}(z'(x))^2\,dx+h_2 z^2(\pi)$. Поэтому $\bar{\lambda}=k^2$, $k>0$, и задача (16), (17) имеет решение $z=\cos(k\,x)$. Отсюда и из равенства (16) получим уравнение

$$ctg\,(k\,\pi)=h_0\,k\,, \tag{18}$$

в котором $h_0=1/h_2$. Элементарные рассуждения показывают, что положительные решения уравнения (18) имеют вид

$$k=n-1+\bar{\theta}_n,\ n\in N \tag{19}$$

и $\theta_n\in(0,\,1/2)$. Подставив (19) в (18), получим уравнение

$$\bar{\theta}_n=\frac{1}{\pi\,h_0}\frac{1}{n}f_1(\pi\,\bar{\theta}_n)\frac{1}{1-(1-\bar{\theta}_n)/n}\,. \tag{20}$$

Здесь $f_1(t)=\dfrac{t}{tg\,t}$. Функция $f_1$ убывает на промежутке $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, и $\lim\limits_{t\to 0} f_1(t)=1$. Отсюда и из (20) вытекает существование констант $c_0, c_1$, таких, что

$$0<c_0\frac{1}{n}\le\bar{\theta}_n\le c_1\frac{1}{n}\qquad\forall\, n\in N\,. \tag{21}$$

Обозначим $\eta=\max\limits_{t\in[0,\pi]}\eta_p(x)$ и рассмотрим уравнения

$$z''+(\lambda-\eta)\,z=0\,; \tag{22}$$

$$z''+(\lambda-\rho)\,z=0\,. \tag{23}$$

Пусть $\{\lambda_n'\},\{\lambda_n''\},\{\bar{\lambda}_n\}$ суть последовательности собственных значений задач Штурма-Лиувилля (23), (16); (22),(16); (17),(16). Из теорем сравнения [11] следуют неравенства

$$\lambda_n'\le\lambda_n^2\le\lambda_n''\,. \tag{24}$$

По доказанному $\lambda_n'-\rho=(n-1+\bar{\theta}_n)^2$, $\lambda_n''-\eta=(n-1+\bar{\theta}_n)^2$. Отсюда и из (21), (24) вытекает существование последовательности, которую также обозначим $\theta_n$, и не зависящих от $n$ констант $b_0, b_1$, для которых выполнены соотношение (15) и неравенства (14).

Пусть в случае II имеют место неравенство $p'(0)>0$ и равенство $\frac{p'(\pi)}{p(\pi)}=\frac{2}{h}$. Тогда из (12) получим соотношение $z'(0)-h_1 z(0)=z'(\pi)=0$. В этом случае для $\lambda_n$ также имеют место представление (15) и оценки (14), поскольку замена переменной $x=\pi-y,\ u(x,t)=u(\pi-y,t)$ приведет к предыдущему случаю.

Если в случае II имеют место строгие неравенства $p'(0)>0$, $\frac{p'(\pi)}{p(\pi)}<\frac{2}{h}$, то в граничных условиях (12) будем иметь $h_1>0, h_2>0$. В [10] доказано, что и в этом случае справедливы равенство (15) и неравенства (14).

Таким образом, в случае I $\lambda_n$ имеют представление (13), а в случае II - представление (15), где для $\theta_n$ справедливы неравенства (14). Заметим, что поскольку

$$\int_0^{\pi} p(x)\varphi_n'(x)\varphi_m'(x)\,dx=p(\pi)\,\varphi_n'(\pi)\varphi_m(\pi)-p(0)\varphi_n'(0)\varphi_m(0),$$

то в случае I последовательность $\{\varphi_n'(x)\}$ является ортогональной в $L_2(0,\pi)$.

Будем искать периодические решения с периодом времени, имеющим следующий вид:

$$T=2\pi\frac{b}{a},\quad a,b\in N,\ НОД\,(a,b)=1. \tag{25}$$

Обозначим $\Omega=[0,\pi]\times R\setminus(T\,Z)$ и рассмотрим пространство $L_2(\Omega)$, скалярное произведение и норма в котором задаются формулами

$$(f,g)=\int_\Omega f(x,t)g(x,t)p(x)dxdt,\qquad \|f\|^2=\int_\Omega f^2(x,t)p(x)dxdt\qquad \forall f,g\in L_2(\Omega).$$

Рассмотрим полную, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\Lambda=\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n(x),\sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right),\sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right\}_{m,n\in N}. \tag{26}$$

Определим оператор $A_0:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0)=\left\{u\in C^2(\Omega)\middle|\ u=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M}\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right)\middle\|\ N,M\in\mathrm{N}\right\}$$

и $A_0\varphi=p\varphi_{tt}-(p\varphi_x)_x\quad \forall\varphi\in D(A_0)$. Пусть $\overline{A}_0\,\varphi=\frac{1}{p}A_0\varphi\quad\forall\varphi\in D(A_0)$. Множество функций $D(A_0)=D(\overline{A}_0)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Обозначим буквой $A$ оператор в $L_2(\Omega)$, являющийся замыканием по графику оператора $\overline{A}_0$. Система функций $\Lambda$ является системой собственных функций операторов $\overline{A}_0$ и $A$ с собственными значениями $\mu_{nm}=\lambda_n^2-\left(\frac{a}{b}m\right)^2,\quad n\in N,\ m\in N\bigcup\{0\}$. Для оператора $A$ справедливы следующие свойства [10]: 1) $A$ самосопряжен, $A^{-1}\in L(R(A),R(A))$; 2) $\dim N(A)<+\infty$; 3) $L_2(\Omega)=N(A)\oplus R(A)$.

Пусть $\overline{H}_k(\Omega),\ H_k(\Omega),\ k\in\{1,2\}$, есть пространства Соболева, полученные замыканием соответственно $D(A_0)$, $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_k^2=\sum_{|\sigma|=0}^{k}\|D^\alpha u\|^2$, где

$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in Z_+\times Z_+,\ Z_+=N\bigcup\{0\},\ |\sigma|=\sigma_1+\sigma_2,\ D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^{\sigma_1}\partial t^{\sigma_2}}.$$

***Лемма 1.*** В случае I при нечетном $b$ для любой функции $u\in L_2(\Omega)\bigcap R(A)$ имеют место включение $A^{-1}u\in C(\Omega)\bigcap H^1(\Omega)$ и неравенство $\|A^{-1}u\|_1\le C\|u\|$, где константа $C$ не зависит от $u$.

Доказательство. Произвольную функцию $u\in L_2(\Omega)\bigcap R(A)$ представим в виде суммы ряда Фурье по системе (26):

$$u=\sum_{\mu_{nm}\ne 0}\varphi_n(x)\left(a_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right).$$

Здесь $T_m=\begin{cases}1/\sqrt{T},\ m=0;\\ \sqrt{2/T},\ m\ne 0.\end{cases}$

Пусть $v=A^{-1}u$. Тогда

$$v=\sum_{\mu_{nm}\ne 0}\frac{1}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(a_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right).$$

Докажем, что

$$v_t=\frac{a}{b}\sum_{\mu_{nm}\ne 0}\frac{m}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(-a_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)\right). \qquad (27)$$

В случае I имеем

$$|\mu_{nm}|=\left|n-\frac{1}{2}-\frac{a}{b}m+\theta_n\right|\cdot\left|n-\frac{1}{2}+\frac{a}{b}m+\theta_n\right|\ge\frac{1}{4b}|(2n-1)b-2am+2b\theta_n|\cdot\left|n+\frac{a}{b}m\right|.$$

Если $b$ -нечетное число, то $|(2n-1)b-2am|\ge 1$ и, учитывая (14), при $\mu_{nm}\ne 0$ выведем существование константы $\alpha_0>0$, такой, что

$$|\mu_{nm}|\ge\alpha_0(n+m). \qquad (28)$$

Обозначим $h=\frac{a}{b}\sum_{\mu_{nm}\ne 0}\frac{m}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(-a_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)\right)$,

$$v_N=\sum_{n,m\le N}\frac{1}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(a_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right).$$

Из (28) следует включение $h\in L_2(\Omega)$. Легко видеть, что $v_N\to v,\ (v_N)_t\to h$ в $L_2(\Omega)$ при $N\to\infty$. Отсюда следует (27) и оценка $\|v_t\|^2\le\frac{a^2}{\alpha_0^2b^2}\sum_{\mu_{nm}\ne 0}(a_{nm}^2+b_{nm}^2)=\frac{a^2}{\alpha_0^2b^2}\|u\|^2$. Интегрируя по частям, вычислим $\int_0^{\pi}(\varphi'_n(x))^2p(x)\,dx=\lambda_n^2$. Кроме того, в случае I при $n\ne m$ имеет место равенство $\int_0^{\pi}\varphi'_n(x)\varphi'_m(x)\ p(x)dx=0$. Поэтому система функций

$$\left\{\frac{\varphi'_n(x)}{\lambda_n}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right),\frac{\varphi'_n(x)}{\lambda_n}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right\}_{n=1,m=0}^{\infty} \qquad (29)$$

является ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Обозначим

$$g=\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{\lambda_n}{\mu_{nm}}\cdot\frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n}\left(a_{nm}T_m\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)+b_{nm}T_m\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right).$$

Из (13), (14), (28) следует включение $g\in L_2(\Omega)$. Поскольку $(v_N)_x\to g$, $v_N\to v$ в $L_2(\Omega)$ при $N\to\infty$, то $v_x=g$. Кроме того, из (13), (14), (28) выведем оценку

$$\| v_x\|^2\le\frac{1}{\alpha_0^2}\sum_{\mu_{nm}\neq 0}(a_{nm}^2+b_{nm}^2)=\frac{1}{\alpha_0^2}\| u\|^2.$$

Поскольку $|\varphi_n(x)|\le C_0\ \forall x\in[0,\pi],\forall n\in N$ [11], то

$$\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{|\mu_{nm}|}|\varphi_n(x)|\left(|a_{nm}|T_m\left|\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)\right|+|b_{nm}|T_m\left|\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right|\right)\le$$

$$\le C_0\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{|\mu_{nm}|}\left(|a_{nm}|+|b_{nm}|\right)\le C_0\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{|\mu_{nm}|^2}}\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)}<\infty.$$

Сходимость ряда $\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{\mu_{nnm}^{2}}$ доказывается стандартно. Следовательно, $A^{-1}u\in C(\Omega)\bigcap H^1(\Omega)$. Лемма доказана.

***Лемма 2.*** Для любой функции $u\in\overline{H}_1(\Omega)\bigcap R(A)$ имеют место включения $A^{-1}u\in C^1(\Omega)$, $(A^{-1}u)_{tt}$, $(A^{-1}u)_{tx}\in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $u\in\overline{H}_1(\Omega)\bigcap R(A)$. Пусть $\{\psi_l\}\subset D(A_0)$ есть такая последовательность, что $\psi_l\to u$, $(\psi_l)_x\to u_x$, $(\psi_l)_t\to u_t$ в $L_2(\Omega)$ при $l\to\infty$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_\Omega\psi_l\ \varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)dxdt=-\frac{b}{am}\int_\Omega(\psi_l)_t\varphi_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)dxdt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $l\to+\infty$, получим

$$\int_\Omega u\ \varphi_n(x)\cos\frac{a}{b}mtp(x)\,dxdt=-\frac{b}{am}\int_\Omega u_t\ \varphi_n(x)\sin\frac{a}{b}mt\ p(x)\,dxdt. \tag{30}$$

Пусть $a'_{nm}$, $b'_{nm}$ есть коэффициенты Фурье функции $u_t$ по системе (26). Из (30) следует, что $a_{nm}=-\frac{b}{am}b'_{nm}$. Аналогично доказывается, что $b_{nm}=\frac{b}{am}a'_{nm}$. Поскольку $u_t\in L_2(\Omega)$, то $\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\left((a'_{nm})^2+(b'_{nm})^2\right)<\infty$.

Следовательно, $\sum_{\mu_{nm}\neq 0}m^2\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)=\frac{b^2}{a^2}\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\left((a'_{nm})^2+(b'_{nm})^2\right)<\infty$.

Обозначим $v=A^{-1}u$. Из оценки

$$\| v_{tt}\|^2=\frac{a^4}{b^4}\sum_M\frac{m^4}{\mu_{nm}^2}\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)=\frac{a^4}{b^4}\sum_M\frac{m^2}{\mu_{nm}^2}m^2\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)\le\frac{a^6}{b^6\alpha_0^2}\| u\|_1^2<\infty$$

следует включение $u_{tt}\in L_2(\Omega)$.

Докажем, что $v_{xt}\in L_2(\Omega)$. Для этого рассмотрим уравнение $A\omega=u_t$ и докажем, что $\omega=v_t$. По доказанному

$$u_t = \frac{a}{b}\sum_{\mu_{nm}\neq 0} T_m m\varphi_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right).$$

Поэтому $\omega = \frac{a}{b}\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{T_m m}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right)$. Таким образом, $\omega = A^{-1}u_t = v_t$, а так как $u_t \in L_2(\Omega)$, то, согласно лемме 1, имеем $v_{tx} = \omega_x \in L_2(\Omega)$ и $\| v \|_{tx} \le C\| u_t \| \le A_0 \| u \|_1$. Константа $A_0$ не зависит от $u$.

Интегрируя по частям по $x$, получим

$$\int_\Omega \psi_l\, \varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)dxdt = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \cos\left(\frac{a}{b}mt\right)dt\int_0^\pi \psi_l\left(-\lambda_n^2\varphi_n(x)p(x)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \cos\left(\frac{a}{b}mt\right)dt\int_0^\pi \psi_l\left(\varphi_n'(x)p(x)\right)' dx = \frac{1}{\lambda_n^2}\int_\Omega (\psi_l)'_x\, \varphi_n'(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)dx\,dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $l \to +\infty$, получим

$$\int_\Omega u\,\varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)\,dxdt = \frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega u_x\frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n}\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)p(x)\,dxdt.$$

Обозначим $c_{nm}, d_{nm}$ коэффициенты Фурье функции $u_x$ по ортонормированной системе (29). Из последнего соотношения следует равенство $c_{nm} = \lambda_n a_{nm}$. Аналогично доказывается, что $d_{nm} = \lambda_n b_{nm}$. Поскольку $u_x \in L_2(\Omega)$, то $\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\left((c_{nm})^2 + (d_{nm})^2\right) < \infty$. Следовательно, $\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\lambda_n^2\left((a_{nm})^2 + (b_{nm})^2\right) < \infty$ и $\sum_{\mu_{nm}\neq 0} n^2\left((a_{nm})^2 + (b_{nm})^2\right) < \infty$. В [11] доказана оценка $|\varphi_n'(x)| \le B_0 n \ \ \forall x \in [0,\pi]$. Следовательно,

$$\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{|\mu_{nm}|}|\varphi_n'(x)|\left(|a_{nm}|\,|T_m|\cos\left(\frac{a}{b}mt\right)| + |b_{nm}|\,|T_m|\,|\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)|\right) \le$$

$$\le B_0\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{n}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}| + |b_{nm}|) \le B_0\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{1}{\mu_{nm}^2}}\cdot\sqrt{\sum_{\mu_{nm}\neq 0} n^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2)} < \infty.$$

Из сходимости ряда $\sum_{\mu_{nm}\neq 0} m^2\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right)$ аналогично доказывается неравенство

$\sum_{\mu_{nm}\neq 0}\frac{m}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}| + |b_{nm}|) < \infty$. Из полученных оценок вытекает включение $v \in C^1(\Omega)$.
Лемма доказана.

**Квазилинейное уравнение.** Обозначим $\sigma(A) = \{\mu_{nm}\,|\, n \in N,\ m \in Z_+\}$. Предположим, что функция $g$ удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha \le \frac{g(x,t,u)}{u} \le \beta \ \text{, если } |u| \ge C,\ (x,t) \in \Omega. \qquad (31)$$

Здесь константы $\alpha, \beta$ такие, что $\alpha \le \beta$ и $C > 0$.

***Определение.*** Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u \in L_2(\Omega)$, такая, что $\int_\Omega u(p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x)\,dxdt = \int_\Omega (g(x,t,u) + f)\varphi\,dxdt \quad \forall \varphi \in D(A_0)$.

***Замечание.*** Если $g \equiv 0, h = 0$, то, согласно лемме 2, для любой функции $f \in \overline{H}_1(\Omega) \cap R(A)$ задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение $u \in C^1(\Omega)$.

***Теорема 1.*** Пусть выполнены условия (4), (6), (7), (25) и $b$ является нечетным числом. Предположим, что функция $g$ является $T$-периодической по $t$, $g \in C(\Omega \times R)$ и удовлетворяет условию (31) с константами $\alpha, \beta, C$, такими, что $C>0$, $\alpha \le \beta$ и $[\alpha, \beta] \bigcap \sigma(A) = \varnothing$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1)-(3) имеет обобщенное решение $u \in H_1(\Omega) \bigcap C(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из теоремы 1.1 в работе [13] и леммы 1.

Рассмотрим случай II и случай I для четных значений $b$. В этих случаях множество $\sigma(A)$ имеет предельную точку из отрезка $[b_0, 2b_1 + b_1^2]$ и для оператора $A$ выполнено свойство II из работы [10]. Запишем уравнение (1) в виде

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x,t,u) = f(x,t),\ 0 < x < \pi,\quad t \in R. \tag{32}$$

Следствием теоремы 3.2 из работы [10] является следующая теорема.

***Теорема 2.*** Пусть либо $h > 0$ и выполнены условия (7), (8), либо $h = 0$, выполнено условие (7) и $b$ является четным числом. Предположим, что функция $g$ является $T$-периодической по $t$, $g \in C(\Omega \times R)$ и удовлетворяет условию (31) с константами $\alpha, \beta, C$, такими, что $C>0$, $0<\alpha \le \beta$ и $[-\beta, -\alpha] \bigcap \sigma(A) = \varnothing$. Пусть дополнительно производная $g_u(x,t,u)$ непрерывна в $\Omega \times R$ и $g_u(x,t,u) \ge -b_0 p(x)$ $\forall (x,t,u) \in \Omega \times R$. Тогда для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ задача (32), (2), (3) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим случай, когда функция $g$ имеет более чем линейный рост по $u$. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x,t,u) = 0,\ 0 < x < \pi,\quad t \in R. \tag{33}$$

Предположим, что функция

$$g \in C(\Omega \times R),\ T\text{-периодична по } t, \text{ не убывает по } u \tag{34}$$

$$\text{и}\quad A_3 |u|^{r-1} - A_4 \le \left| g(x,t,u) \right| \le A_1 |u|^{r-1} + A_2\quad \forall\ (x,t) \in \Omega,\ u \in R, \tag{35}$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, r$ есть положительные числа, такие, что

$$r>2,\qquad \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{r}. \tag{36}$$

При $q>1$ определим норму в пространстве $L_q(\Omega)$ формулой $\|u\|_q = \left( \int\limits_\Omega |u(x,t)|^q\, p(x)\, dx\, dt \right)^{1/q}$.

***Определение.*** Обобщенным решением задачи (33), (2), (3) называется $T$-периодическая по $t$ функция $u \in L_r(\Omega)$, такая, что

$$\int\limits_\Omega u\, A_0\, \varphi\, dx\, dt + \int\limits_\Omega g(x,t,u)\, \varphi\, dx\, dt = 0\qquad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Точно так же, как теорема 3.1 в [14], доказывается следующая теорема.

***Теорема 3.*** Предположим, что выполнены условия (4), (25), (34), (35), (36) и либо $g(x,t,-u) = -g(x,t,u)$ $\forall\ (x,t) \in \Omega,\ u \in R$, либо функция $g$ не зависит от $t$. Пусть либо $h>0$ и выполнены условия (7), (8), либо $h=0$ и выполнено условие (7). Тогда $\forall\ d>0$ существует обобщенное решение $u \in L_r(\Omega)$ задачи (33), (2), (3), такое, что $\|u\|_r \ge d$. В случае I при нечетном $b$ обобщенное решение $u \in H_1(\Omega) \bigcap C(\Omega)$.

В доказанных теоремах приведены условия существования периодических по времени решений квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями на отрезке, одно из которых является условием Неймана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Barby, V. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with $x$ - dependent coefficients/ V. Barby, N. H. Pavel // Trans. Amer. Math. Soc.-1997.-V. 349. - № 5.- P. 2035-2048.
2. Rabinowitz, P. Free vibration for a semilinear wave equation/ P. Rabinowitz//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31.- № 1.- P. 31-68.
3. Bahri, A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation/A. Bahri, H. Brezis// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 1980.- V. 85. – P. 3130-320.
4. Brezis, H. Forced vibration for a nonlinear wave equations/ H. Brezis, L. Nirenberg //Comm. Pure Aple. Math.- 1978. - V. 31. - № 1.- P. 1-30.
5. Плотников, П. И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения/П. И. Плотников// Математический сборник. - 1988.-Т. 136(178).- № 4(8). - С. 546-560.
6. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term/ E. Feireisl //Chechosl. Math. J.- 1988.-V. 38.- № 1.- P.- 78-87.
7. Рудаков, И.А. Нелинейные колебания струны/ И.А. Рудаков//Вестн. МГУ. Сер. 1, матем., мех. – 1984.- № 2. – С. 9-13.
8. Рудаков, И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами/ И. А. Рудаков //Математические заметки . -2004 . -Т . 76. - Вып. 3. - С. 427-438.
9. Shuguan, J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with $x$ - dependet coefficients/ J. Shuguan//Calc. Var. -2008.-V. 32. – P. 137-153.
10. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами/ И.А. Рудаков //Математический сборник. -2007.-Т. 198.- № 4(8). - С. 546-560.
11. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения/ Ф.Трикоми. – М.: УРСС, 2003.-351 с.
12. Бабич, В.М. Ортогональные разложения и метод Фурье/ В.М. Бабич, Н.С. Григорьева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 239 с.
13. Рудаков, И.А. Нелинейные уравнения, удовлетворяющие условию нерезонансности/ И.А. Рудаков // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. -2006. – Вып. 25. – С. 226-243.
14. Рудаков, И.А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями/ И.А. Рудаков //Изв. РАН.- 2006.- № 1. - С. 1-10.


Материал поступил в редколлегию 23.06.14.