Аналоги гиперболоидов в четырехмерном пространстве

Analogues of hyperboloids in four–dimensional space

Ваванов Д.А.
преподаватель кафедры начертательной геометрии и графики Московского государственного строительного университета
e–mail: kohinor51@yandex.ru

Vavanov D.A.
Lecturer at the Chair of Descriptive Geometry and Graphics, Moscow State University of Civil Engineering
e–mail: kohinor51@yandex.ru

Иващенко А.В.
доцент кафедры начертательной геометрии и графики Московского государственного строительного университета
e–mail: Ivashchenko_A@inbox.ru

Ivashchenko A.V.
Associate Professor at the Chair of Descriptive Geometry and Graphics, Moscow State University of Civil Engineering
e–mail: Ivashchenko_A@inbox.ru

Аннотация
В статье описаны некоторые варианты получения сечений четырехмерных гиперболоидов, их сечения гиперплоскостями и их взаимные пересечения.
Ключевые слова: четырехмерное пространство, гиперболоид, сечения.

Abstract
The article describes some options for obtaining sections of four–dimensional hyperboloids, their sections by hyperplanes, and their mutual intersections.
Keywords: four–dimensional space, hyperboloid, sections.

Многомерные поверхности в последнее время стали привлекать внимание исследователей благодаря возможностям компьютерных средств вычисления [1, 9]. Поверхности являются объектом изучения не только в аналитической и дифференциальной, но также и в начертательной геометрии, при этом активно используются компьютерные программы, методики и алгоритмы [10]. Существуют многочисленные способы конструирования поверхностей как трехмерных, так и многомерных [5, 11]. Обычный однополостной гиперболоид в трехмерном пространстве является линейчатой поверхностью, также как и его многомерные аналоги. Многие исследователи отмечали общие принципы задания линейчатых поверхностей [12].

Гиперболоиды в n-мерном аффинном пространстве – это разновидности коник n-мерного пространства, т.е. n-мерные многообразия второго порядка.

Рассмотрим аналоги гиперболоидов в пространствах разных размерностей.

В двумерном пространстве аналог гиперболоида – это гипербола. Асимптоты гиперболы – это пара пересекающихся прямых, которые, в свою очередь, можно рассматривать как вырожденную конику второго порядка.

В трехмерном пространстве гиперболоиды бывают однополостные и двуполостные, причем асимптотической поверхностью является конус – вырожденная поверхность второго порядка.

Теперь рассмотрим четырехмерное пространство с координатами x, y, z, w, в котором также можно написать уравнение коники. Известно, что в четырехмерном пространстве, как и в пространстве большего числа измерений имеются два аналога гиперболоидов – условно говоря, однополостной и двуполостной. Возникает задача представления четырехмерного объекта на плоских чертежах.

Подобные задачи решались разными способами, один из которых рассматривался Филипповым, разработавшим концепции начертательной геометрии четырехмерного пространства на основе изображения проекции четырехмерной точки вектором [13]. Но подход Филиппова не вполне нас устраивает, поскольку разные измерения изображаются по-разному (три – обычным способом, четвертое – длиной вектора). Кроме того, направление параллелизма векторов можно выбрать произвольно, и возникает дополнительная проблема выбора из всего множества представлений объекта наиболее подходящего для решаемой задачи.

Поэтому мы рассмотрим более традиционный подход. Любой четырехмерный объект имеет четыре проекции на ортогональные трехмерные гиперплоскости проекций, каждая из которых, в свою очередь, имеет свои двумерные проекции на три плоскости проекций. Всего имеется шесть плоскостей проекций и четыре координатные оси.

Большинство из этих шести плоскостей проекций связаны проекционными линиями связей, но не все. Так, например, плоскости *XY* и *XZ* имеют общую ось *OX*, а плоскости *XY* и *ZW* общей оси не имеют; поэтому изображения проекций четырехмерного объекта на таких парах плоскостей проекций не связаны линиями проекционных связей непосредственно, а только опосредованно, через остальные четыре из шести плоскостей проекций.

Поверхности (как трехмерные, так и многомерные), в конечном счете, представляются на плоском двумерном экране в виде множества кривых, в связи с чем особенно актуальными становятся исследования по алгоритмам высвечивания этих кривых [4, 6, 7]. Существуют не только аналитические, но и приближенные вычислительные способы построения кривых [8]. Вычислительным алгоритмам посвящен ряд исследований в области компьютерной начертательной геометрии [2].

Трехмерные проекции (точнее сказать, сечения) четырехмерного гиперболоида можно получить, отбрасывая в каждом конкретном случае соответствующую координату.

Рассмотрим четырехмерный гиперболоид, помещенный в начало координат, и сориентированный параллельно осям координат. Эта гиперповерхность определяется уравнением:

$$-x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + w^2/d^2 = 1$$

Его трехмерными проекциями будут трехмерные гиперболоиды (при обнулении координат *y, z, w*) и эллипсоид (при обнулении координаты *x*). Если мы захотим получить двумерные проекции четырехмерного гиперболоида на плоскости проекций, то в уравнении надо обнулять уже две из четырех координат. В трех из шести таких проекций мы получим в сечении эллипсы, и в трех остальных случаях – гиперболы. В зависимости от соотношения конкретных значений коэффициентов *a,b,c* и *d* можно получать либо окружности (как частный случай эллипса), либо равнобочную гиперболу (как частный случай неравнобочной гиперболы).

1. Пересечения четырехмерных гиперболоидов.

Два четырехмерных гиперболоида пересекаются по трехмерной поверхности четвертого порядка, лежащей в четырехмерном пространстве (четырехмерная гиперповерхность) и, подобно гиперболоиду, имеет как трехмерные, так и двумерные проекции, в общем случае не сводимые к простым поверхностям и кривым. Но в некоторых частных случаях, ограничив взаимное расположение двух гиперболоидов определенным, легко формализуемым образом, можно получать достаточно простые поверхности пересечения.

Если рассматривать пересечение не двух, а трех четырехмерных гиперболоидов, то в общем случае результатом будет одномерное многообразие, вложенное в четырехмерное пространство (четырехмерная кривая).

И, наконец, пересечение четырех четырехмерных гиперболоидов в общем случае дает 16 точек четырехмерного пространства.

Гиперплоскости сечений можно классифицировать на:

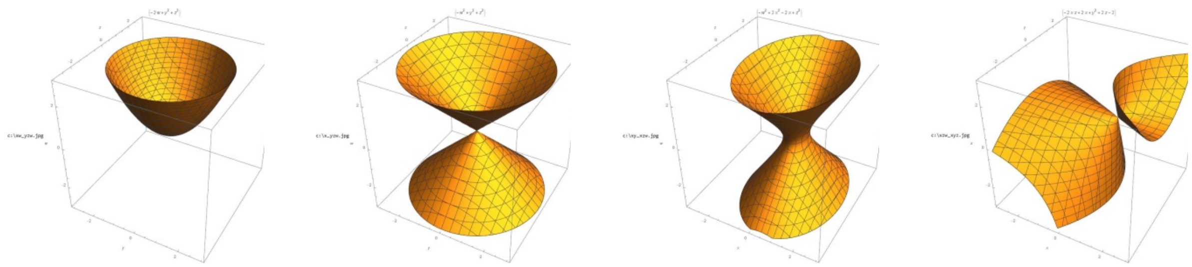
1) общего положения ($Ax + By + Cz + Dw + 1 = 0$);

2) проецирующие 1-го рода (т.е. параллельные только одной из координатных осей, например, $Ax + By + Cz + 1 = 0$ – параллельна оси*OW*);

3) проецирующие 2-го рода (т.е. параллельные одновременно двум из 4 координатных осей, например, $Ax + By + 1 = 0$ – параллельна осям *OZ* и *OW*, т.е. плоскости *OZW*);

4) гиперплоскости уровней (т.е. перпендикулярные какой-либо координатной оси или, что то же самое, параллельные трем из 4 координатных осей, например, $Ax + 1 = 0$ – параллельна осям *OY*, *OZ* и *OW*).

На рис. 1 показаны варианты трехмерных сечений четырехмерного аналога гиперболоида.



Эллиптический параболоид | Конус | Однополостной гиперболоид | Повернутый конус

Рис. 1. Трехмерные сечения четырехмерного аналога гиперболоида

При других значениях коэффициентов уравнения секущей гиперплоскости можно добиться, чтобы в сечении получались эллипсоид (в частном случае сфера) и двуполостной гиперболоид. Для решении многих задач геометрии часто используют различного рода преобразования исходных данных [2], и в нашем случае путем аффинных преобразований любой четырехмерный гиперболоид можно привести к стандартному виду (т.е. расположить его центр в начале координат и ориентировать одну из осей симметрии вдоль одной из координатных осей).

Вышеприведенные иллюстрации получены по соответствующей программе в программном комплексе *Wolfram Mathematica*, версия 11.1, хотя существуют и другие программы компьютерной алгебры, удобные для решения подобных задач (*MatLab*, *Maple* и т.п.).

Подобного рода исследования были включены в программу занятий кружка со студентами 1 курса институтов ИСА и ИГЭС в НИУ МГСУ. Студенты должны были познакомиться с принципами работы с четырехмерным пространством в его различных проекциях на примерах точек, отрезков, прямых, плоскостей, гиперплоскостей и гиперповерхностей второго порядка.

Вывод: Рассмотрение четырехмерных гиперболоидов как подмножества всех возможных четырехмерных многообразий второго порядка позволяет свести задачу поиска множества точек, принадлежащего одновременно нескольким таким многообразиям к более простым задачам поиска пересечения трехмерных объектов на комплексных чертежах Монжа; и такие задачи уже имеют алгоритмы решений. С другой стороны, относительная простота решения каждой подзадачи на своих проекциях «уравновешивается» многочисленностью этих подзадач – в отличие от трехмерного пространства нам нужно будет решать это не на трех, а на шести плоскостях проекций. Вручную это достаточно трудоемкий процесс, поэтому добиться результатов можно только за счет использования программных средств и алгоритмов компьютерной графики (в частности, можно использовать программный комплекс *Simplex*, разработанный профессором Волошиновым Д.В. (СПбГУТ)) [4].

Литература

1. *Бойков А.А.* О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе [Текст] /А.А.Бойков // Геометрия и графика. – 2018. – Т.6. – № 4.– С.54–71. – DOI:10.12737/article_5c21f96dce5de8.36096061.
2. *Бойков А.А.* К вопросу о методике использования алгоритмов при решении задач начертательной геометрии [Текст] / А.А.Бойков, А.А.Сидоров, А.М.Федотов // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 3.– С.56–68. – DOI:10.12737/article_5bc45add9a2b21.45929543.
3. *Боровиков И.Ф., Иванов Г.С., Суркова Н.Г.* О применении преобразований при решении задач начертательной геометрии [Текст] / И.Ф.Боровиков, Г.С.Иванов, Н.Г.Суркова // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 2.– С.78–84. – DOI:10.12737/article_5b55a35d683a33.30813949.
4. *Волошинов Д.В.* Единый конструкторский алгоритм построения фокусов кривых второго порядка [Текст] / Д.В.Волошинов // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 2.– С.47–54. – DOI:10.12737/article_5b559dc3551f95.26045830.
5. *Иванов Г.С.* Конструирование одномерных обводов, принадлежащих поверхностям, путем их отображения на плоскость [Текст] / Г.С.Иванов // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 1.– С.3–9. – DOI:10.12737/article_5ad07ed61bc114.52669586.
6. *Короткий В.А.* Графические алгоритмы построения квадрики, заданной девятью точками [Текст] / В.А.Короткий // Геометрия и графика. – 2019.–Т.7. – № 2.– С.3–12. – DOI:10.12737/article_5d2c1502670779.58031440.
7. *Короткий В.А.* Кривые второго порядка на экране компьютера [Текст] / В.А. Короткий, Е.А.Усманова // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 2.– С.101–113. – DOI:10.12737/article_5b55a829cee6c0.74112002.
8. *Конопацкий Е.В., Крысько А.А., Бумага А.И.* Вычислительные алгоритмы моделирования одномерных обводов через *k* наперед заданных точек [Текст] / Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, А.И. Бумага // Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 3.– С.20–32. – DOI:10.12737/article_5bc457ece18491.72807735.
9. *Левкин Ю.С.* Шестимерная эпюрная номограмма в четырехоктантовом измерении [Текст] / Ю.С.Левкин // Геометрия и графика. – 2018. –Т.6. – № 1. – С.39–47. – DOI:10.12737/article_5ad098b05f1559.36303938.
10. *Савельев Ю.А., Бабич Е.В.* Компьютерная методика изучения начертательной геометрии. Техническое задание [Текст] / Ю.А.Савельев, Е.В.Бабич // Геометрия и графика. – 2018. –Т.6. – № 1. – С.67–74. – DOI:10.12737/article_5ad09d62e8a792.47611365.
11. *Сальков Н.А.* Формирование поверхностей при кинетическом отображении [Текст] / Н.А.Сальков // Геометрия и графика. – 2018. –Т.6. – № 1. – С.20–33. – DOI:10.12737/article_5ad094a0380725.32164760.
12. *Сальков Н.А.* Общие принципы задания линейчатых поверхностей, часть 1 [Текст] / Н.А.Сальков// Геометрия и графика. – 2018.–Т.6. – № 4.– С.20–31. – DOI:10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078.
13. *Филиппов П.В.* Начертательная геометрия четырехмерного пространства и ее приложения. – Москва, 1979. – 280 с.