

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОКОЛОПЛАНЕТНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ОСНОВАННАЯ НА МГД-РАСЧЕТАХ

## ANALYTICAL MODEL OF THE PLANETARY BOW SHOCK FOR VARIOUS MAGNETIC FIELD DIRECTIONS BASED ON MHD CALCULATIONS

**Г.А. Котова**

*Институт космических исследований РАН,  
Москва, Россия, kotova@iki.rssi.ru, gala5486@mail.ru*

**М.И. Веригин<sup>†</sup>**

*Институт космических исследований РАН,  
Москва, Россия*

**Т. Гомбоши**

*Университет Мичигана,  
Эн Арбор, Мичиган, США, tamas@umich.edu*

**К. Кабин**

*Королевский военный колледж Канады,  
Кингстон, Онтарио, Канада, Konstantin.Kabin@rmc.ca*

**G.A. Kotova**

*Space Research Institute RAS,  
Moscow, Russia, kotova@iki.rssi.ru, gala5486@mail.ru*

**M.I. Verigin<sup>†</sup>**

*Space Research Institute RAS,  
Moscow, Russia*

**T. Gombosi**

*University of Michigan,  
Ann Arbor, Michigan, United States, tamas@umich.edu*

**K. Kabin**

*Royal Military College of Canada,  
Kingston, Ontario, Canada, Konstantin.Kabin@rmc.ca*

**Аннотация.** Для исследования физических процессов в плазме вблизи планет часто требуется знание положения и формы околопланетной ударной волны. Обычно используются эмпирические модели, поскольку теоретические магнитогидродинамические (МГД) и кинетические модели требуют слишком большого компьютерного времени и их невозможно применять для отслеживания быстропротекающих процессов. М.И. Веригин предложил полуэмпирический подход, основанный на применении точных теоретических выражений с небольшим числом параметров, имеющих ясный физический смысл. Эти параметры оцениваются при аппроксимации экспериментальных данных или результатов подробных МГД-расчетов. Ранее удалось построить такую модель ударной волны около препятствия произвольной формы в случае газодинамического течения. Эта модель может быть использована при любых звуковых числах Маха и больших значениях альфвеновского числа Маха. Кроме того, был рассчитан аналитически в МГД-приближении асимптотический конус Маха — угол наклона ударной волны на бесконечном удалении от планеты. В настоящей работе предлагается модель отошедшей ударной волны для любого направления магнитного поля по отношению к скорости набегающего потока и для любых чисел Маха. Параметрами модели являются расстояние носовой точки ударной волны от препятствия, радиус кривизны и затупленность ударной волны в носовой точке, параметр перехода к асимптотическому направлению ударной волны и угол скошенности носовой части ударной волны относительно направления набегающего потока.

**Ключевые слова:** солнечный ветер, межпланетное магнитное поле, околопланетная ударная волна, конус Маха.

**Abstract.** Study of physical processes in plasma near planets often requires knowledge of the position and shape of the planetary bow shock. Empirical models are usually used since theoretical MHD and kinetic models consume too much computer time and cannot be used to track fast processes. M.I. Verigin proposed a semi-empirical approach based on the use of exact theoretical expressions with a small number of parameters, which have a clear physical meaning. These parameters are estimated by fitting experimental data or detailed MHD calculations. A model of the bow shock near an arbitrary-shaped obstacle has previously been developed for a gas-dynamic flow. This model can be applied to any sonic Mach numbers and large values of the Alfvén Mach number. In addition, the asymptotic Mach cone — the angle of inclination of the shock wave at an infinite distance from the planet — has been calculated analytically in the MHD approximation. In this paper, we propose a model of the bow shock for any direction of the magnetic field with respect to the upcoming flow and for any Mach numbers. Parameters of the model are the distance of the nose point from the obstacle, radius of curvature and bluntness of the bow shock at the nose point, a parameter related to the transition to the asymptotic downstream slope of the shock, and a skewing angle appearing when the interplanetary magnetic field is directed at an angle to the solar wind velocity.

**Keywords:** solar wind, interplanetary magnetic field, planetary bow shock, Mach cone.

## ВВЕДЕНИЕ

Поскольку подробные магнитогидродинамические (МГД) или кинетические расчеты положения и формы околопланетных ударных волн (УВ) трудоемки, требуют значительного времени и поэтому не позволяют отслеживать перемещение УВ в реальном времени, обычно в исследованиях используются эмпирические модели [Fairfield, 1971; Formisano, 1979; Slavin, Holzer, 1981; Němeček, Šafránková, 1991; Peredo et al., 1995; Fairfield et al., 2001; Chapman, Cairns, 2003; Jelínek et al., 2012; Meziane et al., 2014]. Однако такие модели применимы в области параметров солнечного ветра, использовавшихся при их построении, и ограничены в пространстве областью, в которой проводились измерения. М.И. Веригин разработал метод физического аналитического моделирования, в котором используются теоретические выражения с небольшим числом свободных параметров [Веригин и др., 1999; Verigin et al., 1997, 2001a, b, 2003a, b; Веригин, 2004; Kotova et al., 2005]. Параметры определяются из сравнения с экспериментальными данными или численными решениями. Построенные аналитические модели легко применимы для описания различных явлений в околопланетном пространстве при любых условиях в солнечном ветре.

Аналитическая модель УВ в случае препятствий различной формы в газодинамическом (ГД) приближении представлена в работе [Verigin et al., 2003a]. На основе этой модели с использованием точного аналитического решения для угла наклона УВ на бесконечности к направлению невозмущенного солнечного ветра [Verigin et al., 2003b] строится модель УВ в МГД-приближении.

## СИСТЕМА КООРДИНАТ И УГОЛ СКОШЕННОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для описания УВ используется геоцентрическая система координат GIPM (Geocentric InterPlanetary Medium). В этой системе координат ось X противоположна направлению невозмущенного солнечного ветра. Ось Y направлена так, что вектор межпланетного магнитного поля (ММП) лежит во втором — четвертом квадрантах плоскости XY. Ось Z дополняет систему координат до правой [Bieber, Stone, 1979]. Для моделирования ударной волны, образующейся в сверхзвуковом сверхальфвеновском потоке набегающей плазмы около препятствий различной формы, использовались подробные магнитогидродинамические расчеты, выполненные в Мичиганском университете. Расчеты проводились для препятствий двух видов: полусферы с вытянутым цилиндрическим хвостом и параболоида вращения. Все расчеты проводились в единицах расстояния до магнитопаузы  $r_0$ .

В газодинамическом (ГД) приближении при обтекании осесимметричного препятствия потоком газа (плазмы), направленным вдоль его оси, форма УВ осесимметрична. Присутствие же ММП в потоке солнечного ветра приводит к дополнительному

(по сравнению с абберацией из-за орбитального движения планеты) отклонению носовой части УВ от оси X в плоскости XY системы координат GIPM. Если определить нос МГД ударной волны как ту ее точку, за которой плазма за УВ течет по нормали к фронту, условия Рэнкина—Гюгони позволяют получить соотношение для угла отклонения потока плазмы в носовой точке  $\alpha_{vn}$  [Веригин, 2004]. Этот угол между направлением набегающего потока и нормалью к поверхности ударной волны в носовой точке будем называть углом скошенности ударной волны:

$$\operatorname{tg} \alpha_{vn} = \frac{(1 - \varepsilon) \sin 2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn})}{2(\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} - \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — величина обратная скачку плотности газа на фронте УВ. В случае магнитной газодинамики  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, M_A, M_S, \alpha_{vn}, \vartheta_{bn})$ , где  $\alpha_{vn}$  и  $\vartheta_{bn}$  — углы между нормалью к УВ и направлением потока плазмы или магнитного поля соответственно. Кубическое уравнение для определения  $\varepsilon$  получено в работе [Petrinec, Russell, 1997, уравнение (12)]. Угол отклонения (скошенности) зависит от угла  $\vartheta_{bv}$  между направлениями ММП и потока солнечного ветра, альфвеновского  $M_A$  и звукового  $M_S$  чисел Маха. Эффект исчезает для течений с магнитным полем, параллельным или перпендикулярным потоку. Для типичных условий в околоземном солнечном ветре угол отклонения потока составляет  $\sim 5^\circ$  и может достигать  $20^\circ$ – $30^\circ$  при малых  $M_A$ .

## МЕТОДИКА АППРОКСИМАЦИИ ОКОЛОПЛАНЕТНОЙ УВ АНАЛИТИЧЕСКИМ ВЫРАЖЕНИЕМ

При построении аналитической модели околопланетной УВ для случаев, когда ММП параллельно или перпендикулярно набегающему потоку плазмы, Котова и др. [2020] использовали следующее выражение для описания ее формы и положения:

$$\rho^2(x) = 2R_s(r_s - x) + \operatorname{tg}^2 \omega_{as} (r_s - x)^2 \left( 1 + \frac{\frac{b_s}{R_s} - 1}{1 + d_s \frac{r_s - x}{R_s}} \right), \quad (2)$$

где  $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$ ;  $r_s$  — расстояние до УВ в подсолнечной (носовой) точке;  $R_s$  — радиус кривизны;  $b_s$  — затупленность УВ в носовой точке;  $\omega_{as}$  — асимптотический наклон УВ, определяющий асимптотическое число Маха  $M_{as} = 1/\sin^2 \omega_{as}$ . Затупленность — безразмерный параметр, характеризующий форму УВ. Носовая часть УВ близка по форме к сплюснутому эллипсоиду при  $b_s < -1$  и к вытянутому эллипсоиду при  $-1 < b_s < 0$ , является сферической при  $b_s = -1$ , параболической при  $b_s = 0$  и гиперболической при  $b_s > 0$ . Параметр  $d_s$  характеризует переход от доминирования параметров подсолнечной области УВ к доминированию параметров области, где основную роль играет асимптотический наклон УВ. При произвольном направлении ММП форма УВ имеет

единственную симметрию относительно плоскости XY, содержащей векторы ММП и скорости набегающего потока, и параметры выражения (2), кроме  $r_s$ , зависят от часового угла  $\varphi$ . В таком общем случае УВ нужно рассматривать в системе координат, в которой оси  $X_s$  и  $Y_s$  повернуты на угол  $\alpha_{vn}$  от осей  $X_{GIPM}$  и  $Y_{GIPM}$  по часовой стрелке. В этой повернутой на угол скошенности системе координат также удастся получить точное аналитическое решение МГД-уравнений для  $\omega_{as}$  при произвольном угле  $\vartheta_{bv}$  [Verigin et al., 2003b], а для аппроксимации УВ по-прежнему можно использовать выражение (2).

В случае когда вектор магнитного поля перпендикулярен вектору скорости потока, для радиуса кривизны и затупленности использовались выражения [Котова и др., 2020]:

$$R_s(\varphi) = \frac{R_{sy} R_{sz}}{R_{sy} \sin^2 \varphi + R_{sz} \cos^2 \varphi}, \quad (3)$$

$$b_s(\varphi) = b_{sz} \sin^2 \varphi + b_{sy} \cos^2 \varphi,$$

где  $R_{sy}$ ,  $R_{sz}$  — радиусы кривизны, а  $b_{sy}$ ,  $b_{sz}$  — затупленности в подсолнечной точке поверхности ударной волны в плоскостях XY, т. е. при  $\varphi=0^\circ$ , и XZ, т. е. при  $\varphi=90^\circ$ , соответственно. Будем использовать эти выражения и для произвольного направления ММП. Параметр  $d_s$  пока будем считать не зависящим от  $\varphi$ .

Итак, для аппроксимации поверхности УВ выражением (2) нужно подобрать семь параметров:  $\alpha_{vn}$ ,  $r_s$ ,  $R_{sy}$ ,  $R_{sz}$ ,  $b_{sy}$ ,  $b_{sz}$ ,  $d_s$ .

На рис. 1 показан пример аппроксимации рассчитанной в МГД-приближении УВ около сферически-цилиндрического препятствия. Параметры аппроксимации:  $\alpha_{vn}=4.0^\circ$ ,  $r_s=1.33$ ,  $R_{sy}=1.79$ ,  $R_{sz}=1.82$ ,  $b_{sy}=-0.33$ ,  $b_{sz}=-0.14$ ,  $d_s=1.05$ . Видно хорошее согласие аналитической аппроксимации с МГД-расчетами.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МГД-АППРОКСИМАЦИИ УВ ПО ГД-РАСЧЕТАМ

Для того чтобы найти общие выражения для параметров аппроксимации, будем использовать газодинамическую аналитическую модель УВ, которая весьма точно описывает ее положение около препятствий различной формы [Verigin et al., 2003a]. Формулы для расчета ГД-параметров приведены в приложении 1. В работе [Котова и др., 2020] получены формулы для пересчета ГД-параметров в МГД для течений с магнитным полем, параллельным или перпендикулярным потоку плазмы. В эти формулы входит дополнительный фактор  $\Gamma$ , возникающий при рассмотрении расширения центральной трубки тока за УВ для МГД-течения по сравнению с ГД-течением. В случае ГД-течения относительный темп расширения центральной трубки тока описывается следующим уравнением:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = -\frac{2}{R_s} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\rho V} \frac{d(\rho V)}{dx}.$$

Для МГД-течения это выражение можно записать таким образом:

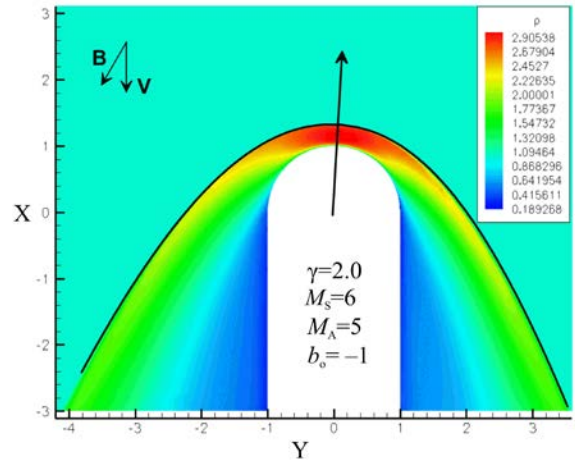


Рис. 1. Положение и форма УВ (в плоскости  $X_{GIPM}Y_{GIPM}$ ), образующейся в набегающем потоке солнечного ветра с магнитным полем, направленным под углом  $30^\circ$  к скорости потока. Утолщенная линия — аппроксимация с помощью (2). Длинной стрелкой показано направление нормали к УВ в носовой точке

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = -\frac{R_{sy} + R_{sz}}{R_{sy} R_{sz}} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\Gamma},$$

где  $\Gamma = \Gamma(\varepsilon, \gamma, M_A, M_S, \vartheta_{bv}, \alpha_{vn})$ ;  $\gamma$  — показатель политропы (см. приложение 2). При расчете МГД-параметров  $r_s$ ,  $R_s$ ,  $b_s$  за основу берем те же формулы из [Verigin et al., 2003a], но с рассчитанным в МГД-приближении параметром сжатия  $\varepsilon$  и с заменой  $\varepsilon^* = \varepsilon/(\varepsilon-1)$  на  $\varepsilon^* \Gamma$  и  $M_s$  на  $M_{as} = (1 + 1/\text{tg}^2 \omega)^{1/2}$ .

Рисунок 2, а демонстрирует, что при любом направлении магнитного поля для определения расстояния до носовой точки УВ  $r_{s \text{ norm}}$  можно использовать формулу, полученную в работе [Котова и др., 2020]:

$$r_{s \text{ norm}} - r_o = \Gamma^{2/3} \times$$

$$\times (r_{s \text{ GD}} ((\Gamma \varepsilon / (1-\varepsilon), \gamma, R_o, b_o) - r_o) \chi(\vartheta_{bv})),$$

$$\chi(\vartheta_{bv}) = 1 + 0.37 \sin \vartheta_{bv},$$

где  $R_o$  — радиус кривизны;  $b_o$  — затупленность препятствия в подсолнечной точке,  $r_{s \text{ GD}}$  — расстояние до носовой точки УВ, рассчитанное в ГД-приближении с заменой  $\varepsilon^*$  на  $\Gamma \varepsilon^*$  [Verigin et al., 2003a]. Аналогично формулы для радиусов кривизны поверхности УВ вблизи носовой точки совпадают с теми, которые были получены ранее для частных случаев направлений ММП:

$$R_{sy \text{ norm}} = \Gamma^{-2/3} R_{s \text{ GD}} (\varepsilon \Gamma, \gamma, R_o, b_o) (M_{asy} / M_{asz})^{1/2},$$

$$R_{sz} = R_{sy} \Gamma^{\sin \vartheta_{bv} / 2},$$

где асимптотические числа Маха в направлениях  $y$  и  $z$ :

$$M_{asy}^2 = \frac{1}{\text{tg}^2(\omega_y)} + 1,$$

$$M_{asz}^2 = \frac{1}{\text{tg}^2(\omega_z)} + 1.$$

Для пересчета ГД-параметров  $b_s$  и  $d_s$  в соответствующие МГД-параметры пока получены только предварительные соотношения.

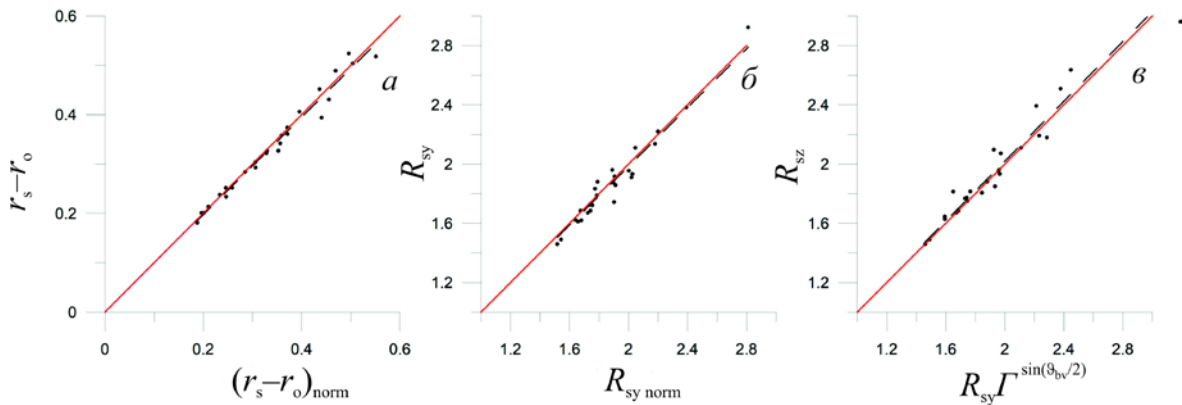


Рис. 2. Сравнение параметров модели ударной волны (2), аппроксимирующей результаты МГД-расчетов, с параметрами ГД-модели (приложение 1)

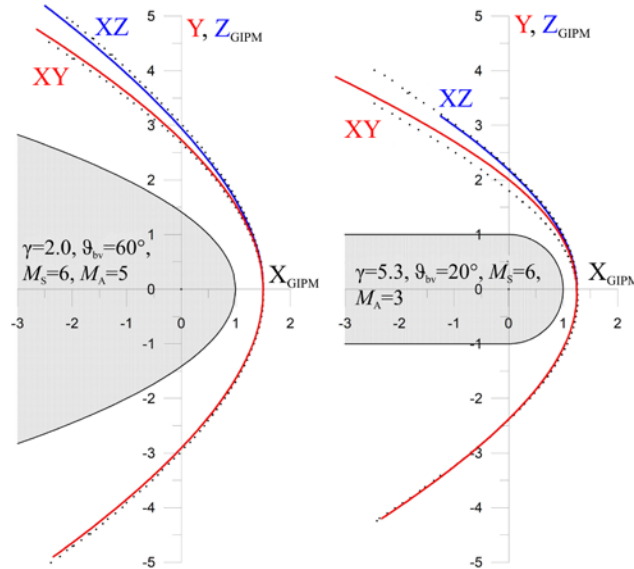


Рис. 3. Положение и форма УВ, образующейся около двух различных препятствий в плоскостях XY и XZ: точки — МГД-расчет; сплошные линии — аппроксимация (2) с параметрами, пересчитанными по ГД-формулам

На рис. 3 показаны два примера положения и формы ударной волны, определенных с помощью перенормированных ГД-формул ( $b_s$  и  $d_s$  пересчитывались по формулам для случая магнитного поля, перпендикулярного направлению потока плазмы [Котова и др., 2020]).

### ВЫВОДЫ

Присутствие межпланетного магнитного поля в потоке солнечного ветра приводит к дополнительному отклонению носовой части ударной волны от аберрированной оси X в плоскости  $X_{GIPM}Y_{GIPM}$  системы координат GIPM. Показано, что для любого направления вектора магнитного поля относительно вектора скорости потока плазмы поверхность околопланетной ударной волны можно аппроксимировать аналитической функцией с помощью четырех-семи свободных параметров, имеющих ясный физический смысл: расстояния до носовой точки, радиусов кривизны и затупленности в носовой точке в плоскостях XY и XZ, параметра перехода к асимптотическому углу наклона и угла скошенности. Параметры можно пересчитать в газодинамическом приближении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Веригин М.И. Положение и форма околопланетных ударных волн: газодинамические и МГД-аспекты // Солнечно-земные связи и электромагнитные предвестники землетрясений: сб. докладов III Международной конференции. 16–21 августа 2004 г., ИКИР ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский. 2004. С. 49–69.

Веригин М.И., Котова Г.А., Ремизов А.П. и др. Форма и положение околопланетных ударных волн // Космич. исслед. 1999. Т. 37, № 1. С. 38–43.

Котова Г.А., Веригин М.И., Гомбоши Т. и др. Аналитическое описание околопланетной ударной волны на основе ГД- и МГД-моделирования для магнитного поля параллельного и перпендикулярного потоку плазмы // Геомагнетизм и аэронавигация. 2020. Т. 60. С. 164–172. DOI: [10.31857/S0016794020020078](https://doi.org/10.31857/S0016794020020078).

Bieber J.W., Stone E.C. Energetic electron bursts in the magnetopause electron layer and in interplanetary space / Magnetospheric Boundary Layers — A Sydney Chapman Conference / ESA SP-148. 1979. P.131.

Chapman J.F., Cairns I.H. Three-dimensional modeling of Earth’s bow shock: Shock shape as a function of Alfvén Mach number // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, iss. A05, 1174. DOI: [10.1029/2002JA009569](https://doi.org/10.1029/2002JA009569).

Fairfield D.H. Average and unusual locations of the Earth’s magnetopause and bow shock // J. Geophys. Res. 1971. V. 76, N 28. P. 6700–6716.

Fairfield D.H., Cairns I.H., Desch M.D., et al. The location of low Mach number bow shocks at Earth // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106, N A11. P. 25361–25376. DOI: [10.1029/2000JA000252](https://doi.org/10.1029/2000JA000252).

Formisano V. Orientation and shape of the Earth's bow shock in three dimensions // *Planet. Space Sci.* 1979. V. 27. P. 1151.

Jelínek K., Němeček Z., Šafránková J. A new approach to magnetopause and bow shock modeling based on automated region identification // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117, A05208. DOI: [10.1029/2011JA017252](https://doi.org/10.1029/2011JA017252).

Kotova G., Verigin M., Zastenker G., et al. Bow shock observations by Prognoz–Prognoz 11 data: analysis and model comparison // *Adv. Space Res.* 2005. V. 36. P. 1958–1963. DOI: [10.1016/j.asr.2004.09.007](https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.09.007).

Meziane K., Alrefay T.Y., Hamza A. On the shape and motion of the earth's bow shock // *Planet. Space Sci.* 2014. V. 93–94. P. 1–9. DOI: [10.1016/j.pss.2014.01.006](https://doi.org/10.1016/j.pss.2014.01.006).

Němeček Z., Šafránková J. The Earth's bow shock and magnetopause position as a result of solar wind-magnetosphere interaction // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1991. V. 53, iss. 11–12. P. 1049–1054. DOI: [10.1016/0021-9169\(91\)90051-8](https://doi.org/10.1016/0021-9169(91)90051-8).

Peredo M., Slavin J.A., Mazur E., Curtis S.A. Three-dimensional position and shape of the bow shock and their variation with Alfvénic, sonic and magnetosonic Mach numbers and interplanetary magnetic field orientation // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, N A5. P. 7907–7916. DOI: [10.1029/94JA02545](https://doi.org/10.1029/94JA02545).

Petrinec S.M., Russell C.T. Hydrodynamic and MHD equations across the bow shock and along the surfaces of planetary obstacles // *Space Sci. Rev.* 1997. V. 79. P. 757–791. DOI: [10.1023/A:1004938724300](https://doi.org/10.1023/A:1004938724300).

Slavin J.A., Holzer R.E. Solar wind flow about the terrestrial planets. 1. Modeling bow shock position and shape // *J. Geophys. Res.* 1981. V. 86, N A13. P. 11401–11418.

Verigin M.I., Kotova G.A., Remizov A.P., et al. Studies of the Martian bow shock response to the variation of the magnetosphere dimensions according to TAUS and MAGMA measurements aboard the Phobos 2 orbiter // *Adv. Space Res.* 1997. V. 20, N 2. P. 155–158. DOI: [10.1016/S0273-1177\(97\)00526-7](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(97)00526-7).

Verigin M., Kotova G., Szabo A., et al. WIND observations of the terrestrial bow shock 3-D shape and motion // *Earth, Planets and Space*. 2001a. V. 53, N 10. P. 1001–1009. DOI: [10.1186/BF03351697](https://doi.org/10.1186/BF03351697).

Verigin M.I., Kotova G.A., Slavin J., et al. Analysis of the 3-D shape of the terrestrial bow shock by Interball/Magion 4 observations // *Adv. Space Res.* 2001b. V. 28, N 6. P. 857–862. DOI: [10.1016/S0273-1177\(01\)00502-6](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00502-6).

Verigin M., Slavin J., Szabo A., et al. Planetary bow shocks: Gasdynamic analytic approach // *J. Geophys. Res.* 2003a. V. 108, iss. A08, 1323. DOI: [10.1029/2002JA009711](https://doi.org/10.1029/2002JA009711).

Verigin M., Slavin J., Szabo A., et al. Planetary bow shocks: Asymptotic MHD Mach cones // *Earth, Planets and Space*. 2003b. V. 55. P. 33–38. DOI: [10.1186/BF03352460](https://doi.org/10.1186/BF03352460).

## REFERENCES

Bieber J.W., Stone E.C. Energetic electron bursts in the magnetopause electron layer and in interplanetary space / *Magnetospheric Boundary Layers — A Sydney Chapman Conference / ESA SP-148*. 1979, p. 131.

Chapman J.F., Cairns I.H. Three-dimensional modeling of Earth's bow shock: Shock shape as a function of Alfvén Mach number. *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108, iss. A05, 1174. DOI: [10.1029/2002JA009569](https://doi.org/10.1029/2002JA009569).

Fairfield D.H. Average and unusual locations of the Earth's magnetopause and bow shock. *J. Geophys. Res.* 1971, vol. 76, no. 28, pp. 6700–6716.

Fairfield D.H., Cairns I.H., Desch M.D., Szabo A., Lazarus A.J., Aellig M.R. The location of low Mach number bow shocks at Earth. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, no. A11, pp. 25361–25376. DOI: [10.1029/2000JA000252](https://doi.org/10.1029/2000JA000252).

Formisano V. Orientation and shape of the Earth's bow shock in three dimensions. *Planet. Space Sci.* 1979, vol. 27, p. 1151.

Jelínek K., Němeček Z., Šafránková J. A new approach to magnetopause and bow shock modeling based on automated

region identification. *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117, A05208. DOI: [10.1029/2011JA017252](https://doi.org/10.1029/2011JA017252).

Kotova G., Verigin M., Zastenker G., Nikolaeva N., Smolkin B., Slavin J., Szabo A., Merka J., Nemeček Z., Safrankova J. Bow shock observations by Prognoz–Prognoz 11 data: analysis and model comparison. *Adv. Space Res.* 2005, vol. 36, pp. 1958–1963. DOI: [10.1016/j.asr.2004.09.007](https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.09.007).

Kotova G., Verigin M., Gombosi T., Kabin K., Bezrukih V.V. Analytical description of the near planetary bow shock based on gas-dynamic and magneto-gas-dynamic modeling for the magnetic field parallel and perpendicular to the plasma flow. *Geomagnetism and Aeronomy*. 2020, vol. 60, pp. 162–170. DOI: [10.1134/S0016793220020073](https://doi.org/10.1134/S0016793220020073).

Meziane K., Alrefay T.Y., Hamza A. On the shape and motion of the earth's bow shock. *Planet. Space Sci.* 2014, vol. 93–94, pp. 1–9. DOI: [10.1016/j.pss.2014.01.006](https://doi.org/10.1016/j.pss.2014.01.006).

Němeček Z., Šafránková J. The Earth's bow shock and magnetopause position as a result of solar wind-magnetosphere interaction. *J. Atmos. Terr. Phys.* 1991, vol. 53, iss. 11–12, pp. 1049–1054. DOI: [10.1016/0021-9169\(91\)90051-8](https://doi.org/10.1016/0021-9169(91)90051-8).

Peredo M., Slavin J.A., Mazur E., Curtis S.A. Three-dimensional position and shape of the bow shock and their variation with Alfvénic, sonic and magnetosonic Mach numbers and interplanetary magnetic field orientation. *J. Geophys. Res.* 1995, vol. 100, no. A5, pp. 7907–7916. DOI: [10.1029/94JA02545](https://doi.org/10.1029/94JA02545).

Petrinec S.M., Russell C.T. Hydrodynamic and MHD equations across the bow shock and along the surfaces of planetary obstacles. *Space Sci. Rev.* 1997, vol. 79, pp. 757–791. DOI: [10.1023/A:1004938724300](https://doi.org/10.1023/A:1004938724300).

Slavin J.A., Holzer R.E. Solar wind flow about the terrestrial planets. 1. Modeling bow shock position and shape. *J. Geophys. Res.* 1981, vol. 86, no. A13, pp. 11401–11418.

Verigin M.I. Location and shape of near-planetary bow shocks: gas-dynamical and MHD aspects. *Solnechno-zemnye svyazki i elektromagnitnye predvestniki zemletryasenii: sbornik dokladov III Mezhunarodnoi konferentsii [Solar-Terrestrial and Electromagnetic Precursors of Earthquakes. Proceedings of the International Conference, 16–21 August 2004, Petropavlovsk-Kamchatskii]*. 2004, pp. 49–69. (In Russian).

Verigin M.I., Kotova G.A., Remizov A.P., Shutte N.M., Schwingschuh K., Riedler W., Zhang T.L., Rosenbauer H., Szegő K., Tatrallyay M., Styazhkin V. Studies of the Martian bow shock response to the variation of the magnetosphere dimensions according to TAUS and MAGMA measurements aboard the Phobos 2 orbiter. *Adv. Space Res.* 1997, vol. 20, no. 2, pp. 155–158. DOI: [10.1016/S0273-1177\(97\)00526-7](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(97)00526-7).

Verigin M.I., Kotova G.A., Remizov A.P., et al. Shape and location of planetary bow shocks. *Cosmic Res.* 1999, vol. 37, no. 1, pp. 34–39.

Verigin M., Kotova G., Szabo A., Slavin J., Gombosi T., Kabin K., Shugaev F., Kalinchenko A. Wind observations of the terrestrial bow shock 3-D shape and motion. *Earth, Planets and Space*. 2001a, vol. 53, no. 10, pp. 1001–1009. DOI: [10.1186/BF03351697](https://doi.org/10.1186/BF03351697).

Verigin M.I., Kotova G.A., Slavin J., Szabo A., Kessel M., Safrankova J., Nemeček Z., Gombosi T.I., Kabin K., Shugaev F., Kalinchenko A. Analysis of the 3-D shape of the terrestrial bow shock by Interball/Magion 4 observations. *Adv. Space Res.* 2001b, vol. 28, no. 6, pp. 857–862. DOI: [10.1016/S0273-1177\(01\)00502-6](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00502-6).

Verigin M., Slavin J., Szabo A., Gombosi T., Kotova G., Plochova O., Szegő K., Tatrallyay M., Kabin K., Shugaev F. Planetary bow shocks: Gasdynamic analytic approach. *J. Geophys. Res.* 2003a. V. 108, iss. A08, 1323. DOI: [10.1029/2002JA009711](https://doi.org/10.1029/2002JA009711).

Verigin M., Slavin J., Szabo A., Kotova G., Gombosi T. Planetary bow shocks: Asymptotic MHD Mach cones. *Earth, Planets and Space*. 2003b, vol. 55, pp. 33–38. DOI: [10.1186/BF03352460](https://doi.org/10.1186/BF03352460).

Как цитировать эту статью:

Котова Г.А., Веригин М.И., Гомбоши Т., Кабин К. Аналитическая модель околопланетной ударной волны для различных направлений магнитного поля, основанная на МГД-расчетах. *Солнечно-земная физика*. 2020. Т. 6, № 4. С. 51–58. DOI: [10.12737/szf-64202007](https://doi.org/10.12737/szf-64202007).

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

**Формулы для расчета положения и формы околопланетной ударной волны  
в ГД-приближении**

Выражения (34)–(38) и (39)–(43) из работы [Verigin et al., 2003a] (в выражении (36) имеется опечатка, исправленная в обзоре Веригина (2004), перед вторым слагаемым должен быть знак «+», а не «-»).

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

$$\xi = \varepsilon^* + \frac{\gamma+1}{50} \left( \varepsilon^* - \frac{\gamma-1}{2} \right),$$

$$r_s = r_o + \frac{1.229c(b_o)R_o\xi^{2/3}}{\left(1 + \frac{\gamma+1}{50}\right)^{2/3}(\gamma+1)^{1/3}} \left( 1 - \frac{b(b_o, \gamma)}{\xi^{1/6}} \right),$$

$$R_s = 3c(b_o)R_o\xi^{5/3} \left( \frac{1}{(1+\gamma)^{4/3} \left(1 + \frac{\gamma+1}{50}\right)^{5/3}} + \frac{a(b_o, \gamma)}{\xi^{d(b_o)}} \right),$$

$$b_s = \frac{1}{M_s^2 - 1} + e(b_o, \gamma) + \frac{M_s^2 + 1}{M_s^4} \frac{\frac{21}{17}(e(b_o, \gamma))^2 - \frac{14}{9}e(b_o, \gamma) + \frac{7}{4}}{1 - \frac{23}{30}e(b_o, \gamma)},$$

$$d_s = \exp \left( \frac{107}{29} - \frac{371}{68} \left( \frac{8}{13} \left( b_o - \frac{4}{21} \right) + \left( 1 + \left| \frac{8}{13} \left( b_o - \frac{4}{21} \right) \right|^{11/7} \right)^{7/11} \right) \right),$$

где

$$a(b_o, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{52}{25} + \frac{97}{84} - \frac{33}{10} \left( \frac{1}{(\gamma+1)^{13}} - \left( \frac{5}{12} \right)^{\frac{13}{4}} \right) \right) \left( 1 - \frac{\frac{7}{16}b_o}{\left( 1 + \left| \frac{7}{16}b_o \right|^{\frac{8}{33}} \right)^{\frac{33}{8}}} \right) - \frac{97}{84} + \frac{33}{10} \left( \frac{1}{(\gamma+1)^{13}} - \left( \frac{5}{12} \right)^{\frac{13}{4}} \right),$$

$$b(b_o, \gamma) = \frac{1}{2} \left( -\frac{23}{35} + \frac{43}{3} \left( \frac{1}{(\gamma+1)^{68}} - \left( \frac{5}{12} \right)^{\frac{68}{13}} \right) - \frac{24}{13} + \frac{13}{18} \left( \frac{1}{\gamma^{57}} - \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{57}{13}} \right) \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{b_o - \frac{3}{10}}{\left( \left( \frac{119}{20} \right)^{\frac{1}{2}} + \left| b_o - \frac{3}{10} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right) + \frac{24}{13} - \frac{13}{18} \left( \frac{1}{\gamma^{57}} - \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{57}{13}} \right),$$

$$c(b_o) = \frac{6}{5} \left( \frac{17}{20}b_o + \left( 1 + \left| \frac{17}{20}b_o \right|^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{3}{5}} \right) + \frac{41}{52} \frac{1}{\left( \left( \frac{26}{9} \right)^2 + b_o^2 \right)^{\frac{1}{4}}},$$

$$d(b_o) = \frac{1}{2} \left( \frac{85}{47} - \frac{15}{29} \right) \left( 1 - \frac{19}{33} \frac{\left( b_o - \frac{39}{70} \right)}{\left( 1 + \left| \frac{19}{33} \left( b_o - \frac{39}{70} \right) \right|^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{6}{5}}} \right) + \frac{15}{29},$$

$$e(b_o, \gamma) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1042}{17} - 40 \left( \frac{1}{\gamma^4} - \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{15}{4}} \right) - \frac{1318}{39} \right) \left( 1 - \frac{\left( b_o + \frac{841}{61} + \frac{160}{11} \left( \frac{1}{\gamma^{\frac{16}{5}}} - \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{16}{5}} \right) \right)}{\left( \left( \frac{809}{18} \right)^2 + \left( b_o + \frac{841}{61} + \frac{160}{11} \left( \frac{1}{\gamma^{\frac{16}{5}}} - \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{16}{5}} \right) \right)^2 \right)} \right) + \frac{1318}{39}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выражения для параметра  $\Gamma$  в МГД-приближении

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn}}{\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} - \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn})} - \frac{\sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn})(\sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) + \operatorname{tg} \alpha_{vn} \cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))(\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} + \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))}{(\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} - \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))^2} - \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn})(M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} - \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))}{(\varepsilon M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} - \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}))^2} \zeta,$$

где  $\zeta = \frac{a_1 \varepsilon^3 + b_1 \varepsilon^2 + c_1 \varepsilon + d_1}{3a \varepsilon^2 + 2b \varepsilon + c}$  с параметрами:

$$a = (\gamma + 1) M_A^6 \cos^6 \alpha_{vn},$$

$$b = -(\gamma - 1) M_A^6 \cos^6 \alpha_{vn} - (\gamma + 2) M_A^4 \cos^4 \alpha_{vn} \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) - \left( \gamma + 2 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \right) M_A^4 \cos^4 \alpha_{vn},$$

$$c = (\gamma - 2 + \gamma \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn})) M_A^4 \cos^4 \alpha_{vn} + \left( \gamma + 1 + 4 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \right) M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}),$$

$$a_1 = -6(\gamma + 1) M_A^6 \cos^5 \alpha_{vn} \sin \alpha_{vn},$$

$$b_1 = 2M_A^4 \cos^3 \alpha_{vn} \left( \left( 3(\gamma - 1) M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} + 2(\gamma + 2) \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) + 2\gamma + 4 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha_{vn} - (\gamma + 2) \cos \alpha_{vn} \cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \right),$$

$$c_1 = -2M_A^2 \cos \alpha_{vn} \left( \left( 2(\gamma - 2) M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} + 2\gamma M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) + \left( 1 + \gamma + 4 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \right) \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha_{vn} - \left( \gamma M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} + 1 + \gamma + 4 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \right) \cos \alpha_{vn} \cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \right),$$

$$d_1 = 2 \cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \times$$

$$\times \left( (\gamma - 1) \cos \alpha_{vn} \cos(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \sin \alpha_{vn} - \left( (\gamma - 1) M_A^2 \cos^2 \alpha_{vn} + 4 \left( \frac{M_A}{M_S} \right)^2 \cos^2(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \right) \sin(\vartheta_{bv} - \alpha_{vn}) \right).$$