

УДК 621.923  
DOI: 10.12737/18709

**Ю.К. Новоселов, д.т.н.,  
С.М. Братан, д.т.н.,  
В.Б. Богуцкий, к.т.н.**  
(ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»,  
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33)  
E-mail: serg.bratan@gmail.com

## **Влияние случайной составляющей отклонений профиля инструмента на динамику процесса круглого наружного шлифования\***

*Выполнена оценка влияния изменения формы рабочей поверхности круга на процесс круглого наружного шлифования, предложены зависимости для расчета математического ожидания, корреляционной функции и дисперсии текущего радиус-вектора. Выполнен анализ влияния случайной компоненты профиля на динамику процесса.*

**Ключевые слова:** профиль инструмента; динамика перемещений; радиус-вектор; фактическая глубина резания; корреляционная функция.

**Yu.K. Novosyolov, D.Eng.,  
S.M. Bratan, D.Eng.,  
V.B. Bogutsky, Can.Eng.**  
(FSEI VT "State University of Sevastopol",  
33, Universitetskaya Str., Sevastopol, 299053)

## **Effect of random component in tool profile deviations upon dynamics of external circular grinding**

*This paper reports the estimation carried out of the state influence of a disk work surface upon output indices of external circular grinding. There are offered dependences for the computation of a mathematical expectation, correlation function and dispersion of a current radius-vector. The analysis of influence of a profile random component upon a process dynamics is carried out. The examples of spectrum characteristics of a random component of a tool profile deviations, a square of module frequency characteristics of the system and power spectrum of tool center oscillations caused by random deviations in an abrasive disk profile are shown. The interrelations established allow forecasting the behavior of an external round grinding, computing corrective control impacts, and carrying out a billet surface effective working taking into account conditions changed. The outlooks for the further development of results obtained consist in their application for the choice of project solutions, the characteristics evaluation of technological grinding systems and grinding optimization at billet working on the automated equipment.*

**Keywords:** tool profile; dynamics of shifts; radius-vector; actual cutting depth; correlation function.

В современных условиях порядка 47 % финишных операций выполняется методами круглого наружного шлифования. Операции проектируют с применением традиционных методов, не в полной мере учитывающих влияние случайных факторов, снижающих

\*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства Образования и Науки Российской Федерации.

стабильность показателей качества производимых изделий. Для стабилизации показателей качества технологические режимы назначаются исходя из неблагоприятных условий, например, возобновление режущих свойств изношенного шлифовального круга производится значительно раньше, чем того требует его действительное состояние.

Исследования операций шлифования показывают [1], что, в начальный момент времени при правильном подборе характеристик инструмента, режимов резания, оптимальном построении цикла шлифования обеспечиваются заданные параметры точности и шероховатости поверхности детали. Из всех элементов технологической системы только шлифовальный круг и заготовка претерпевают существенные изменения в относительно короткий промежуток времени. Изменение состояния инструмента оказывает существенное влияние на ход технологического процесса, так как профиль инструмента копируется на поверхности заготовки. Например, увеличение отклонений формы круга эквивалентно динамическому изменению размерных параметров, что приводит к дополнительным возмущениям динамической системы станка, и, следовательно, увеличению шероховатости и волнистости детали, образованию на ее поверхности дефектного слоя, которые в конце периода стойкости инструмента могут возрастать в несколько раз.

Анализ экспериментальных и литературных данных [1] показывает, что шлифовальный круг является наиболее слабым звеном в технологической системе и оказывает наибольшее влияние на стабильность параметров качества деталей. Его состояние непрерывно изменяется в процессе обработки. На режущих кромках инструмента появляются площадки износа, поверхность круга становится волнистой, вследствие чего по данным С.Н. Корчака [2] режущая способность инструмента за период его стойкости уменьшается на 40...50 %.

При исследовании влияния на динамику процесса шлифования абразивного инструмента в большинстве работ, рассматриваются детерминированные явления, в то время как происходящие реальные процессы в существенной степени имеют стохастический характер [1].

Целью данной работы является оценка влияния случайных составляющих отклонений профиля инструмента как возмущающих факторов на динамику процесса круглого наружного шлифования. Такой анализ может быть выполнен с применением динамической модели технологической системы, как носителя свойств технологической операции. Схема динамической системы круглошлифовального станка представлена на рис. 1.

Составляющие, вызванные отклонениями форм шлифовального круга и заготовки, при-

водят к соответствующим отклонениям от номинального (спроектированного) технологического режима обработки и, следовательно, к отклонениям в показателях качества обработанной поверхности.

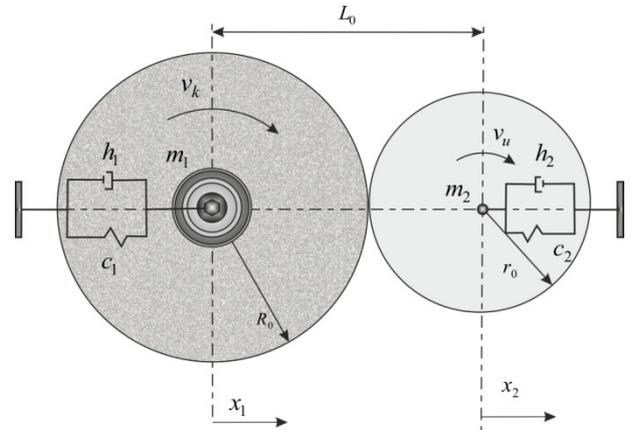


Рис. 1. Эквивалентная схема динамической системы круглошлифовального станка

Для процесса круглого наружного шлифования схема взаимодействия шлифовального круга и заготовки имеет вид, представленный на рис. 1.

На основе принципа возможных перемещений, для системы (см. рис.1) построена ее модель в виде совокупности дифференциальных уравнений, характеризующих динамику перемещений центров круга, заготовки и изменения фактической глубины резания в процессе круглого наружного шлифования:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + h_3 \dot{t}_f + c_3 t_f - h_1 \dot{S} - c_1 S = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - h_3 \dot{t}_f - c_3 t_f = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  – приведенные массы заготовки с центрами и круга со шпинделем;  $h_i$  – коэффициент сопротивления  $i$ -го звена;  $c_i$  – коэффициент жесткости  $i$ -го звена;  $x_1$  и  $x_2$  – координаты центров вращения круга и заготовки соответственно;  $s$  – путь, пройденный механизмом подачи за время  $t$ ;  $t_f$  – фактическая глубина резания.

Фактическая глубина резания (размер зоны контакта заготовки с инструментом по линии центров), определяется следующей формулой:

$$t_f = R + r - L,$$

где  $R = R_0 + \Delta R$  – текущий радиус-вектор поверхности круга с учетом его износа и отклонений формы  $\Delta R$ ;  $r = r_0 + \Delta r$  – текущий ради-

ус-вектор заготовки с учетом съема материала и отклонений формы  $\Delta r$ ;  $L = L_0 + \Delta L = L_0 + x_2 - x_1$  – текущее расстояние между центрами вращения круга и детали.

С учетом полученного определения  $t_f$  и ее составляющих элементов система (1) запишется:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h_1(\dot{x}_1 - \dot{S}) + h_3(\dot{R} + \dot{r} - \dot{x}_2 + \dot{x}_1) + \\ + c_1(x_1 - S) + c_3(R_0 + \Delta R + r_0 + \Delta r - L_0 - x_2 + \\ + x_1) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 - h_3(\dot{R} + \dot{r} - \dot{x}_2 + \dot{x}_1) - \\ - c_3(R_0 + \Delta R + r_0 + \Delta r - L_0 - x_2 + x_1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для исходного положения заготовки (рис. 1.) в момент начала ее контакта с инструментом ( $L_0 = R_0 + r_0$ ;  $S_0 = 0$ ;  $x_{10} = 0$ ;  $x_{20} = 0$ ;  $t_f = 0$ ) система уравнений (2) в отклонениях запишется:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + h_3(\dot{x}_1 + \dot{R}) + c_3(x_1 + \Delta R) - \\ - h_3(\dot{x}_2 - \dot{r}) - c_3(x_2 - \Delta r) - h_1 \dot{S} - c_1 S = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 + h_3(\dot{x}_2 - \dot{r}) + \\ + c_3(x_2 - \Delta r) - h_3(\dot{x}_1 + \dot{R}) - c_3(x_1 + \Delta R) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Вследствие вращения круга и заготовки вариации геометрических размеров имеют периодический или почти периодический характер, что и объясняет появление внутренних возбуждающих сил, в существенной степени определяющих динамику процесса шлифования.

Для дальнейшего анализа динамическую систему (3) целесообразно привести к форме:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} [-(h_1 + h_3)\dot{x}_1 - (c_1 + c_3)x_1 + h_3\dot{x}_2 + c_3x_2] - \\ - \frac{1}{m_1} [h_3(\dot{R} + \dot{r}) + c_3(\Delta R + \Delta r)] + \frac{1}{m_1} [h_1\dot{S} + c_1S], \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [-(h_2 + h_3)\dot{x}_2 - (c_2 + c_3)x_2 + h_3\dot{x}_1 + c_3x_1] + \\ + \frac{1}{m_2} [h_3(\dot{R} + \dot{r}) + c_3(\Delta R + \Delta r)]. \end{cases} \quad (4)$$

Первые слагаемые правых частей соотношений (4) представляют собой компоненты с производными отклонений положения центров круга и детали, зависящие непосредственно от внутренних обобщенных координат динамической системы (геометрических и кинематических). Вторые слагаемые отражают влияние отклонений форм круга и детали. Третье слагаемое первого уравнения в системе

(4) отражает воздействие пути врезания и подачи шлифовального круга на динамическую систему.

Динамическая система процесса круглого наружного шлифования (4) содержит параметр  $\Delta R$ , характеризующий отклонения формы инструмента (основной источник возбуждения вынужденных колебаний системы) и заготовки  $\Delta L$  от их средних значений, что позволяет анализировать влияние соответствующих воздействий. Отметим, что вклад влияния  $\Delta L$  быстро затухает и может не приниматься во внимание при дальнейшем анализе.

Для описания формы периферии шлифовального круга целесообразно использование цилиндрической системы координат с началом в центре тела инструмента, осью  $Ox$  направленной параллельно высоте шлифовального круга так, чтобы при его вращении в ходе рабочего процесса была образована полярная система координат.

Описание исходного (при  $\tau = 0$ ) полярного радиус-вектора для любого фиксированного расстояния  $x = x_b$  от базовой плоскости может быть представлено разложением в ряд Фурье отклонений от своего среднего (по углу  $\gamma$ ) значения  $R_0(x, \tau) = M\{R(\gamma, x, \tau)\}_\gamma$ :

$$\begin{aligned} R(\gamma, x, \tau)|_{\tau=0} &= R_0(x, \tau)|_{\tau=0} + \\ + \sum_{i=1}^p [A_{R_i}(x, \tau) \cos(\gamma i + \Psi_i(x, \tau))] |_{\tau=0} &= \\ = R_0(x, \tau)|_{\tau=0} + \\ + \sum_{i=1}^p [U_{R_i}(x, \tau) \sin(\gamma i) + U_{R_i}(x, \tau) \cos(\gamma i)] |_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненты сумм в (5) рассматриваются как гармоники спектрального представления отклонения, характеризуемого совокупностью амплитуд  $A_{R_i}(x, \tau)$  и фаз  $\Psi_i(x, \tau)$  или пар амплитуд при синус ( $U_{R_i}(x, \tau)$ ) и косинус ( $W_{R_i}(x, \tau)$ ) для составляющих каждой из гармоник.

Между параметрами этих представлений для любого фиксированного значения  $i$  известны однозначные (в диапазоне изменения угла  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ) соотношения:

$$\begin{aligned} A_{R_i}^2(x, \tau) &= U_{R_i}^2(x, \tau) + W_{R_i}^2(x, \tau), \\ \text{и } \Psi_{R_i}(x, \tau) &= \arctan \left( \frac{U_{R_i}(x, \tau)}{W_{R_i}(x, \tau)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Значение исходного радиус вектора  $R(\gamma, x, \tau)|_{\tau=0}$  и величины износа инструмента  $\Delta R(\gamma, x, \tau)$  могут включать в свой состав как закономерные, так и случайные составляющие отклонений от своих средних значений. Радиус средней окружности на расстоянии  $x$  от базовой плоскости  $R_0(x, \tau)$  в начальный момент времени  $\tau = 0$  вследствие погрешностей статической настройки станка при правке инструмента или погрешностей его изготовления является случайным начальным параметром. Совокупность амплитуд и фаз всех  $p$  гармоник в любой момент времени  $\tau$  и при любом  $x$  характеризуют неслучайную реализацию случайной функции описания рабочей поверхности инструмента.

Считая, что в описании (5) присутствуют как случайные составляющие, так и неслучайный (закономерный) компонент отклонения формы (гармоника с номером  $j$ ), можно представить (5) в одной из форм:

$$R(\gamma, x, \tau)|_{\tau=0} = R_0(x, \tau)|_{\tau=0} + \sum_{i=1}^p [A_{Ri} \cos(\gamma i + \Psi_i(x, \tau))]_{\tau=0} + [A_{Rj} \cos(\gamma j + \Psi_j(x, \tau))]_{\tau=0} \quad (7)$$

или

$$R(\gamma, x, \tau)|_{\tau=0} = R_0(x, \tau)|_{\tau=0} + \sum_{i=1}^p [U_{Ri} \sin(\gamma i) + U_{Ri} \cos(\gamma i)]_{\tau=0} + A_{Rj} \cos(\gamma j + \Psi_j(x, \tau))|_{\tau=0}. \quad (8)$$

При обработке вращающимся шлифовальным кругом, можно записать

$$\gamma = \gamma_0 + \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где  $\gamma_0$  – начальный угол;  $\omega_k(\tau)$  – угловая скорость вращения инструмента.

Сечения плоскостями, перпендикулярными оси рабочей поверхности, для вращающихся инструментов представляют профили, характеризующиеся замкнутыми кривыми (см. рис. 1), радиус-вектор которых уменьшается с увеличением времени работы инструмента вследствие его износа.

$$R(\gamma, x, \tau) = R(\gamma, x, \tau)|_{\tau=0} - \Delta R(\gamma, x, \tau). \quad (10)$$

Для любого фиксированного угла  $\gamma$  величина износа инструмента зависит от условий контакта этого участка с обрабатываемой поверхностью, определяющих условия протекания процесса износа, и, следовательно, корреляционно

связана с величинами исходного радиус-вектора, колебаниями припуска, твердости материала, частотой, амплитудой вибраций в технологической системе. Совокупность этих процессов приводит к появлению как закономерных, так и случайных отклонений в величине износа.

При износе могут протекать как процессы, способствующие выравниванию и сглаживанию рабочей поверхности, так и явления, способствующие увеличению закономерных и случайных отклонений.

Для любого участка рабочей поверхности инструмента радиальный износ определяется скоростью износа  $S_R(\gamma, x, \tau)$ :

$$\Delta R(\gamma, x, t) = \int_0^t S_R(\gamma, x, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Математическое ожидание случайной величины радиального износа вычисляется по математическому ожиданию функции скорости износа на основании свойств линейных операторов:

$$M\{\Delta R(\gamma, x, \tau)\} = M\left\{\int_0^t S_R(\gamma, x, \tau) d\tau\right\} = \int_0^t M\{S_R(\gamma, x, \tau)\} d\tau. \quad (12)$$

Учитывая, что скорость износа может быть корреляционно связана с формой исходной рабочей поверхности, представим ее в виде функционала от  $\gamma$ , подобного (5), (6):

$$S_R(\gamma, x, \tau) = \bar{S}(x, \tau) + \sum_{i=1}^p [U_{Si} \cos(\gamma i) + W_{Si} \cos(\gamma i)] + A_{Si}(x, \tau) \times \cos[\gamma i + \Psi_i(x, \tau)]. \quad (13)$$

С учетом (11) определим случайную функцию износа радиус-вектора инструмента как результат интегрирования (5):

$$\Delta R(\gamma, x, t) = \int_0^t \bar{S}(x, \tau) d\tau + \int_0^t A_{Si}(x, \tau) \cos[\gamma i + \Psi_i(x, \tau)] d\tau + \sum_{i=1}^p \left[ \int_0^t U_{Si} \sin(\gamma i) d\tau + \int_0^t W_{Si} \cos(\gamma i) d\tau \right]. \quad (14)$$

Интегралы от случайных величин  $U_{Si}$  и  $W_{Si}$  будут новыми случайными величинами  $U_{\Delta Ri}$  и

$W_{\Delta Ri}$ , для которых также справедливы соотношения типа (6).

После подстановки полученных функций исходного радиус-вектора и величин износа в уравнение (10) получим зависимость для вычисления текущего значения радиус-вектора инструмента:

$$R(\gamma, x, \tau) = R_0(x) - \int_0^t \bar{S}(x, \tau) d\tau + A_{Rj}(x) \cos[\gamma j + \Psi_j(x)] - \int_0^t A_{Si}(x, \tau) \cos[\gamma i + \Psi_i(x)] d\tau + \sum_{i=1}^p [(U_{Si} - U_{\Delta Ri}) \sin(\gamma i) + (W_{Si} - W_{\Delta Ri}) \cos(\gamma i)]. \quad (15)$$

Здесь случайные компоненты  $i$ -й и  $j$ -й гармоник оставлены под знаком суммы, их анализ выполняется по аналогии с анализом других случайных отклонений.

В состав уравнения (15) введены одна гармоника закономерных составляющих исходного профиля и одна гармоника закономерных составляющих износа инструмента. В общем случае их может быть несколько. Последовательность дальнейшего анализа при этом сохраняется.

Математическое ожидание случайной функции (15) вычисляется как сумма математических ожиданий отдельных слагаемых. Первое слагаемое является случайной величиной, распределенной по закону Гаусса:

$$M\{R_0(x)\} = m_R(x, \tau)|_{\tau=0}.$$

Математическое ожидание второго слагаемого определяется выражением (12), математическое ожидание третьего и четвертого слагаемых за целое число периодов вращения инструмента равны нулю, математическое ожидание пятого слагаемого при тех же соображениях для случаев равномерного износа инструмента также равно нулю. Таким образом,

$$M\{R(\gamma, x, t)\} = m_R(x, \tau)|_{\tau=0} - \int_0^t m_S(x, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Для вычисления корреляционной функции разобьем правую часть уравнения (15) на несколько независимых между собою комплексов. Первый комплекс включает первое и второе слагаемые и определяет средний радиус-вектор в момент времени  $t$ .

В силу того, что изменение радиус-вектора по отношению к его абсолютной величине за период стойкости инструмента, как правило,

незначительно и не может существенно повлиять на процесс формирования синусоидальных и случайных отклонений профиля рабочей поверхности инструмента, величина дисперсии для первого комплекса равна:

$$K_{1,R}(\gamma_1 - \gamma_2)|_{\gamma_1=\gamma_2} = M\{[R_0(x) - m_r(x)][\bar{S}(x, t) - m_S(x, t)]\} \cong \cong \sigma_{R_0(x)}^2 + D \cdot [\Delta R_0(x, \tau)]. \quad (17)$$

Второй комплекс включает третье и четвертое слагаемые. Их корреляционная функция вычисляется как математическое ожидание центрированных величин от аргумента  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$K_{2,R}(\gamma_1 - \gamma_2) = M\{[(A_j(x) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j(x)) - \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_1 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau) \times [A_j(x) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j(x)) - \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_2 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau]\} = M\{A_j^2(x) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j(x)) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j(x)) - A_j(x) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j(x)) \times \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_2 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau - \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_1 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau \times A_j(x) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j(x, \tau)) + \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_1 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau \times \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_2 + \Psi_i(x, \tau)) d\tau\}. \quad (18)$$

Будем считать, что фазовые углы  $\Psi_j$  и  $\Psi_i$  распределены равномерно на интервале от 0 до  $2\pi$ :

$$f(\Psi_i) = \begin{cases} 0 & \forall \Psi_i < 0 \\ \frac{1}{2\pi} & \forall 0 \leq \Psi_i < 2\pi \\ 0 & \forall \Psi_i > 2\pi \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (19)$$

Для условий (19) первое слагаемое из (18) приобретает вид:

$$K_{2,R}(\gamma_1 - \gamma_2) = M\{[A_j^2(x) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j(x, \tau)) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j(x, \tau)) = \frac{A_j^2(x)}{2} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \cos(j\gamma_1 + \Psi_j(x, \tau)) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j(x, \tau)) \cdot f(\Psi_j) d\Psi_j = \frac{A_j^2(x)}{2} \cos(j(\gamma_2 - \gamma_1)). \quad (20)$$

Аналогично определяется последнее слагаемое (18) при  $\Psi_i$ , не зависящем от  $\tau$ :

$$M\left\{\int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_1 + \Psi_i) d\tau \times \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) \cos(i\gamma_2 + \Psi_i) d\tau\right\} =$$

$$= \frac{\cos(i(\gamma_2 - \gamma_1))}{2} \left[\int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau\right]^2. \quad (21)$$

Математическое ожидание второго и третьего слагаемого уравнения (18) могут быть определены, если известна корреляционная или функциональная связь между гармоническими отклонениями в профиле инструмента и его износа.

Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся на практике случаев.

Если начальная фаза гармоник износа  $\Psi_i$  не зависит от начальной фазы  $\Psi_j$ , то математическое ожидание второго и третьего слагаемых равны нулю.

В этом случае

$$K_{2,R}(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{A_j^2(x)}{2} \cos(j(\gamma_2 - \gamma_1)) +$$

$$+ \frac{\cos(i(\gamma_2 - \gamma_1))}{2} \left[\int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau\right]^2. \quad (22)$$

Если процессы имеют одинаковые частоты и отличаются только по фазе, т.е.  $i = j$  и  $\Psi_i = \Psi_j + \alpha_\Psi$ , то математическое ожидание второго и третьего слагаемых для (18) вычисляются следующим образом:

$$M\{A_j(x) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j + \alpha_\Psi) \times$$

$$\times \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau + A_j(x) \cos(j\gamma_2 + \Psi_j) \cos(j\gamma_1 + \Psi_j +$$

$$+ \alpha_\Psi) \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau\}_{|\gamma} = \frac{A_j(x)}{4} \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} [\cos(j(\gamma_1 - \gamma_2) - \alpha_\Psi) + \cos((\gamma_1 + \gamma_2)j + 2\Psi_j +$$

$$+ \alpha_\Psi) + \cos(j\gamma_2 - j\gamma_1 - \alpha_\Psi) + \cos(j\gamma_2 + j\gamma_1 + 2\Psi_j +$$

$$+ \alpha_\Psi)] f(\Psi_i) d\Psi_j = A_j(x) \cos[j(\gamma_2 - \gamma_1)] \times$$

$$\times \cos(\alpha_\Psi) \int_0^t A_{S,i}(x, \tau) d\tau.$$

Последнее слагаемое (15) при выполнении условия (19) для каждой гармоники определит составляющие третьего комплекса:

$$M\{A_k \cos[\gamma_1 k + \Psi_k] A_k \cos[\gamma_2 k + \Psi_k]\} =$$

$$= \frac{A_{0k}^2 + D\{A_k\}}{2} \cos(k(\gamma_2 - \gamma_1)). \quad (23)$$

При условиях (19) и распределении амплитуд  $A_k$  по закону Релея, энергетический спектр, представленный составляющими (23) определится как

$$K_{3,R}(\gamma_2 - \gamma_1) = \sum_{k=1}^p \frac{A_{0k}^2 + D\{A_k\}}{2} \cos(k(\gamma_2 - \gamma_1)). \quad (24)$$

Учитывая независимость рассмотренных комплексов, вычислим корреляционную функцию суммированием корреляционных функций отдельных составляющих:

$$K_R(\gamma_2 - \gamma_1) = \sigma_p^2(x) + D\{\Delta R_0(x, \tau)\} + \left\{ \frac{1}{2} A_j^2(x) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \int_0^t A_{S,j}(x, \tau) d\tau \right]^2 - A_j(x) \cos(\alpha_\Psi) \int_0^t A_{S,j}(x, \tau) d\tau \left. \right\} \times$$

$$\times \cos[j(\gamma_2 - \gamma_1)] + \sum_{k=1}^p \frac{A_{0k}^2 + D\{A_k\}}{2} \cos(k(\gamma_2 - \gamma_1)). \quad (25)$$

Для выше указанных наборов условий корреляционная функция (25) представляет собой аддитивные комплексы, что позволяет определять спектральную плотность суммой спектральных плотностей для каждой из компонент.

Дисперсия случайной величины радиус-вектора рабочей поверхности определяется, если в (25) принять  $\gamma_1 = \gamma_2$ :

$$K_R(\gamma_2 - \gamma_1) = \sigma_p^2(x) + D\{\Delta R_0(x, \tau)\} + \frac{1}{2} A_j^2(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \int_0^t A_{S,j}(x, \tau) d\tau \right]^2 - A_j(x) \cos(\alpha_\Psi) \int_0^t A_{S,j}(x, \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^p \frac{A_{0k}^2 + D\{A_k\}}{2}. \quad (26)$$

При анализе случайных компонент уравнения (25) для  $k$ -й гармоники в работе [3] предложена зависимость

$$K_{3,R}(\gamma_2 - \gamma_1) = D_0 \cdot \exp(-\alpha_k \omega_k \tau) \times \cos(k(\gamma_2 - \gamma_1)), \quad (27)$$

где  $D_0$  – дисперсия высот неровностей рельефа круга  $k$ -й гармоники;  $\alpha_k$  – эмпирический коэффициент, учитывающий изменение дисперсии за период стойкости инструмента. Для процесса плоского шлифования  $\alpha$ , как правило, меньше нуля. На основании функций (25) – (27) могут быть построены их спектральные представления, определяемые как преобразование Фурье:

$$S_{ex}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_R(\gamma) \exp(-j \pi \omega) d\gamma. \quad (28)$$

Для аддитивных корреляционных функций оператор (28) является линейным, что позволяет строить покомпонентные представления их спектров и анализировать установившуюся реакцию технологической системы (4) на отдельные компоненты возмущения.

Пример графика спектральных характеристик случайной составляющей отклонений профиля инструмента (27) и квадрата модуля частотных характеристик системы (4) приведены на рис. 2 и 3.

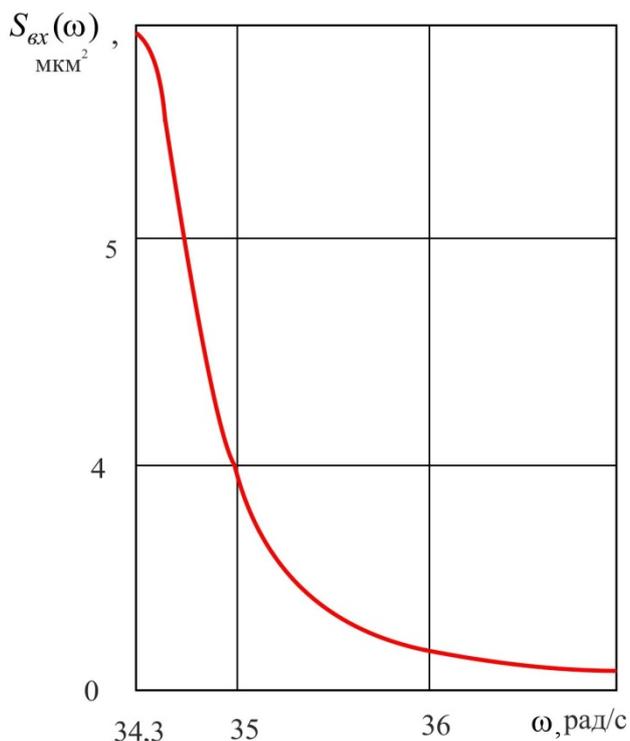


Рис. 2. Влияние частоты  $\omega$  на спектральную характеристику случайной составляющей отклонения профиля инструмента

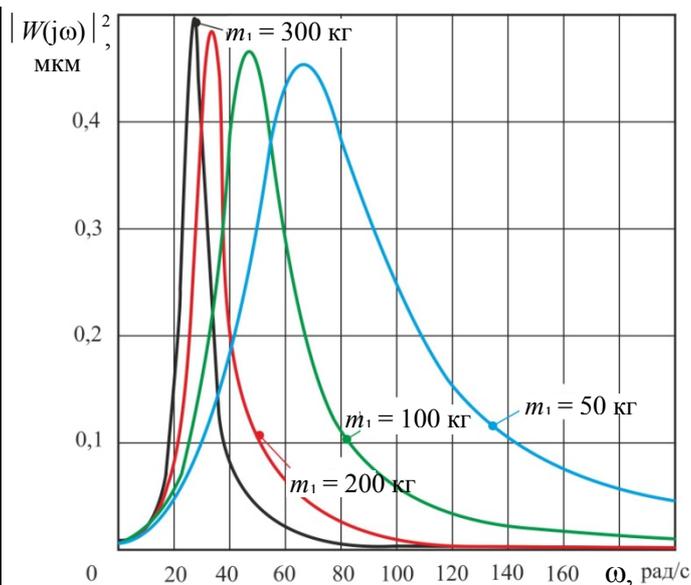


Рис. 3. Зависимости квадратов модулей передаточной функции от частоты для разных значений  $m_1$

Спектральные характеристики вынужденных колебаний центра шлифовального круга, определяемые влиянием случайного процесса отклонений профиля инструмента при взаимодействии его с заготовкой в ходе технологического процесса шлифования, определяются, например [3], по известной зависимости:

$$S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega) \cdot |W_{TC}(j\omega)|^2, \quad (29)$$

где  $|W_{TC}(j\omega)|^2$  – квадрат модуля передаточной функции динамических характеристик технологической системы (4),  $S_{вх}(\omega)$  – спектральное представление отклонения профиля инструмента, определяемое как преобразование Фурье корреляционных функций, построенных на базе (28).

Пример энергетического спектра колебаний центра инструмента, вызываемого случайными отклонениями профиля шлифовального круга, приведен на рис. 4.

Подобные спектры характеризуют частотное распределение энергий вынужденных колебаний технологической системы, возбуждаемой случайной составляющей отклонений профиля инструмента.

Приведенные результаты показывают нелинейный характер зависимости интенсивности колебаний элементов технологической системы, на которые воздействуют случайные отклонения профиля инструмента от приведенной массы шлифовального круга и шлифовальной бабки.

Перспективы дальнейшего развития полученных результатов заключаются в их применении для выбора проектных решений и оценке характеристик технологических систем шлифования и оптимизации параметров обработки для существующих комплексов.

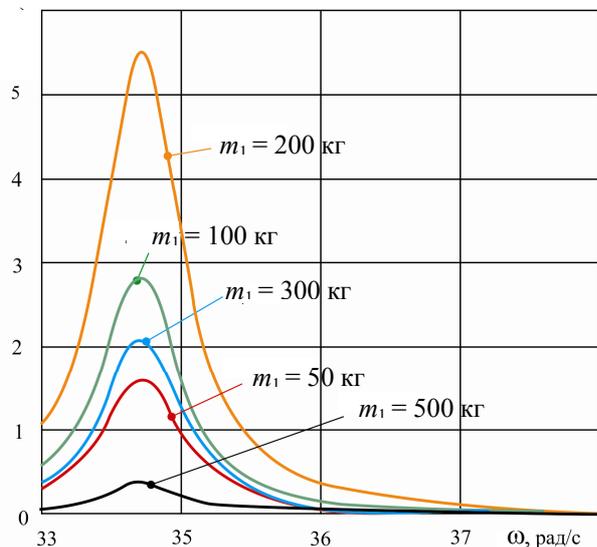


Рис. 4. Энергетический спектр колебаний центра инструмента вызываемый случайными отклонениями профиля шлифовального круга

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новоселов Ю.К. Динамика формообразования поверхностей при абразивной обработке. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. 304 с.
2. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. М.: Машиностроение, 1974. 280 с.
3. Братан С.М. Модификация динамических соотношений при построении системы автоматизированного управления процессами финишной обработки/ С.М. Братан, Д.А. Каинов, Ю.О. Стреляная // Известия Тульского Государственного университета. Технические науки. 2013. Вып. 6-1. С. 136–141.

## REFERENCES

1. Novosyolov Yu.K. *Surface Shaping Dynamics at Abrasion*. Sevastopol: Publishing House of SevNTU, 2012. pp.304.
2. Korchak S.N. *Productivity of Steel Parts Grinding*. M.: Mechanical Engineering, 1974. pp. 280.
3. Bratan S.M. Modification of correlations at formation of finishing control system/ S.M. Bratan, D.A. Kainov, Yu.O. Strelyanaya // *Proceedings of State University of Tula. Technical Sciences*. 2013. Issue 6-1. pp. 136–141.

Рецензент д.т.н. Ю.С. Степанов

УДК 621.92  
DOI: 10.12737/18710

В.Ф. Макаров, д.т.н.,  
С.П. Никитин, к.т.н.  
А.О. Норин, аспирант  
(Пермский национальный исследовательский политехнический университет),  
E-mail: makarovv@pstu.ru

## Повышение качества и производительности при профильном глубинном шлифовании турбинных лопаток

Представлена методика оценки качества обработки при глубинном профильном шлифовании на многокоординатном станке поверхностей сложной формы. Приведены математические модели для определения параметров пятна контакта шлифовального круга и заготовки при глубинном шлифовании различных поверхностей лопаток, позволяющие прогнозировать съём материала, износ шлифовального круга и шероховатость каждой поверхности на основе режимов резания, характеристики круга, динамики упругих, тепловых и рабочих процессов в технологической системе.

**Ключевые слова:** технология обработки; глубинное шлифование; многокоординатная обработка; динамическая система станка; динамические характеристики.

V.F. Makarov, D.Eng.,  
S.P. Nikitin, Can.Eng.  
A.O. Norin, Post Graduate Student  
(National Research Polytechnic University of Perm)

## Quality and productivity increase at profile creep feed grinding of turbine blades

A new concept of working quality assessment and cutting mode setting at profile creep feed grinding of some complex conju-