Возможности информационных технологий при изучении учебной темы «Ряды Фурье»

The possibilities of information technology in the study of the educational topic «Fourier series»

УДК 37
Получено: 21.07.2020 Одобрено: 06.08.2020 Опубликовано: 25.08.2020

Власов Д.А.
Канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова
e-mail: DAV495@gmail.com

Vlasov D.A.
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods in Economics, Plekhanov Russian University of Economics
e-mail: DAV495@gmail.com

Аннотация
В центре внимания статьи возможности информационных технологий при изучении учебной темы «Ряды Фурье», востребованной в практике профессиональной подготовки будущего экономиста и IT-специалиста в экономическом университете. Особое внимание уделяется приёмам работы с новым инструментальным средством *Wolfram Alpha*. Показано, что его методически целесообразное использование в учебном процессе позволяет не только выполнять громоздкие, технические вычисления и получать результаты (разложение функции в ряд Фурье, коэффициенты ряда Фурье), но и работать с визуализациями, по-новому реализуя классический дидактический принцип наглядности.
Ключевые слова: математический анализ, математическая подготовка, теория рядов, информатизация, информационные технологии, ряд Фурье.

Abstract
The article focuses on the possibilities of information technologies in the study of the educational topic "Fourier series", which is in demand in the practice of professional training of a future economist and IT specialist at an economic university. Particular attention is paid to the techniques for working with the new tool *WolframAlpha*. It is shown that its methodologically expedient use in the educational process allows not only to perform cumbersome, technical calculations and obtain results (expansion of a function in a Fourier series, coefficients of a Fourier series), but also to work with visualizations, in a new way realizing the classical didactic principle of clarity.
Keywords: mathematical analysis, mathematical training, series theory, informatization, information technologies, Fourier series, WolframAlpha.

Теория рядов Фурье нашла широкие приложения в различных экономических и технических задачах в первую очередь по причине удобного представления функций для дифференцирования и интегрирования. Отметим, что *дифференцирование и интегрирование прито считать основными операциями в математическом анализе*, достаточно широко представленным в программе профессиональной подготовки экономиста и IT-специалиста в Российском экономическом университете им. Г. В. Плеханова. Кроме того, запись функции в виде ряда Фурье облегчает процесс сдвига функции по аргументу и процесс свертки функции.

Данная особенность применяется при исследовании сложных экономических и технических систем.

Как показывает практика преподавания математических дисциплин для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 38.03.01 «Экономика», 09.03.01 «Прикладная информатика», при решении задач математического анализа, теории рядов и дифференциальных уравнений ряд *затруднений студентов связаны со сложностью представления заданной функции в виде ряда Фурье*. Отметим, что разложение функции в ряд Фурье является одним из этапов решения математических задач и неверная реализация этого этапа приводит к неверному решению задачи. Если в рамках типовых задач с представлением заданной функции в виде ряда Фурье большинство студентов справляется, то по-другому дело обстоит при решении более сложных задач, в рамках которых получение ряда Фурье является трудоемкой, технической задачей.

Несмотря на то, что традиционно методике преподавания математического анализа в высшей школе посвящено большое количество разноплановых исследований, избранные вопросы математического анализа – теория рядов, а тем более теория рядов Фурье недостаточно исследованы с методических позиций. Следует отметить исследование [14], в рамках которого представлены *рекомендации по совершенствованию обучения студентов признакам сравнения числовых рядов*, которые могут быть использованы и при раскрытии более сложной учебной темы − «Теория рядов Фурье». Большой интерес представляет публикация [4], в рамках которой содержатся *методические указания по раскрытию основных понятий теории рядов в контексте их исторического развития*. С учетом данных исследований среди основных понятий теории рядов следует выделить такие понятия, как «Числовая последовательность»; «Числовой ряд»; «Члены ряда»; «Функциональная последовательность»; «Функциональный ряд»; «Частичная сумма ряда»; «Сумма ряда»; «Сходящийся ряд»; «Точка сходимости функционального ряда»; «Область сходимости функционального ряда»; «Остаток»; «Бином Ньютона»; «Ряд Тейлора»; «Ряд Маклорена»; «Ряд Фурье».

Согласно [1, 13] возможны две формы записи ряда Фурье: *тригонометрическая* (используется комбинация тригонометрических функций) и *комплексная* (используется экспоненциальная функция):

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right),\ f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k e^{ikt}\text{, где}$$

$f=f(t)$ − функция действительного аргумента t; a_0 – нулевой коэффициент ряда Фурье; n – индекс суммирования.

Возникает вопрос, почему именно этот вариант представления функций в ряд, который был назван впоследствии рядом Фурье, оказался настолько востребованным в современных математических и прикладных исследованиях. Оригинальность подхода Фурье заключается в разложении функций с использованием синусоидальных и косинусоидальных функций. Фурье интересовал поиск путей решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Открытием стал изящный математический прием – новая возможность преобразования обыкновенного дифференциального уравнения в алгебраические уравнения, процедура решения которых давно была исследована.

Ряды Фурье находят приложения в задачах электротехники (в частности, при изучении спектра сигнала), в задачах математической физики (исследование упругих колебаний струны, построении теории изгиба балок, изучение механизмов теплопроводности), совершенствовании трактовок экспериментальных работ в области медицины, химии и астрономии. Отметим, что открытие данного математического объекта принадлежит французскому математику Жан Батисту Жозефу Фурье. Именно им было предложено использовать замену сложной функции на комбинацию периодических функций. Прикладные аспекты рядов Фурье неисчислимы. В частности, в основе функционирования цифровых видеокамер и цифровых фотоаппаратов лежат коэффициенты рядов Фурье, которые сохраняются на информационный носитель. Новые цифровые технологии, в частности технология передачи информации по сети *Internet*, невозможны без теории рядов Фурье.

Возможностям информационных технологий в развитии методической системы математической подготовки бакалавров большое внимание уделяется в работах [1, 3, 10]. Авторами разработаны рекомендации по поэтапному внедрению информационных технологий в практику преподавания различных математических дисциплин, представлен опыт реализации учебно-познавательной деятельности студентов в средах *R* и *R-studio*, раскрыты механизмы эволюционирования методических систем обучения под влиянием процесса информатизации. Потенциал компьютерного моделирования, в том числе для решения задач аппроксимации, представлен в работе [7]. Большой интерес в контексте исследования представляет работа [12], в рамках которой затрагивается вопрос об использовании *Wolfram*-технологий для индивидуализации обучения математике на примере одной из учебных тем математического анализа.

Как показывает опыт профессионально-педагогической деятельности, инструментальное средство *Wolfram Alpha* существенно *облегчает представление функций во второй форме записи ряда Фурье*, в которой используется комплексный аргумент. В рамках учебных занятий по теме «Ряды Фурье» следует обратить внимание студентов на *проблему выбора формы* записи ряда Фурье, необходимого для решения конкретной задачи. Остановимся на возможностях инструментального средства *Wolfram Alpha* для информатизации учебного процесса по теме «Ряды Фурье», в частности − разложении функции в ряд Фурье. Знакомство с этим инструментальным средством мы считаем необходимым проводить поэтапно, рассматривая каждый приём на конкретных примерах. Первым приёмом, с которым целесообразно познакомить студентов – использование оператора «*Fourier series*» со следующими параметрами: «Функция», «Аргумент», «Число членов ряда». Так, запрос *Fourier series* $\left[x^2, x, 4\right]$ позволяет студентам автоматически получить первые четыре слагаемых разложения функции $y = x^2$ в ряд Фурье.

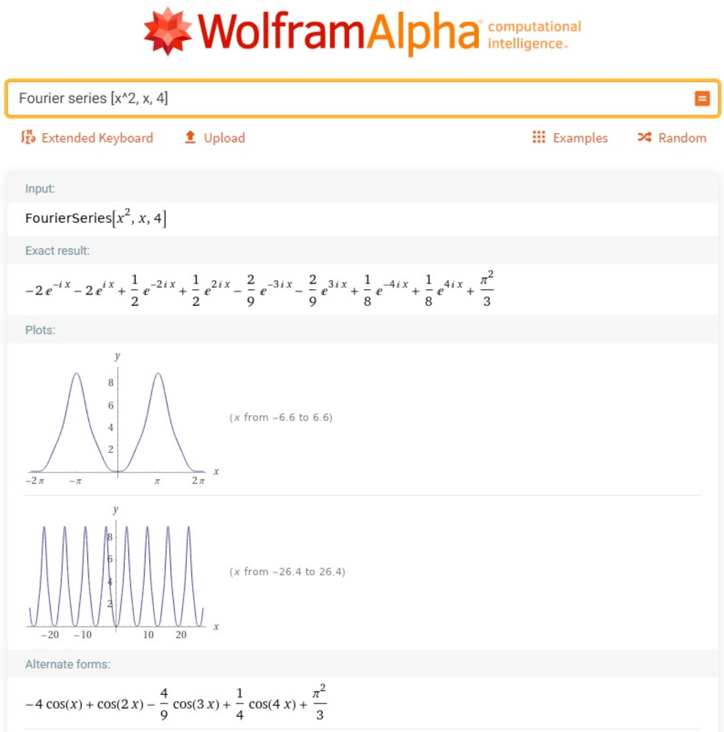

Рис. 1. Результат реализации разложения функции в ряд Фурье

Верхнюю часть рис. 1 занимает результат представления функции в виде комплексного ряда Фурье. Заметим, что согласно реализуемому запросу, инструментальное средство выводит члены разложения функции до четвертого номера включительно, при этом коэффициенты при сопряженных значениях степеней экспоненциальной функции одинаковые. В средней части рис. 1 содержится графическая интерпретация приближения рассматриваемой функции $y = x^2$ рядом Фурье. Так, в центральной части графика *кривая дает достаточно хорошее приближение параболы, заданной рассматриваемой функцией*. Нижняя часть рис. 1 отвечает альтернативным формам записи ряда Фурье, среди которых на первом месте представлена тригонометрическая форма. Таким образом, инструментальное средство *Wolfram Alpha* позволило в полной мере рассмотреть в виде ряда Фурье представление квадратичной функциональной зависимости. Как отмечается в публикации [15], такой вид зависимости часто встречается в практике решения технических задач и используется для анализа экономических ситуаций.

Важным прикладным аспектом теории рядов Фурье является *связь с возможностью аппроксимации функций*, рассматриваемых в процессе исследования технических и социально-экономических систем. Под аппроксимацией принято понимать специальный метод, позволяющий заменить сложные объекты другими, более простыми объектами и в рассматриваемом аспекте близкими к исходным. Для иллюстрации возможностей Фурье-аппроксимации в практике математической подготовки студента экономического университета целесообразно рассмотреть различные функциональные зависимости и получить соответствующие геометрические интерпретации. В рамках данной статьи рассмотрим некоторые из них. Для представления линейной функциональной зависимости в виде ряда Фурье будем использовать запрос *Fourier series* $[x, x, 4]$. Результат реализации данного запроса представим на рис. 2. Обратим внимание на аналогичное представление результата, однако центральная часть визуализации представляет собой приближение к прямой.

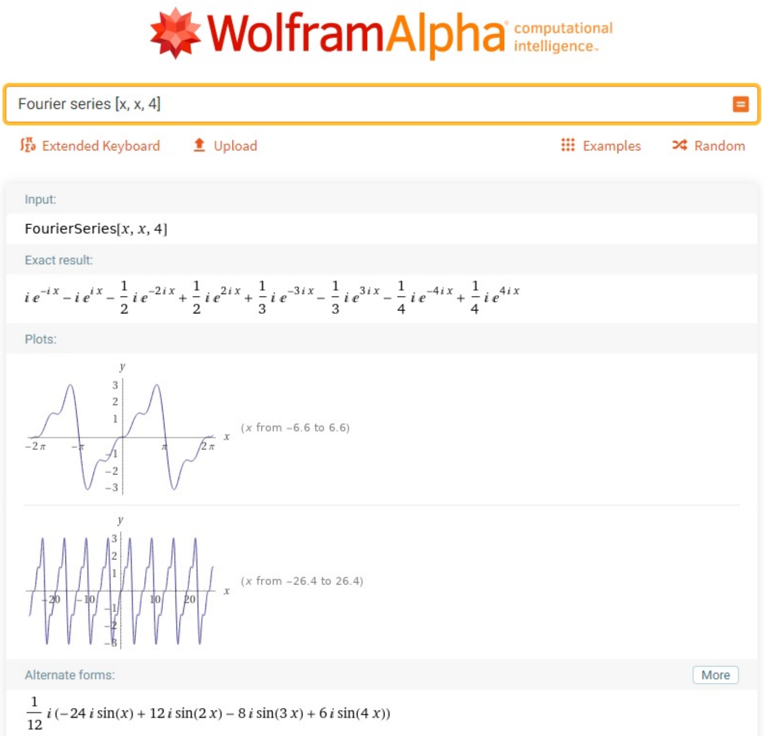

Рис. 2. Пример Фурье-аппроксимации линейной зависимости

Вторым важным приёмом работы с инструментальным средством *Wolfram Alpha* при изучении темы «Ряды Фурье» является запрос разложения функции в ряд Фурье без указания числа членов разложения. В таком случае запрос имеет вид *Fourier series* $[x^2, x, n]$ для квадратичной зависимости. Результат реализации запроса представим на рис. 3. На рис. 4 представим геометрический смысл первого члена разложения функции в ряд Фурье. Обратим внимание, что инструментальное средство *Wolfram Alpha* позволяет не только получать результат в аналитическом виде, но и визуализировать его.

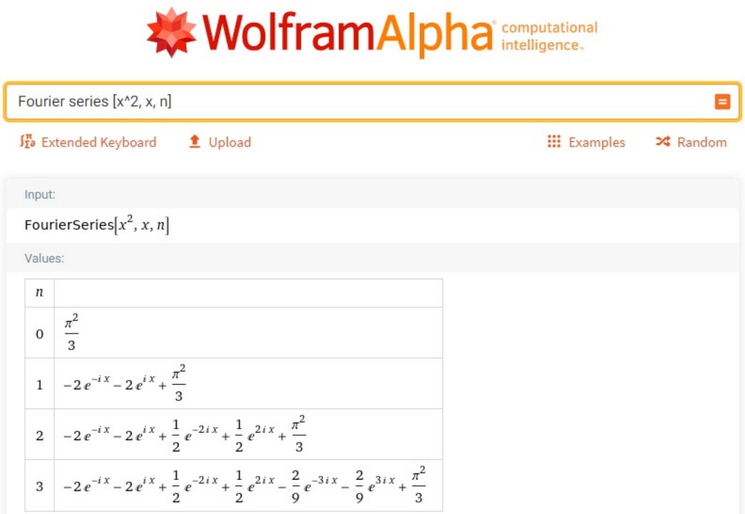

Рис. 3. Результат реализации запроса на вывод последовательности коэффициентов Фурье

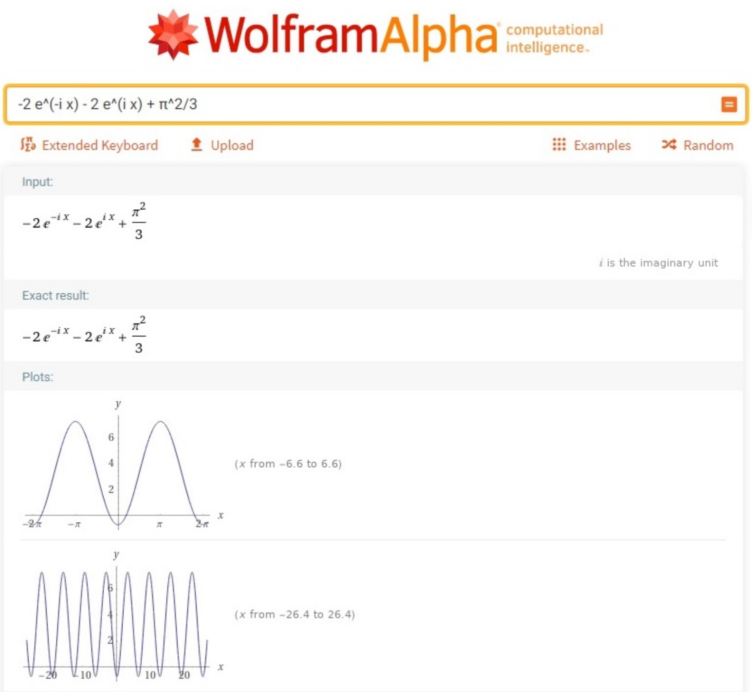

Рис. 4. Геометрический смысл первого члена разложения функции в ряд Фурье

При решении некоторых задач на использование разложения функции в ряд Фурье требуется *нахождение коэффициентов ряда Фурье*. При решении подобных задач следует рассмотреть третий прием работы с инструментальным средством *Wolfram Alpha*. Данной цели служит запрос *Fourier Coefficient*, сопровождающийся следующими параметрами: «Функция», «Аргумент», «Номер коэффициента». По этому запросу инструментальное средство позволяет определить и вывести на экран монитора нужный коэффициент разложения функции в ряд Фурье в комплексном виде. Так, на рис. 5 показан результат вывода шестого коэффициента ряда Фурье. Четвертый прием работы с инструментальным средством *Wolfram Alpha* позволяет получить выражение для коэффициента ряда Фурье в общем виде. С этой целью не следует указывать конкретный номер коэффициента в запросе.

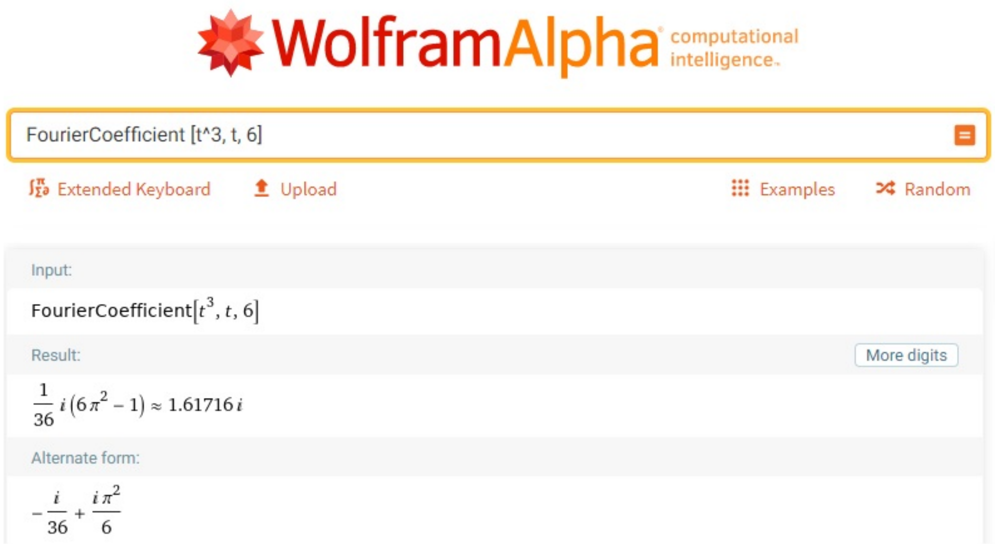

Рис. 5. Результат реализации запроса на вывод шестого коэффициента Фурье

Для рационального применения вышеуказанных приёмов работы с инструментальным средством *Wolfram Alpha* обратимся к методической логике учебной темы «Ряды Фурье», при этом каждому модулю поставим в соответствие необходимый приём.

Модуль 1. «*Понятие ряда Фурье*» – «Приём 1».

Модуль 2. «*Сходимость ряда Фурье и сумма ряда*» – «Приём 1», «Приём 2».

Модуль 3. «*Ряды Фурье для чётных и нечётных функций*» – «Приём 1», «Приём 2».

Модуль 4. «*Разложение в ряд Фурье непериодической функции*» – «Приём 1», «Приём 2».

Модуль 5. «*Ряды Фурье с периодом 2l*» – «Приём 1», «Приём 3».

Модуль 6. «*Применения теории Фурье*» – «Приём 1», «Приём 2», «Приём 3», «Приём 4».

Отметим, в рамках каждого из представленных модулей возможно применение инструментального средства *Wolfram Alpha*, однако число приёмов, рекомендованных к применению, различно.

Важной задачей по совершенствованию методики обучения теории рядов в высшей экономической школе является *расширение системы задач и упражнений*, включение в нее разноуровневых задач, в том числе приближенных к будущей профессиональной деятельности. В этом контексте необходимо отметить публикации [8, 9], в которых авторами представлены ориентиры для развития системы задач и упражнений по математическому анализу, при этом сами задачи и упражнения удачно структурированы по основным учебным темам, в том числе по теории рядов.

Учёт содержательно-методических особенностей учебной темы «Ряды Фурье» невозможен без выполнения повышенных требований к преподавателю математических дисциплин, в частности компетенций в *области отбора, структурирования и представления содержания обучения, методов и форм математической деятельности*, следующих из методологии педагогического процесса; компетенций в области *использования потенциала современных информационных и коммуникационных технологий* на всех этапах учебно-познавательной деятельности студентов по математическим дисциплинам, а также компетенций в области направленного *развития личностных и интеллектуальных качеств студентов*, востребованных в процессе реализации основных видов их будущей профессиональной деятельности. *Wolfram*-технологии, обладающие большим дидактическим потенциалом, могут быть использованы для совершенствования программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества, на необходимость которого указывается в публикации [6]. Кроме того, *Wolfram*-технологии как инструмент информатизации учебного процесса по математическим дисциплинам способствуют *реализации интегративного подхода* в обучении математическим и естественно-научным дисциплинам, основные идеи которого представлены в работе [5].

Таким образом, содержание учебной темы «Ряды Фурье» актуализирует задачу поиска путей планирования и проведения аудиторных занятий с учётом его специфики и особенностей направлений подготовки, внедрения новых технологий и средств информатизации учебного процесса, диагностики учебных достижений студентов, задачу оценки собственной педагогической деятельности с целью ее совершенствования и повышения квалификации.

Литература

1. *Власов Д. А., Синчуков А. В.* Стратегия развития методической системы математической подготовки бакалавров // Наука и школа. – 2012. – № 5. С. 61-65.

2. *Воробьев Н. Н.* Теория рядов. – Москва: Наука, 1979. – 408 с.

3. *Зададаев С. А.* Математика на языке R. – Москва: Прометей, 2018. – 324 с.

4. *Зубова И. К.* Теория рядов. Основные понятия в их историческом развитии: метод. указания. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. – 25 с.

5. *Калинина Е. С.* Интегративный подход в обучении математическим и естественнонаучным дисциплинам в ВУЗах МЧС России // Современное образование: содержание, технологии, качество. – 2018. – Т. 1. – С. 86-89.

6. *Карасев П. А., Чайковская Л. А.* Совершенствование программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2017. – Т. 3. – № 2. – С. 3-9.

7. *Лихачев Г. Г., Сухорукова И. В.* Компьютерное моделирование и математическое обеспечение экономико-социальных задач // Экономический анализ: теория и практика. 2003. № 5 (8). С. 60-62.

8. Математика для экономистов. Практикум: учебное пособие для академического бакалавриата / Под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2014. – 285 с.

9. Математика для экономистов. Теория и практика: учебник для академического бакалавриата / Под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва: Издательство Юрайт, 2014. – 598 с.

10. *Монахов В. М., Тихомиров С. А.* Эволюция методической системы электронного обучения // Ярославский педагогический вестник. – 2018. – № 6. – С. 76-88.

11. *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ. – Москва: Вербум-М, 2000 – 416 с.

12. *Муханов С. А., Муханова А. А., Нижников А. И.* Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы «Дифференциальные уравнения» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2018. – № 1 (43). – С. 72-77.

13. *Привалов И. И.* Ряды Фурье. – Москва: Либроком, 2016. – 166 с.

14. *Ситникова И. В., Хохлова М. В.* Методика применения индуктивно-дедуктивного метода при изучении признака сравнения положительных числовых рядов // Вестник гуманитарного образования. – 2017. – № 1. – С. 31-34.

15. *Фомин Г. П., Карасев П. А.* Математика в экономике: 813 задач с комментариями и ответами. – Москва: «КноРус», 2019. – 368 с.