УДК 550.3
DOI: 10.12737/szf-74202106
Поступила в редакцию 23.03.2021
Принята к публикации 26.08.2021

О ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ СВИСТЯЩИХ АТМОСФЕРИКОВ
ON THE GROUP VELOCITY OF WHISTLING ATMOSPHERICS

А.В. Гульельми
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия, guglielmi@mail.ru

Б.И. Клайн
Геофизическая обсерватория «Борок» филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Борок, Россия, klb314@mail.ru

А.С. Потапов
Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия, potapov@iszf.irk.ru

A.V. Guglielmi
Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow, Russia, guglielmi@mail.ru

B.I. Klain
Borok Geophysical Observatory the Branch of Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Borok, Russia, klb314@mail.ru

A.S. Potapov
Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS, Irkutsk, Russia, potapov@iszf.irk.ru

Аннотация. Динамический спектр свистящего атмосферика представляет собой сигнал падающего тона, причем время групповой задержки сигнала как функция частоты формируется в результате распространения широкополосного импульса в среде (магнитосферной плазме) с квадратичным законом дисперсии. Показано, что при квадратичной дисперсии групповая скорость инвариантна относительно преобразований Галилея. Это значит, что, вопреки ожиданию, групповая скорость парадоксальным образом не зависит от скорости движения среды относительно наблюдателя. Представлено общее условие инвариантности в виде дифференциального уравнения. Для объяснения парадокса введено представление о динамическом спектре функции Грина трассы распространения электромагнитных волн от импульсного источника (молниевого разряда в случае свистящего атмосферика) в диспергирующей среде. Подчеркнута важность учета движения плазмы при экспериментальном и теоретическом исследовании электромагнитных волновых явлений в околоземном космическом пространстве.

Ключевые слова: электромагнитные волны, движущаяся плазма, магнитосфера Земли, дисперсия, трасса распространения, функция Грина, динамический спектр.

Abstract. The dynamic spectrum of a whistling atmospheric is a signal of falling tone, and the group delay time of the signal as a function of frequency is formed as a result of propagation of a broadband pulse in a medium (magnetospheric plasma) with a quadratic dispersion law. In this paper, we show that for quadratic dispersion the group velocity is invariant under Galilean transformations. This means that, contrary to expectations, the group velocity is paradoxically independent of the velocity of the medium relative to the observer. A general invariance condition is found in the form of a differential equation. To explain the paradox, we introduce the concept of the dynamic spectrum of Green's function of the path of propagation of electromagnetic waves from a pulse source (lightning discharge in the case of a whistling atmospheric) in a dispersive medium. We emphasize the importance of taking into account the motion of plasma in the experimental and theoretical study of electromagnetic wave phenomena in near-Earth space.

Keywords: electromagnetic waves, moving plasma, Earth's magnetosphere, dispersion, propagation path, Green's function, dynamic spectrum.

ВВЕДЕНИЕ

Лоренц-инвариантность скорости распространения электромагнитных волн в пустом пространстве есть одно из положений специальной теории относительности [Ландау, Лифшиц, 1988]. При этом групповая v_g и фазовая v_{ph} скорости одинаковы и обе равны универсальной постоянной — скорости света $c=3\cdot10^{10}$ см/с. Иначе обстоит дело в диспергирующей среде с показателем преломления $n(\omega)$: групповая и фазовая скорости различаются, поскольку

$$v_g = c / n_g, \quad v_{ph} = c / n, \tag{1}$$

где $n_g=\partial\omega n/\partial\omega$ — так называемый групповой показатель преломления; ω — частота волны. В данной статье мы сосредоточим внимание на другом отличии законов распространения электромагнитных волн. Это отличие является радикальным и состоит в том, что при распространении в материальной среде групповая скорость изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Введем сопутствующую систему отсчета, в которой среда неподвижна, и лабораторную систему, движущуюся относительно среды равномерно и прямолинейно со скоростью u в направлении распространения волны. В лабораторной системе отсчета физические величины будем обозначать буквами со штрихом. Ограничимся нерелятивистским приближением $u<<c$, так что преобразования Лоренца можно заменить более простыми преобразованиями Галилея.

Здравый смысл подсказывает, что групповая скорость подчиняется привычному закону сложения скоростей:

$$v_g = v'_g + u. \tag{2}$$

В данной статье мы обращаем внимание на то, что, вопреки здравому смыслу, у свистящих атмосфериков, которые являются видом геоэлектромагнитных волн [Гершман, Угаров, 1960; Guglielmi, Pokhotelov, 1996], групповая скорость инвариантна относительно преобразований Галилея:

$$v_g = v'_g. \tag{3}$$

С одной стороны, это отчасти напоминает инвариантность скорости распространения волн в пустом пространстве. С другой стороны, формула (3) представляет собой парадокс, требующий объяснения.

В следующем разделе мы найдем условие инвариантности групповой скорости относительно преобразований Галилея. Затем кратко изложим теорию распространения свистящих атмосфериков [Storey, 1953] и покажем, что групповая скорость свистящего атмосферика удовлетворяет соотношению (3). Мы приведем примеры волн других видов, групповая скорость которых также инвариантна относительно преобразований Галилея. Для объяснения парадокса мы учтем свойства и условия наблюдения свистящих атмосфериков и введем представление о динамическом спектре функции Грина трассы распространения свистящего атмосферика.

1. УСЛОВИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

Разложим групповую скорость в лабораторной системе отсчета в степенной ряд и ограничимся первыми двумя членами:

$$v'_g(\omega') = v'_g(\omega) - \left.\frac{dv'_g}{d\omega'}\right|_{\omega} ku. \tag{4}$$

Здесь мы воспользовались формулой Доплера $\omega = \omega' + ku$. Из (4) с учетом равенства $v'_g(\omega') = v_g(\omega) - u$ перепишем равенство (3) в следующем виде:

$$\frac{dv'_g}{d\omega} = \frac{v'_{ph}}{\omega}. \tag{5}$$

Во избежание недоразумений следует сказать, что здесь и ниже мы считаем волны медленными $v_{ph} << c$ и, соответственно, пренебрегаем известной поправкой Френеля к скорости распространения (см., например, [Франкфурт, Френк, 1972]). Для свистящих атмосфериков неравенство $v_{ph} << c$ выполняется с большим запасом [Гершман, Угаров, 1960].

Найдем закон дисперсии $\omega(k)$ для волн, групповая скорость которых остается неизменной при переходе из сопутствующей системы отсчета в лабораторную (см. также [Гульельми, 1963; Guglielmi, 1968]). Для этого представим равенство (5) в виде следующего дифференциального уравнения:

$$f\frac{d^2 f}{d\omega^2} + \left(\frac{df}{d\omega}\right)^2 = 0, \tag{6}$$

где $f(\omega) = \omega n(\omega)$. Уравнение имеет аналитическое решение, которое дает нам

$$\omega = ak^2 + b, \tag{7}$$

где a и b — произвольные постоянные, причем из физических соображений $a \neq 0$. Таким образом, равенство $v'_g = v_g$ выполняется при условии, что частота квадратично зависит от волнового числа.

2. СВИСТЯЩИЕ АТМОСФЕРИКИ

Свистящий атмосферик возбуждается при молниевом разряде в тропосфере и, распространяясь в магнитосфере вдоль силовой линии геомагнитного поля, пересекает плоскость экватора и достигает сопряженной точки на поверхности Земли в другом полушарии [Лихтер и др., 1988]. По мере распространения импульсный сигнал расплывается таким образом, что на выходе радиоприемника мы слышим свист падающего тона.

Следует заметить, что в магнитосфере показатель преломления $n(\omega, \theta)$ зависит от угла θ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и касательной к силовой линии геомагнитного поля. Направление вектора групповой скорости $\mathbf{v}_g$ в общем случае не совпадает с направлением вектора $\mathbf{k}$, причем величина $v_g = c/n_g$ равна проекции $\mathbf{v}_g$ на направление $\mathbf{k}$ [Гинзбург, 1960].

В приближении геометрической оптики основные закономерности распространения свистящего атмосферика выводятся с помощью формулы Стори:

$$n = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega\,\Omega\cos\theta}}. \tag{8}$$

Здесь ω_0 — плазменная частота Ленгмюра; Ω — гирочастота электронов, $\omega << \Omega$, $n >> 1$ [Storey, 1953; Гершман, Угаров, 1960]. Допустим, что плазма движется вдоль силовых линий внешнего магнитного поля. Это довольно реалистичная ситуация, поскольку существует перетекание плазмы вдоль силовых линий геомагнитного поля из летней полусферы в зимнюю. Из формулы (8) следует, что

$$\omega = \alpha k^2, \tag{9}$$

где $\alpha = \Omega k_0^{-2}\cos\theta$; $k_0 = \omega_0/c$, что совпадает с (7) при $a = \alpha$ и $b = 0$. Таким образом, парадокс $v'_g = v_g$ возникает, поскольку дисперсионное соотношение для свистящих атмосфериков имеет вид квадратичной зависимости частоты от волнового числа.

3. ОБЪЯСНЕНИЕ ПАРАДОКСА

Вполне понятно, что результат измерений зависит от свойств изучаемого объекта и инструментальных средств, которые выбраны для измерений. Если измеряется скорость узкополосного волнового пакета широкополосным приемным оборудованием, то очевидно, что будет измерена скорость $v'_g = v_g - u$. Скорость $v'_g = v_g$ будет измерена в том случае, когда широкополосный сигнал, возбужденный импульсным источником, распространяется вдоль достаточно длинной траектории в среде с квадратичным законом дисперсии, причем используются селективные приемники, настроенные на фиксированную частоту.

Необходимо сделать два важных уточнения. При описании первой экспериментальной ситуации мы полностью пренебрегли поправкой Френеля. Это допустимо только при условии, что скорость волн много меньше скорости света. Второй случай требует более подробного объяснения. Мы видим, что парадокс возникает при выполнении ряда очень специальных предположений о свойствах сигнала и о способе измерений. Однако свистящие атмосферики как раз и обладают указанными свойствами. Что же касается измерений, то при регистрации используются широкополосные приемники, но обработка сигналов производится методом спектрально-временного анализа, существенным элементом которого является узкополосная фильтрация. Поясним сказанное путем анализа функции Грина трассы распространения электромагнитных волн в магнитосферной плазме.

Сделаем небольшой экскурс в основы теории распространения волн. В литературе широко используется задача Коши, когда в начальный момент времени $t=0$ задается пространственная структура волнового поля во всем пространстве и требуется найти пространственно-временную структуру поля при $t>0$. Для иллюстрации рассмотрим волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x в однородной безграничной среде. В асимптотике, т. е. на больших расстояниях и при больших временах, начальный широкополосный импульс превращается в модулированную квазисинусоидальную волну. Ее амплитуда убывает со временем как $1/\sqrt{t}$. Спектральные компоненты начального импульса распространяются вдоль семейства мировых линий $x=v_{\mathrm{g}}(k)t$ в двумерном пространстве-времени (x, t). Другими словами, в асимптотике существует развернутый веер пространственно-временных лучей, вдоль которых «растекается» спектр начального импульса (подробнее см. в обзоре [Вайнштейн, 1976]).

Нетрудно понять, что задача Коши никак не соответствует условиям возбуждения, распространения и регистрации свистящих атмосфериков. Здесь будет уместна постановка краевой задачи: в точке $x=0$ задан источник (в нашем случае это молниевый разряд) и требуется найти сигнал в точке наблюдения $x>0$. Отрезок [0, x] будем называть трассой распространения. Трассой распространения в нашем случае является отрезок геомагнитной силовой линии, соединяющий молниевый разряд с приемником. Приемник может располагаться на земной поверхности или в ионосфере (на спутнике). На вход трассы распространения подается дельтаобразный импульс, так что решение нашей краевой задачи

$$G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ik(\omega)x-i\omega t\right]d\omega \tag{10}$$

представляет собой функцию Грина, или импульсный отклик трассы распространения.

Найти функцию Грина непросто даже для однородной трассы. Длина трассы x фиксирована. Поэтому мы не можем воспользоваться представлением о пространственно-временных лучах $x/t=\mathrm{const}$, которое приближенно соответствует картине распространения волн при $t\to\infty$, $x\to\infty$. Однако вместо этого можно предложить асимптотическое спектрально-временное представление функции Грина. Идея состоит в следующем.

Определим динамический спектр $\Gamma(\omega,\ t)$ функции Грина (10) путем следующего построения. Спектр Фурье функции Грина умножим на $2\pi\exp\left[-\varepsilon(\nu-\omega)^2\right]$, т. е. вырежем в спектре окно шириной $\varepsilon^{-1/2}$, центрированное на частоте $\nu=\omega$. После этого произведем обратное преобразование Фурье:

$$\Gamma(\omega,t)= =\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\nu t+i\frac{x}{c}\nu n(\nu)-\varepsilon(\nu-\omega)^2\right]d\nu. \tag{11}$$

При достаточно большом ε основной вклад в интеграл дают частоты ν, близкие к ω. Введем обозначение $\xi=\nu-\omega$ и разложим $n(\nu)$ в ряд по степеням ξ с точностью до квадратичного члена. В результате получим

$$\Gamma(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\exp\left\{i\xi\left[\frac{x}{c}n_{\mathrm{g}}(\omega)-t\right]+\right. \left.+\frac{\xi^2}{2}\left[i\frac{x}{c}\frac{dn_{\mathrm{g}}}{d\omega}-\varepsilon\right]\right\}, \tag{12}$$

или после интегрирования

$$\Gamma(\omega,t)=\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon-i\tau'(\omega)}}\exp\left\{-\frac{\left[t-\tau(\omega)\right]^2}{2\left[\varepsilon-i\tau'(\omega)\right]}\right\}. \tag{13}$$

Здесь $\tau=(x/c)n_{\mathrm{g}}$, $\tau'=d\tau/d\omega$. Очевидно, что максимума функция $|\Gamma(\omega,\ t)|$ достигает при $t=\tau(\omega)$. Величину $\tau(\omega)$ называют временем группового запаздывания.

Нам осталось воспользоваться формулой Стори (8) для расчета времени группового запаздывания свистящих атмосфериков:

$$\tau(\omega)=\frac{x}{2\sqrt{\alpha\omega}}. \tag{14}$$

Поскольку $\tau=x/v_{\mathrm{g}}$ и, таким образом, $v_{\mathrm{g}}=v'_{\mathrm{g}}=2(\alpha\omega)^{1/2}$, мы приходим к выводу, что парадокс становится понятным. Формула (3) верна в своей области применимости. Не следует только упускать из виду свойства волнового поля, а также специфические условия наблюдения и анализа свистящих атмосфериков.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Грозовые разряды возбуждают не только свистящие атмосферики, но и так называемые сферики [Guglielmi, Pokhotelov, 1996]. В отличие от свистящего атмосферика сферик распространяется не в магнитосфере, а в волноводе земля–ионосфера. На частотах, близких к критической частоте волновода, условие (7) выполняется, т. е. частота квадратично зависит от волнового числа.

Классическим примером волн с квадратичным законом дисперсии являются волны Ленгмюра. В бесстолкновительной плазме волны Ленгмюра испытывают затухание Ландау [Питаевский, Лифшиц, 1979]. Мы пренебрежем затуханием. Тогда дисперсионное соотношение будет иметь вид

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{2} D^2 k^2 \right), \tag{15}$$

где D — радиус Дебая [Кадомцев, 1968].

Интересный пример волн с квадратичным законом дисперсии дает квантовая механика. Из уравнения Шредингера следует, что закон дисперсии для свободного электрона имеет вид

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2, \tag{16}$$

где m — масса электрона, $\hbar$ — постоянная Планка [Ландау, Лифшиц, 1989]. По форме (16) совпадает с дисперсионным соотношением (10) для свистов, так что формально $v'_g = v_g$.

Обсудим кратко вопрос об учете продольной неоднородности трассы распространения при расчете времени группового запаздывания свистящего атмосферика. Продольную неоднородность нетрудно учесть методом геометрической оптики [Гинзбург, 1960]. В результате вместо (14) будем иметь

$$\tau(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}. \tag{17}$$

Учету неоднородности магнитосферной плазмы при анализе свистящих атмосфериков посвящена обширная литература, отраженная во многих обзорах и монографиях (см., например, [Лихтер и др., 1988]).

В завершение данного раздела статьи подчеркнем, что в работе мы использовали базовые физические представления о пространстве, времени, системе отсчета, электромагнитном поле, диспергирующей среде и корректно проделали стандартные математические выкладки. Тем не менее, полученный результат может показаться противоречащим практике наблюдения электромагнитных волн, но только на первый взгляд. Свистящий атмосферик является ярким примером электромагнитного сигнала, распространяющегося с групповой скоростью, которая не зависит от скорости движения среды на трассе распространения.

Результат, интересный и сам по себе, имеет определенное методическое значение. Хорошо известно, что свист может многократно проходить по одному и тому же пути, отражаясь от ионосферы в магнитосопряженных точках. Расположим в сопряженных точках два идентичных широкополосных радиоприемника. Казалось бы, по разности времен пробега сигнала из Северного полушария в Южное и обратно (или наоборот) можно оценивать скорость перемещения магнитосферной плазмы вдоль геомагнитных силовых линий. Наш результат свидетельствует о том, что такая возможность исключается. Следует, однако, сделать небольшую оговорку. Речь идет о типичных свистах, представляющих собой сигналы падающего тона. Особый вид сигналов, так называемые носовые свисты (nose whistlers), в принципе подходит для диагностики скорости движения плазмы, однако это тема уже другой работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Влияние движения плазмы на характер наблюдаемых электромагнитных волновых явлений представляет несомненный интерес для физики магнитосферы. Мы обратили внимание на необычное свойство свистящих атмосфериков, выраженное формулой (3). Интерпретация формулы не так проста, как это могло бы показаться. Нам потребовалось учесть особенности распространения широкополосных сигналов, возбужденных импульсным источником, в среде с квадратичным законом дисперсии, а также условия регистрации и обработки сигналов. Мы ввели представление о динамическом спектре функции Грина трассы распространения свистящего атмосферика. Результат анализа свидетельствует о том, что на частотную зависимость группового запаздывания свистящего атмосферика не влияет скорость движения магнитосферной плазмы относительно наблюдателя.

Выражаем искреннюю признательность Г.А. Жеребцову за внимание к нашей работе и ценные советы. Благодарим О.Д. Зотова и Ф.З. Фейгина за стимулирующие обсуждения. Мы признательны рецензентам за тщательный анализ нашей статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-05-00574), а также программами государственных заданий ИФЗ РАН и ИСЗФ СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вайнштейн Л.А. Распространение импульсов. *УФН*. 1976. Т. 118, № 2. С. 339–367. DOI: 10.3367/UFNr.0118.197602h.0339.

Гершман Б.Н., Угаров В.А. Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере. *УФН*. 1960. Т. 72. С. 235–271. DOI: 0.3367/UFNr.0072.196010c.0235.

Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме*. М.: Физматгиз, 1960. 552 с.

Гульельми А.В. О групповой скорости медленных волн в дрейфующей магнитоактивной плазме. *Геомагнетизм и аэрономия*. 1963. Т. 3, № 4. С. 754–757.

Кадомцев Б.Б. Затухание Ландау и эхо в плазме. *УФН*. 1968. Т. 85. Вып. 1. С. 111–129.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988. 512 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. М.: Наука, 1989. 768 с.

Лихтер Я.И., Гульельми А.В., Ерухимов Л.М., Михайлова Г.А. *Волновая диагностика приземной плазмы*. М.: Наука, 1988. 216 с.

Питаевский Л.П., Лифшиц Е.М. *Физическая кинетика*. М.: Наука, 1979. 807 с.

Франкфурт У.И., Френк А.М. *Оптика движущихся тел*. М.: Наука, 1972. 212 с.

Guglielmi A.V. The propagation of slow waves in a moving plasma. *Ann. Geophys*. 1968. Vol. 24, no. 3. P. 761–763.

Guglielmi A.V., Pokhotelov O.A. *Geoelectromagnetic waves*. Bristol and Philadelphia: IOP Publ. Ltd., 1996. 402 p.

Storey L.R.O. An investigation of whistling atmospherics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1953. Vol. 246, no. 908. P. 113–141. DOI: 10.1098/rsta.1953.0011.

Как цитировать эту статью:

Гульельми А.В., Клайн Б.И., Потапов А.С. О групповой скорости свистящих атмосфериков. *Солнечно-земная физика*. 2021. Т. 7, № 4. С. 70–74. DOI: 10.12737/szf-74202106.