

Герасимов М.Д., канд. техн. наук, проф.  
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯХ\*

mail\_mihail@mail.ru

Для получения больших значений вынуждающей силы у вибрационных машин используют сложение колебаний нескольких, последовательно установленных, вибромодулей. Последовательно установленные виброблоки образуют единый вибрационный механизм, который будем называть виброблоком. Суммарная вынуждающая сила виброблока генерирует направленную вынуждающую силу, например, по вертикали. Применение вибромодулей одной конструкции позволяет получить равную по величине вынуждающую силу вверх и вниз. Для практического применения виброблоков важно иметь использование с разными характеристиками, которые позволяют получать асимметрию значений вынуждающей силы, направленной вверх и вниз. Асимметрия значения вынуждающей силы формирует рабочее и холостое направления её действия. Асимметричная вынуждающая сила может быть получена при сложении гармонических колебаний различного вида. Однако, вопрос определения величины асимметрии вынуждающей силы при сложении колебаний, описываемых различными уравнениями, для практического применения в вибрационных машинах изучен недостаточно.

**Ключевые слова:** вибрационный модуль, вибрационный блок, дебаланс, вынуждающая сила, коэффициент динамичности системы, ряд Фурье.

**Введение.** В вибраторах направленного действия используется двойной дебалансный механизм, представляющий собой два вибратора с круговыми колебаниями и дебалансными ва-

лами, вращающимися с одинаковой скоростью в разные стороны [1, 2, 3, 4]. Такой механизм будем называть вибрационным модулем с направленными колебаниями.

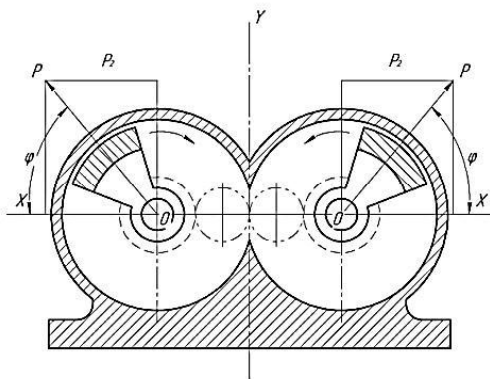


Рис. 1. Схема вибрационного модуля с направленными колебаниями.

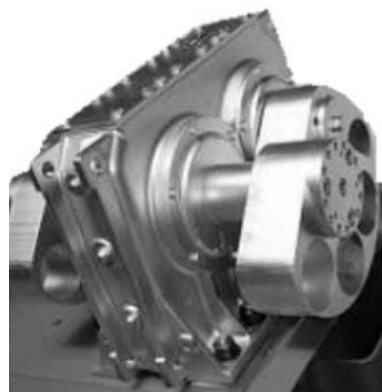


Рис. 2. «Направленный возбудитель DF» виброгрохотов LinaClass SLB/SLC

В работе рассматривается вибрационный модуль с направленными колебаниями с параллельным расположением осей в одной плоскости. У него проекции сил инерции в плоскости дебалансных валов уравниваются, а проекции на ось симметрии складываются, действуют вдоль оси симметрии, изменяясь по гармоническому закону

$$F_{\text{ин}} = m\omega^2 R \cos \omega t$$

где  $m$  – общая масса дебалансов;  $R$  – эксцентриситет центра масс;  $\omega$  – угловая скорость.

Эту силу  $F_{\text{ин}}$  называют вынуждающей силой.

**Методология.** В работе используются классические методы аналитических исследований, в основе которых лежат ряды Фурье.

**Основная часть.** В качестве вибровозбудителей направленного действия одновременно используются 1,2...4 вибрационных модуля с направленными колебаниями, имеющих 2,4...8 валов, синхронно вращающихся в противоположных направлениях с равными угловыми скоростями и дебалансами. Суммарная вынуждающая сила определяется произведением числа вибрационных модулей  $K$  на вынуждающую силу  $F_{\text{ин}}$  одного вибромодуля, вибратора.

$$F_c = KF_{\text{ин}}$$

Как правило, действие вынуждающей силы в одном направлении совершает полезную работу: уплотнение дорожными катками и виброплитами, сортировку на грохотах, погружение или извлечение свай в грунт или из грунта. В

противоположном направлении, в направлении холостого хода, действие вынуждающей силы направлено на восстановление энергии и подъём ударного инструмента. Рассмотрим случай вибропогружения свай.

Обозначим вынуждающую инерционную силу в рабочем направлении  $F_d$  и назовем её динамической силой погружения, а в противоположном направлении  $F_n$  - силой подъема. В случае приближения значения силы подъема  $F_n$  к весу вибропогружателя или его превышения, вибропогружение может перейти в вибротрамбование с отрывом и последующим ударом о поверхность, что является не желательным эффектом. Отрыв вибропогружателя исключают или компенсируют «пригрузом», создающим необходимую силу прижатия погружателя к грунту.

Задачей работы является уменьшение вертикальной силы подъема  $F_n$  при максимальной силе погружения  $F_d$ . Соотношение этих сил назовем динамичностью системы.

$$d_c = \frac{F_d}{F_n}$$

В некоторых работах это соотношение называют асимметрией направленной вынуждающей силы.

Действующие инерционные силы являются внутренними силами. При их воздействии нельзя изменить импульс (количество движения). Закон сохранения импульса справедлив и для системы, на которую действуют внешние силы, если  $R_{вн} = 0$ . Центр инерции вибровозбудителя движется так, как двигалась бы материальная точка, помещенная в центре инерции, и в ней были бы сконцентрированы все массы точек и силы, действующие на точки. Центр инерции замкнутой системы движется с постоянной скоростью, в частности равной нулю.

Из  $\int_0^T \bar{F} dt = 0$  следует (рис. 1):

$$F_1 t_1 = F_2 t_2 = S_1 = S_2 \quad \text{или} \quad d_c = \frac{F_1}{F_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

Очевидно, величины сил обратно пропорциональны времени их действия. Это модель сохранения импульса для схемы сил, представленных на рис. 1.

Подобный закон изменения силы с периодом  $T$  можно получить, используя тригонометрический ряд, членом которого являлась бы сила инерции, создаваемая двухбалансным вибратором направленных колебаний.

В поисках тригонометрического ряда имеющего своей суммой некоторую заданную функцию  $f(x)$  изменения силы, математики в первую очередь советуют обратиться к ряду

Фурье [5]. Он имеет наименьшую среднеквадратическую ошибку при любом фиксированном числе членов ряда  $n$ .

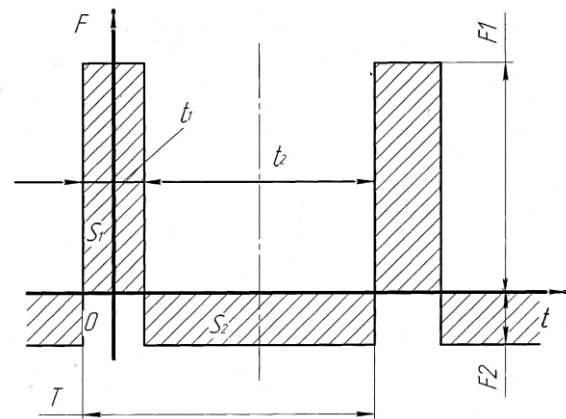


Рис. 1. Соотношение погружающей ( $F_1$ ) и подъемной силы ( $F_2$ ) при ударе

$t_1$  – время действия погружающей силы,  $t_2$  – время действия подъемной силы

Для четной функции  $f(x)$  ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$ ;  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx$

#### Свойства ряда Фурье

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \bar{f}(x)$  – среднее арифметическое функции на отрезке  $[0; \pi]$ ;
- $\int_0^{\pi} a_n \cos nxdx = 0$ , это свойство характеризует соблюдение закона сохранения импульса за период  $\pi$ , ( $\int_0^{\pi} F_{ин} d\varphi = 0$ ).
- При  $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0) - \frac{a_0}{2} = F_d \quad (1)$$

При  $x = \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_0}{2} = -F_n \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) можно применять для оценки точности приближения ряда Фурье к  $f(x)$  при конечном числе  $n$ ,  $n = N$ .

4. Динамичность системы для монотонно убывающей функции:

$$d_{cy} = \frac{F_d}{F_n} = \frac{f(0) - \bar{f}(x)}{\bar{f}(x)}$$

Сравним ряды Фурье для нескольких функций:

1. Разложение в ряд Фурье по косинусам идеальной (осесимметричной, четной) функции, заданной условиями

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h \\ 0, & h < x < \pi \end{cases}$$

имеет вид [5]

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right], (0 \leq x \leq \pi).$$

за исключением точек разрыва  $x = h$ , где  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

$$\sin nh \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(nh - nx) + \sin(nh + nx)) = \frac{1}{2} [\sin n(x + h) - \sin n(x - h)],$$

где  $\mp h$  является сдвигом фазы (сдвигом начала координат).

Тогда скорость схождения ряда характеризуется отношением:  $\frac{1}{nh^2}$ , т.е. она обратно пропорциональна номеру члена ряда  $n$  в первой степени.

$$y(x) = \frac{2}{\pi} shap \left[ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{n^2 + a^2} \cos nx \right], -\pi \leq x \leq \pi.$$

где  $a_n = (-1)^n \frac{a}{n^2 + a^2}$  коэффициент.

Ряд убывает обратно пропорционально  $n^2$ , т.е. значительно быстрее выше приведенной функции;

3. Для функции вида  $f(x) = x^{2m}$ .

$$d_c = \frac{f(\pi)}{f(x)} - 1 = \frac{\pi^{2m} (2m+1)}{\pi^{2m}} - 1 = 2m,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{2m} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{(2m)!}{n} \sum_{k=0}^{\frac{2m-1}{2}} \frac{(-1)^k \pi^{2m-2k-1}}{(2m-2k-1)! n^{2k+1}} \cos nx \Big|_0^{\pi}.$$

поскольку  $\cos n\pi = (-1)^n$ , то

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(2m)!}{n} \sum_{k=0}^{\frac{2m-1}{2}} \frac{(-1)^n (-1)^k \pi^{2m-2k-1}}{(2m-2k-1)! n^{2k+1}}.$$

ряд  $x^{2m}$  представляем в таблице.

$$\cos^{2m} \frac{x}{2} = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} + \frac{(2m)!}{2^{2m-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!(m-n)!} \cos nx,$$

или в виде

$$\cos^{2m} \frac{x}{2} = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} + \frac{(2m)!}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!(2m-k)!} \cos(m-k)x.$$

Ряд конечен и имеет ровно  $m$  переменных членов (от  $k = 0$  до  $k = m-1$ ).

Таким образом, в количестве базовой функции, разлагаемой в ряд Фурье, целесообразно применить более гладкие функции, причем, ряд

Фурье для функции  $y(x) = \cos^{2m} \frac{x}{2}$  на

Среднее арифметическое  $\bar{y} = \frac{h}{\pi}$ ;  $d_c = \frac{\pi}{h} - 1$ .

Для анализа ряда, преобразуем слагаемое в виде

2. Для более гладких функций вида

$$y(x) = chax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

ряд имеет вид (см. табл.),

$$\bar{y} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^{2m} dx = \frac{\pi^{2m}}{2m+1},$$

а динамичность системы

4. В качестве базовой примем функцию

$$y(x) = \cos^{2m} \frac{x}{2} \text{ на интервале } -\pi \leq x \leq \pi.$$

$$\bar{y} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \frac{x}{2} dx = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Ряд представим или в виде

отрезке  $-\pi < x < \pi$  имеет конечное число членов, равное  $m$ .

При одной и той же динамичности системы значимость коэффициентов при высоких гармониках меньше значимости коэффициентов при тех же гармониках для таких функций как:

$$y(x) = chax \text{ и } y(x) = x^{2m}.$$

**Согласование параметров вибраторов с рядом Фурье**

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$ , и  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_d a_n \cos nx,$$

Произведение множителя на ряд дает изменение силы.

где  $m_n \omega_n^2 r_n = F_d a_n$ , или величина дисбаланса  $n$ -го вала

$$F_A = \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] = F \left[ f(x) - \bar{f}(x) \right] = F(x),$$

$$m_n r_n = \frac{a_n F_d}{\omega_n^2}. \tag{3}$$

так как

Таким образом, показано, что соотношение максимальной силы погружения  $F_d$  и силы подъёма  $F_n$  характеризуемое динамичностью системы  $d_c$  и может изменяться за счёт конструктивных решений в достаточно широком диапазоне. Оптимальное значение динамичности системы для технических задач, очевидно, следует принимать в пределах 2,5...4,0.

$$F_A \cdot \bar{f}(x) = -F_n; \quad F_d = F_A \left[ f(0) - \bar{f}(x) \right],$$

то

$$F_A = -\frac{F_n}{\bar{f}(x)} = \frac{F_d}{f(0) - \bar{f}(x)}.$$

Закон изменение силы

Таблица

Динамичность системы при сложении колебаний

№ п/п	Вид функции	Ряд Фурье	$\bar{y}$	$d_c$	Число членов
1	$y_x = \begin{cases} 1; 0 \leq x \leq h \\ 0; h < x \leq \pi \end{cases}$	$y(x) \cong \frac{h}{\pi} + \frac{2h}{\pi} \sum \frac{\sin nh}{nh} \cos nx, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y(0;h) = \frac{1}{2}$	$\frac{h}{\pi}$	$\frac{\pi}{h} - 1$	$\infty$
2	$y(x) = \frac{\text{ch} ax}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{2}$	$y(x) = \frac{2}{\pi} \text{sh} a \pi \left[ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{n^2 + a^2} \cos nx \right], \quad -\pi \leq x \leq \pi$	$\frac{\text{sh} a \pi}{a \pi}$		$\infty$
3	$y = x^{2m}$	$y(x) = \frac{\pi^{2m}}{2m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(2m)!}{\pi n} \sum_{k=0}^{\frac{2m-1}{2}} \frac{(-1)^n (-1)^k \pi^{2m-2k-1}}{(2m-2k-1)! n^{2k+1}} \right] \cdot \cos nx$	$\frac{\pi^{2m}}{2m+1}$	$2m$	$\infty$
3.1	$y = x^{2m}$	$x^2 \approx \frac{\pi^3}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^3}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} \dots)$	$\frac{\pi^2}{3}$	$2$	$\infty$
3.2	$y =  x ^3$	$ x ^3 \approx \frac{\pi^3}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} [(-1)^n (\pi^2 n^2 - 2) + 2] \cos nx = \frac{\pi^3}{4} - 3 \left[ (\pi^2 - 4) \cos x - \frac{\pi^2}{2^2} \cos 2x + \left( \frac{\pi^2}{3^2} - \frac{4}{3^4} \right) \cos 3x - \frac{\pi^2}{4^2} \cos 4x + \left( \frac{\pi^2}{5^2} - \frac{4}{5^4} \right) \cos 5x - \dots \approx 7.752 - 3(5.87 \cos x - 2.467 \cos 2x + 1.047 \cos 3x - 0.6169 \cos 4x + 0.3884 \cos 5x - 7.752 - 17.61(\cos x - 0.4203 \cos 2x + 0.1784 \cos 3x - 0.1051 \cos 4x + 0.662 \cos 5x)) \right]$	$\frac{\pi^3}{4}$	$3$	$\infty$

Продолжение таблицы

3.3	$y = x^4$	$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx = \frac{\pi^4}{5} - 48$ $\left[ \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \cos x - \frac{1}{2^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2^2} \right) \cos 2x + \frac{1}{3^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{3^2} \right) \cos 3x - \right.$ $\left. \frac{1}{4^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4^2} \right) \cos 4x + \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{5^2} \right) \cos 5x - \dots \right] =$ $= \frac{\pi^4}{5} - 30.957(\cos x$ $- 0.5407 \cos 2x$ $+ 0.2643 \cos 3x$ $- 0.1534 \cos 4x + 0.0995 \cos 5x - \dots)$	$\frac{\pi^4}{5}$	4	
4	$y = \cos^{2m} \frac{x}{2}$ $-\pi \leq x \leq \pi$	$y(x) = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m)!}{k!(2m-k)!} \cos(m-k)x$	$\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$	$\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!} - 1$	$m$
4.1	$y = \cos^4 \frac{x}{4}$	$\cos^4 \frac{x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}(\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x)$	3/8	5/3=1.66	2
4.2	$y = \cos^6 \frac{x}{2}$	$\cos^6 \frac{x}{2} = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}(\cos x + \frac{6}{15} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 3x)$	5/16	11/5=2.2	3
4.3	$y = \cos^8 \frac{x}{2}$	$\cos^8 \frac{x}{2} = \frac{35}{128} + \frac{14}{32}(\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{7} \cos 3x + \frac{1}{56} \cos 4x)$	35/128	93/35=2.6	4
4.4	$y = \cos^{12} \frac{x}{2}$	$\cos^{12} \frac{x}{2} = \frac{462}{2048} + \frac{792}{2048}(\cos x$ $+ \frac{495}{792} \cos 2x$ $+ \frac{220}{792} \cos 3x$ $+ \frac{66}{792} \cos 4x + \frac{12}{792} \cos 5x + \frac{1}{792} \cos 6x)$	$\frac{462}{2048}$	3.43	6
4.5	$y = \cos^{16} \frac{x}{2}$	$\cos^{16} \frac{x}{2} = \frac{6435}{32768} + \frac{11400}{32768}(\cos x$ $+ \frac{7}{10} \cos 2x$ $+ \frac{21}{55} \cos 3x$ $+ \frac{44}{7} \cos 4x$ $+ \frac{143}{3} \cos 5x$ $+ \frac{1}{286} \cos 6x + \frac{1}{715} \cos 7x + \frac{1}{11440} \cos 8x) \approx$ $\approx 0.196 + (\cos x + 0.7 \cos 2x$ $+ 0.382 \cos 3x$ $+ 0.159 \cos 4x$ $+ 0.049 \cos 5x$ $+ 0.0105 \cos 6x$ $+ 0.0014 \cos 7x + 0.00008 \cos 8x)$	$\frac{6435}{32768}$	4.09	8

**Вывод.** При проектировании виброблока следует установить значение вынуждающей силы в рабочем направлении. Задаваясь функцией изменения вынуждающей силы следует определить коэффициент динамичности системы и количество вибромодулей для осуществления поставленной задачи. По полученным результатам и используя уравнение (3) рассчитываются масса и эксцентриситет дебалансов. Частота вращения дебалансов, как правило, принимается кратной.

\*Работа выполнена в рамках Гранта РФФИ № 14-41-0843 «Разработка теоретиче-

ских основ проектирования вибрационных модулей для технологических процессов сортировки, измельчения, уплотнения и погружения свай в грунт».

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вибрационные машины в строительстве и производстве строительных материалов: Справочник / Под. ред. В. А. Баумана и др. М.: Машиностроение, 1970. 548 с.
2. [http://www.schenckprocess.ru/files/equipment/screens/lina%20classic\\_slc\\_grohot.pdf](http://www.schenckprocess.ru/files/equipment/screens/lina%20classic_slc_grohot.pdf)

3. Герасимов М.Д. Инновационные вибрационные технологии, машины и оборудование. Опыт НИОКР. // Мир дорог. Специальный выпуск. 2015–2016, 2015. С. 31–32.

4. Герасимов М.Д., Мкртычев О.В., Герасимов Д.М. Методика определения величины разбалансировки планетарного

вибратора направленных колебаний // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2016. №1, С. 107–110.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Издание двадцать первое, стереотипное. Изд-во «НАУКА», М.: 1974.

---

**Gerasimov M.D.**

**ADDITION OF OSCILLATIONS IN THE VIBROEXCITER**

*For large values of driving force from of vibration machines are used vibrations addition of of several consistently installed, vibromoduley. Consistently installed vibrobloki form a single vibrating mechanism, which we shall call vibroblokom. The overall exciting force vibrobloka generates driving force directed, for example, vertically. Application of vibro module construction allows one to obtain equal largest driving force up and down. For practical application vibroblokov important to have the use with different characteristics that let you receive the asymmetry values of driving force, directed upwards and downwards. The asymmetry values of driving force generates the working and idle directions of its actions. Asymmetric exciting force can be obtained with the addition of harmonic oscillations of various types. However, the question of definition of size of of the asymmetry of driving force when adding vibrations described by the various by equations for practical use in vibratory machines is insufficiently studied.*

**Key words:** *vibration module, vibration unit, the eccentric weight, the driving force, the dynamic factor of the system, the Fourier series.*

---

**Герасимов Михаил Дмитриевич**, кандидат технических наук, профессор кафедры подъемно-транспортных и дорожных машин.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46

E-mail: mail\_mihail@mail.ru