УДК: 519.65
DOI: 10.30987/2658-6436-2020-1-9-16

Е.В. Конопацкий

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В работе изложена геометрическая теория многомерной интерполяции, основанная на инвариантах аффинной геометрии. Аналитическое описание геометрических интерполянтов выполнено в рамках математического аппарата БН-исчисление с помощью алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки. Представлена геометрическая интерпретация взаимодействия параметров, факторов и функции отклика, которая позволяет выполнить обобщение геометрической теории многомерной интерполяции в сторону увеличения размерности пространства. Изложены концептуальные принципы формирования дерева модели геометрического интерполянта как геометрической основы моделирования многофакторных процессов и явлений.

Ключевые слова: *геометрическая теория, многомерная интерполяция, функция отклика, фактор влияния, текущий параметр, геометрический интерполянт.*

E.V. Konopatskiy

GEOMETRIC THEORY OF MULTIDIMENSIONAL INTERPOLATION

The paper presents a geometric theory of multidimensional interpolation based on invariants of affine geometry. The analytical description of geometric interpolants is performed within the framework of the mathematical apparatus BN-calculation using algebraic curves that pass through pre-set points. A geometric interpretation of the interaction of parameters, factors, and the response function is presented, which makes it possible to generalize the geometric theory of multidimensional interpolation in the direction of increasing the dimension of space. The conceptual principles of forming the tree of the geometric interpolant model as a geometric basis for modeling multi-factor processes and phenomena are described.

Keywords: *geometric theory, multidimensional interpolation, response function, influence factor, parameter, geometric interpolant.*

Введение

Краеугольным камнем любых компьютерных моделей, методов их оптимизации и автоматизации процессов проектирования и управления на их основе, является аналитическое описание, имеющее под собой четкую логическую последовательность, основанную на математических операциях. Одним из ключевых инструментов компьютерного моделирования является интерполяция, которая, наряду с аппроксимацией, нашла широчайшее применение в современной науке и технике. При этом отдельного внимания заслуживает многомерная интерполяция, которая с одной стороны является универсальным инструментом моделирования многофакторных процессов и явлений, полученных на основе экспериментально-статистической информации, а с другой стороны – ставит сложную задачу обобщения существующих методов на многомерное пространство, что, учитывая сложность зрительного восприятия последнего, не всегда возможно.

Многомерная интерполяция не является чем-то новым. Её важность подчёркивается в работе [1] применительно к использованию для моделирования многомерных таблиц в физике и технике. Примером такой двухмерной таблицы могут служить таблицы термодинамических функций газов, где независимыми переменными обычно являются температура и плотность. В вычислительной химии и физике, производятся расчеты сложных структур с получением многомерных таблиц практически любой размерности (программа квантово-механических расчетов GAUSSIAN). Например, в работе [2] приведен пример обработки четырехмерной таблицы, полученной при расчете энергии молекулярной структуры на предмет получение ее конформационного поля. В настоящее время ведутся работы по обработке пяти- и шестимерных таблиц результатов. Следует отметить, что с появлением современных высокопроизводительных вычислительных машин, способных оперировать большими объёмами информации, использование таких таблиц, а вместе с ними и многомерной интерполяции, вышла на качественно новый уровень. Вместе с тем возникла потребность в разработке эффективных и высокоскоростных методов многомерной интерполяции, способных оперировать огромным количеством экспериментально-статистических данных.

Научных подходов к решению задач многомерной интерполяции встречается достаточно много. Например, в работе [3] приводится сравнение различных способов многомерной интерполяции, которые включают: интерполяцию многочленом Лагранжа, полиномиальную рекурсивную интерполяцию и рациональную интерполяцию. В работе [4] рассматривается интерполяция периодической функции многих переменных, заданной в узлах обобщённой параллелепипедной сетки целочисленной решётки. Задача интерполяции функции, заданной на регулярной сетке, для случая большого числа переменных приводится в работе [5]. Решению задач многомерной сплайн-интерполяции посвящена работа [6], в которой M. Flanagan разработал огромную математическую библиотеку в том числе и многомерной сплайн-интерполяции, реализованную на языке программирования Java и находящуюся в свободном доступе. Как видно из приведенных примеров, большая часть существующих методов многомерной интерполяции используют полиномиальные или кусочно-полиномиальные функции на регулярной сети точек. А в том случае, когда исходные данные представлены нерегулярной сетью точек, возникает необходимость выполнения дополнительной операции – перехода от нерегулярной сети точек к регулярной. В этом отношении геометрические интерполянты являются универсальным инструментом, который можно использовать как на регулярной, так и на нерегулярной сети точек без необходимости проведения каких-либо преобразований.

Геометрическая интерпретация взаимодействия параметров, факторов и функции отклика

Термин «Геометрический интерполянт» впервые упоминается в работе [7]. Вместе с тем его геометрический смысл и примеры эффективного использования были получены в более ранних работах, например, в [8]. Под геометрическим интерполянтом в общем случае понимается геометрический объект многомерного аффинного пространства, проходящий через наперёд заданные точки, координаты которых соответствуют исходной экспериментально-статистической информации. Для координации геометрического интерполянта в пространстве используется декартовая система координат. Хотя все полученные зависимости справедливы и для аффинной системы координат, декартовая система координат используется как наиболее известная и получившая в математике и в инженерной практике наибольшее распространение.

Любой исследуемый многофакторный процесс (или явление) представляет взаимодействие функции отклика и факторов, влияющих на неё и потому получивших название факторы влияния. При этом задача моделирования многофакторного процесса сводится к установлению функциональной зависимости между функцией отклика и факторами влияния. Для определения такой зависимости в декартовой системе координат каждой отдельной оси ставится в соответствие свой отдельный фактор и непосредственно функция отклика. Таким образом, за счёт функции отклика количество осей декартовой системы координат всегда на одну больше, чем факторов.

Для аналитического описания геометрических интерполянтов в декартовой системе координат используется математический аппарат БН-исчисление (точечное исчисление

Балюбы-Найдыша [9]), основанный на инвариантах аффинной геометрии. Результатом такого описания является точечное уравнение или вычислительный алгоритм, который представляет собой упорядоченную последовательность точечных уравнений. Точечные уравнения по своей сути являются символьной записью с использованием точек и параметров. Параметры позволяют установить взаимосвязь между факторами влияния и функцией отклика. Геометрической интерпретацией такого взаимодействия является процесс проецирования моделируемого геометрического объекта на оси декартовой системы координат.

Рассмотрим в качестве примера, покоординатный расчёт отрезка прямой в 3-мерном пространстве, как одного из наиболее простых геометрических объектов:

$$M=(B-A)t+A \leftrightarrow \begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A, \\ y=(y_B-y_A)t+y_A, \\ z=(z_B-z_A)t+z_A. \end{cases}$$

Т.е. с помощью параметра t описываются факторы x и y влияющие на функцию отклика z. Геометрическая интерпретация такого взаимодействия представлена на рис. 1.

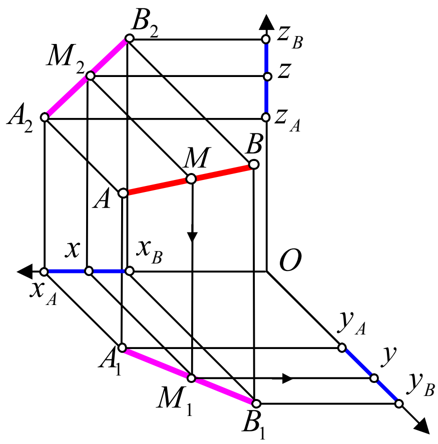

Рис. 1. Геометрическая интерпретация взаимосвязи факторов влияния, функции отклика и параметров точечных уравнений

Таким образом, параметр точечного уравнения, как это принято в математике, представляется вспомогательной переменной, не входящей в изначальное условие задачи, но удобной для её решения. Для обеспечения возможности обобщения на многомерное пространство, параметр точечного уравнения должен обладать инвариантными свойствами по отношению к размерности декартовой системы координат. Чаще всего это простое отношение трёх точек прямой, пример использования которого представлен выше.

Аналогичным образом любое точечное уравнение можно представить в виде совокупности проекций на оси декартовой системы координат, аналитическим эквивалентом которой является система параметрических уравнений.

Принципы формирования дерева модели геометрического интерполянта

Для моделирования многофакторных процессов и явлений с помощью геометрического интерполянта достаточно разработать геометрическую схему графического построения геометрического интерполянта и аналитически описать её с помощью математического аппарата БН-исчисления. Процесс построения геометрической схемы является задачей индивидуальной и напрямую определяется исходными данными для моделирования. Тем не менее можно выделить два концептуальных принципа формирования таких геометрических схем, которые получили название дерева геометрической модели [8].

1 принцип. От простого к сложному. Любой, даже самый сложный геометрический интерполянт можно представить в виде совокупности более простых интерполянтов, объединенных между собой с помощью образующей линии. Например, геометрический интерполянт 2-мерного пространства, который представляет собой отсек поверхности отклика, можно представить в виде совокупности 1-мерных геометрических интерполянтов (опорных линий, проходящих через наперёд заданные точки), объединённых друг с другом с помощью образующей линии. Таким образом формируется дерево модели геометрического интерполянта, которая по своей сути является геометрической схемой его построения. И чем более многофакторный процесс моделируется, тем сложнее структура дерева геометрической модели и вычислительный алгоритм его построения, однако всё равно он состоит из более простых, но взаимосвязанных между собой элементов.

2 принцип. Принадлежности одного геометрического объекта другому. В основу моделирования многофакторных процессов и явлений с помощью геометрических интерполянтов положен простейший принцип принадлежности одного геометрического объекта к другому из начертательной геометрии. Например, прямая линия принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости. В свою очередь, точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Рассматривая прямую линию, как частный случай кривой, а плоскость – как частный случай поверхности, получим, что для того чтобы исходные точки принадлежали поверхности, необходимо организовать их в виде опорных (в начертательной геометрии используется термин направляющих) линий, объединив их впоследствии с помощью образующей. Тогда все точки, принадлежащие опорным линиям, будут принадлежать искомой поверхности, которая, в свою очередь, принадлежит 3-мерному пространству. Причём, образующая также является кривой линией, только проходящей через текущие точки опорных линий искомой поверхности. Обобщая этот подход на многомерное пространство, получим следующее утверждение.

Для того чтобы трехпараметрический геометрический интерполянт в виде гиперповерхности 4-мерного аффинного пространства был носителем наперёд заданных точек, координаты которых соответствуют исходной экспериментально-статистической информации, необходимо чтобы исходные её точки принадлежали семейству поверхностей, объединенных в гиперповерхность образующей линией, проходящей через текущие точки семейства поверхностей.

Пример дерева геометрической модели трёхфакторного процесса можно представить в следующем виде (рис. 2).

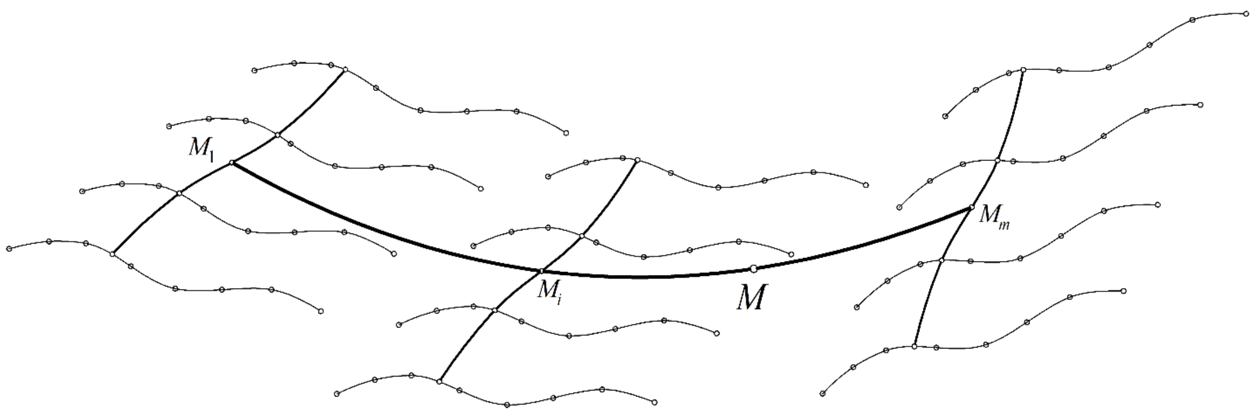

Рис. 2. Дерево геометрической модели трёхфакторного процесса

Аналитическое описание такого отсека гиперповерхности, а, следовательно, и модели трёхфакторного процесса, можно представить в виде следующей последовательности точечных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} M_{ij} = \sum_{k=1}^{l} M_{ijk} p_{ijk}(u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} q_{ij}(v) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M = \sum_{i=1}^{m} M_i r_i(w) \end{array}\right. ,$$

где M − текущая точка отсека гиперповерхности, проходящей через наперёд заданные точки в количестве $m \times n \times l$;

M_i − текущая точка образующей i-го отсека поверхности, проходящая через наперёд заданные точки, которая является опорной для построения гиперповерхности;

M_{ij} − текущая точка j-й опорной дуги кривой, проходящей через наперёд заданные точки;

M_{ijk} − исходные точки, через которые должен проходить искомый отсек гиперповерхности. Координаты этих точек соответствуют исходным экспериментально-статистическим данным;

$p_{ijk}(u)$ − функции от параметра u, определяющие вид опорных линий;

$q_{ij}(v)$ − функции от параметра v, определяющие вид образующих линий отсеков поверхностей;

$r_i(w)$ − функции от параметра w, определяющие вид образующей линии отсека гиперповерхности;

l − количество исходных точек в каждой опорной линии;

n − количество опорных линий для построения опорных поверхностей;

m − количество опорных поверхностей для построения гиперповерхности;

i − порядковый номер опорной поверхности;

j − порядковый номер опорной линии;

k − порядковый номер исходной точки в каждой опорной линии;

u, v и w − текущие параметры, которые изменяются от 0 до 1.

Выполнив покоординатный расчёт, получим проекции гиперповерхности на оси глобальной системы координат, для которой оси Ox, Oy и Oz будут соответствовать факторам влияния, а Ot – искомой функции отклика.

Тогда задача сводится к определению кривых линий, проходящих через наперёд заданные точки, только таких линий становится больше. Таким образом, формируется дерево модели процесса, которое можно представить в виде некоторой геометрической схемы, по которой впоследствии будет построен и аналитически описан геометрический объект. Аналогичным образом можно построить геометрическую модель процесса, принадлежащую пространству любой размерности.

Основные инструменты аналитического описания геометрических интерполянтов

Геометрической интерпретацией полиномиальных функций, которые нашли широкое применение среди существующих методов многомерной интерполяции, являются алгебраические кривые, среди которых можно выделить особый вид – алгебраические кривые, проходящие через наперёд заданные точки [10], использование которых позволяет получить аналитическое описание геометрических интерполянтов многомерного аффинного пространства любой степени сложности. Особенность таких кривых заключается в том, что они при любых условиях будут проходить через наперёд заданные точки, вне зависимости от координат исходных точек, что позволяет использовать их уравнения не только для аналитического описания опорных линий, но и образующих линий при построении геометрических интерполянтов.

Используя предложенный в работе [10] метод, получены дуги кривых 2-10 порядка, проходящие соответственно через 3-11 точек. Например:

1. Точечное уравнение дуги кривой 2-го порядка, проходящей через 3 наперёд заданные точки:

$$M = M_1\bar{t}\left(1-2t\right)+4\bar{t}tM_2+M_3t\left(2t-1\right).$$

2. Точечное уравнение дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперёд заданные точки:

$$M = M_1\left(\bar{t}^3-2{,}5\bar{t}^2t+\bar{t}t^2\right)+M_2\left(9\bar{t}^2t-4{,}5\bar{t}t^2\right)+M_3\left(-4{,}5\bar{t}^2t+9\bar{t}t^2\right)+M_4\left(\bar{t}^2t-2{,}5\bar{t}t^2+t^3\right).$$

3. Точечное уравнение дуги кривой 4-го порядка, проходящей через 5 наперёд заданных точек:

$$M = M_1\left(\bar{t}^4-\frac{13}{3}\bar{t}^3t+\frac{13}{3}\bar{t}^2t^2-\bar{t}t^3\right)+M_2\left(16\bar{t}^3t-\frac{64}{3}\bar{t}^2t^2+\frac{16}{3}\bar{t}t^3\right)+M_3\left(-12\bar{t}^3t+40\bar{t}^2t^2-12\bar{t}t^3\right)+$$
$$+M_4\left(\frac{16}{3}\bar{t}^3t-\frac{64}{3}\bar{t}^2t^2+16\bar{t}t^3\right)+M_5\left(-\bar{t}^3t+\frac{13}{3}\bar{t}^2t^2-\frac{13}{3}\bar{t}t^3+t^4\right).$$

Следует отметить очень важную отличительную особенность полученного уравнения. Для точечных уравнений принадлежность геометрического объекта к пространству конкретной размерности определяется суммой функций от параметра t, которая обязательно должна быть равна 1. Поскольку функции от параметра t определяются биномом Ньютона, который раскладывается для параметра t и его дополнения до 1, то условие принадлежности дуги кривой конкретному пространству будет выполняться вне зависимости от размерности пространства. Иными словами, полученные параметрические уравнения дуги кривой могут быть использованы для пространства любой размерности.

Другим важным свойством полученной дуги кривой является равномерное распределение параметра, изначально заложенное в методику определения дуги кривой, проходящей через наперёд заданные точки. При этом для каждой конкретной координатной оси, имеющей равномерное распределение координат исходных точек, справедлива линейная зависимость между натуральным значением фактора, принадлежащего i-й оси проекций и текущим параметром:

$$x_i = nl_it+b_i,$$

где x_i − i-я ось проекций глобальной системы координат;

n − порядок дуги кривой;

b_i − начальное значение фактора влияния, соответствующее i-й оси проекций;

l_i − шаг равномерного распределения проекции исходных точек на i-ю ось.

Это свойство алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, в значительной мере сокращает объём необходимых вычислений при моделировании многофакторных процессов и явлений с помощью геометрических интерполянтов, позволяя рассматривать их как на регулярной, так и на нерегулярной сети точек.

Выводы

Разработанная геометрическая теория многомерной интерполяции и её аналитическое описание с помощью дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, позволяет представить любой геометрический объект в виде упорядоченного многопараметрического множества точек и являются основой моделирования многофакторных процессов с учётом всех функциональных, конструктивных, технологических, экономических и других требований, эффективность которой подтверждается приведенными в работе геометрическими многопараметрическими моделями физико-механических свойств строительных материалов, приведенными в работах [7-8, 10]. При этом разработанная геометрическая теория многомерной интерполяции включает принципы формирования дерева геометрической модели процесса и вычислительный алгоритм аналитического её описания с помощью последовательности точечных уравнений. Описанный в работе подход к формированию геометрических интерполянтов также эффективно используется для аппроксимации геометрических объектов многомерного аффинного пространства и для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Список литературы:

1. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
2. Popov E.V. et al, Visualization and Analysis of Molecular Potential Energy Surface (Pes) and Its Minima. IADIS International Conference Interfaces and Human Computer Interaction 2019 (part of MCCSIS 2019). –pp. 411-415.
3. Пахнутов, И.А. Многомерная интерполяция [Электронный ресурс] / И.А. Пахнутов; Интерактивная наука. – 2017. – №15. – Точка доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/mnogomernaya-interpolyatsiya (дата обращения: 26.08.2018).
4. Добровольский, Н.М. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция [Текст] / Н.М. Добровольский, А.Р. Есаян, О.В. Андреева, Н.В. Зайцева. – Чебышевский сборник, 2004. – Т.5. – Вып. 1. – С.122-143.
5. Шустов, В.В. Многомерная интерполяция сеточной вектор-функции [Текст] / В.В. Шустов.- Чита.- 2010. – Т.1. – С.17-20.
6. Michael Thomas Flanagan's Java Scientific Library. Точка доступа: https://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/java/ (дата обращения: 23.07.2019).
7. Конопацкий, Е.В. Общий подход к полилинейным интерполяции и аппроксимации на основе линейчатых многообразий [Текст]/ Е.В. Конопацкий, С.И. Ротков, А.А. Крысько // Строительство и техногенная безопасность. – Симферополь: ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», 2019. – № 15(67). – С.159-168.
8. Конопацкий, Е.В. Подход к построению геометрических моделей многофакторных процессов

References:

1. Kalitkin N.N. Numerical methods [Tekst] / N.N. Kalitkin. – Moscow: Nauka, 1978. – 512 p.
2. Popov E.V. et al, Visualization and Analysis of Molecular Potential Energy Surface (Pes) and Its Minima. IADIS International Conference Interfaces and Human Computer Interaction 2019 (part of MCCSIS 2019). –pp. 411-415.
3. Pahnutov, I.A. Mnogomernaya interpolyaciya [Elektronnyj resurs] / I.A. Pahnutov; Interaktivnaya nauka. – 2017. – №15. – Tochka dostupa: https://cyberleninka.ru/article/n/ mnogomernaya-interpolyatsiya (data obrashcheniya: 26.08.2018).
4. Dobrovol'skij, N.M. Mnogomernaya teoretiko-chislovaya Fur'e interpolyaciya [Tekst] / N.M. Dobrovol'skij, A.R. Esayan, O.V. Andreeva, N.V. Zajceva. – CHebyshevskij sbornik, 2004. – T.5. – Vyp. 1. – S.122-143.
5. SHustov, V.V. Mnogomernaya interpolyaciya setochnoj vektor-funkcii [Tekst] / V.V. SHustov.-CHita.- 2010. – T.1. – S.17-20.
6. Michael Thomas Flanagan's Java Scientific Library. Tochkadostupa: https://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/java/ (data obrashcheniya: 23.07.2019).
7. Konopackij, E.V. Obshchij podhod k polilinejnym interpolyacii i approksimacii na osnove linejchatyh mnogoobrazij [Tekst] / E.V. Konopackij, S.I. Rotkov, A.A. Krys'ko // Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost'. – Simferopol':FGAOU VO «KFU im. V.I. Vernadskogo», 2019. – № 15(67). – S.159-168.
8. Konopackij, E.V. Podhod k postroeniyu geometricheskih modelej mnogofaktornyh processov

многомерной интерполяции [Текст] / Е.В. Конопацкий // Программная инженерия. – М.: 2019. – Т.10. – № 2. – С. 77-86.
9. Балюба И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие [Текст] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш.- Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
10. Конопацкий, Е.В. Моделирование дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки / Е.В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2019. – № 2. – С. 30-36. – DOI:10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036.

mnogomernoj interpolyacii [Tekst] / E.V. Konopackij // Programmnaya inzheneriya. – M.: 2019. – T.10. – № 2. – S. 77-86.
9. Balyuba I.G. Tochechnoe ischislenie: uchebnoe posobie [Tekst] / I.G. Balyuba, V.M. Najdysh.- Melitopol': MGPU im. B. Hmel'nickogo, 2015. – 236 s.
10. Konopackij, E.V. Modelirovanie dug krivyh, prohodyashchih cherez napered zadannye tochki / E.V. Konopackij // Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh tekhnologij. – M.: 2019. – № 2. – S. 30-36. – DOI:10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036..

Статья поступила в редколлегию 30.01.2020.
Рецензент: д-р. техн. наук, доцент,
Брянский государственный технический университет
Захарова А.А.
Статья принята к публикации 07.02.2020.

Сведения об авторах:

Конопацкий Евгений Викторович
канд. техн. наук, доцент кафедры
специализированных информационных технологий
и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная
академия строительства и архитектуры»,
E-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru

Information about authors:

Konopatskiy Evgeniy Viktorovich
candidate of technical Sciences, docent of the
Department of specialized information technologies
and systems of the Donbas National Academy of Civil
Engineering and Architecture
E-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru