

Научная статья  
Статья в открытом доступе  
УДК 519.63  
doi: 10.30987/2782-5957-2022-5-22-29

## ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В УЗЛЕ

Александр Викторович Яковлев<sup>1✉</sup>, Олег Дмитриевич Казаков<sup>2</sup>  
Алексей Петрович Болдырев<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Брянский государственный инженерно-технологический университет, Россия, г. Брянск

<sup>3</sup> Брянский государственный технический университет, Россия, г. Брянск

<sup>1</sup> jav.05@mail.ru

<sup>2</sup> kod8383@mail.ru

<sup>3</sup> apb.tubryansk@gmail.com

### Аннотация

Работа посвящена получению матрицы жесткости высокоточного, плоского конечного элемента с 6 степенями свободы в узле, для решения плоских задач теории упругости методом конечных элементов.

В научной литературе представлены подобные высокоточные элементы высоких порядков. Однако, теоретические результаты этих работ достаточно далеки от их практического применения. В настоящей работе приводится исчерпывающе подробный вывод матрицы жесткости высокоточного конечного элемента. По аналогии, может быть получена матрица жесткости тетраэдрального ко-

нечного элемента с 12 степенями свободы в узле. Для тестирования полученной матрицы жесткости, была написана программа, основанная на МКЭ, с помощью которой выполнен расчет консольной балки. Погрешность расчета перемещений составила всего 0,22 %.

Вывод: представленная в статье матрица жесткости, с большим успехом может использоваться в численных методах расчета напряженно-деформированного состояния.

**Ключевые слова:** задача, теория, упругость, перемещения, деформация, напряжение, расчет, консольная балка.

Ссылка для цитирования:

Яковлев А.В. Треугольный конечный элемент с шестью степенями свободы в узле / А. В. Яковлев, О. Д. Казаков, А. П. Болдырев // Транспортное машиностроение. – 2022. - № 5. – С. 22–29. doi: 10.30987/2782-5957-2022-5-22-29.

Original article  
Open Access Article

## TRIANGULAR FINITE ELEMENT WITH SIX-DEGREE-OF-FREEDOM NODE

Aleksander Viktorovich Yakovlev<sup>1✉</sup>, Oleg Dmitrievich Kazakov<sup>2</sup>  
Aleksey Petrovich Boldyrev<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Bryansk State University of Engineering and Technology, Russia, Bryansk

<sup>3</sup> Bryansk State Technical University, Russia, Bryansk

<sup>1</sup> jav.05@mail.ru

<sup>2</sup> kod8383@mail.ru

<sup>3</sup> apb.tubryansk@gmail.com

The work is devoted to obtaining the stiffness matrix of a high-precision, flat finite element with 6 degrees of freedom in the node, for solving plane elasticity problems by the finite element method.

The scientific literature describes higher order elements. However, the theoretical results of these studies are quite far from their practical application. This paper gives a very detailed derivation of the stiff-

ness matrix of a high-precision finite element. Similarly, a stiffness matrix of a tetrahedral finite element with 12-degree-of-freedom node can be obtained. To test the obtained stiffness matrix, a program based on the FEM was written, with the help of which the cantilever beam is calculated. The error in calculating displacements is only 0.22%.

Conclusion: the stiffness matrix presented in the paper can be used with great success in numerical methods for calculating the stress-strain state.

**Keywords:** problem, theory, elasticity, displacement, deformation, stress, calculation, cantilever beam.

Reference for citing:

Yakovlev A.V., Kazakov O.D., Boldyrev AP. Triangular finite element with six-degree-freedom node. *Transport Engineering*. 2022;5:22 - 29. doi: 10.30987/2782-5957-2022-5-22-29.

## Введение

В настоящее время в методе конечных элементов (МКЭ) используется большое количество самых разнообразных конечных элементов. Наиболее перспективными для решения плоских задач теории упругости следует считать треугольные конечные элементы [2]. Во-первых, эти элементы позволяют более гибко производить конечно-элементную дискретизацию исследуемой области. Во-вторых, треугольная область обладает определенными преимуществами с точки зрения математической задачи двухмерной интерполяции [3].

На рис. 1 показан высокоточный конечный элемент с 6 степенями свободы в узле, в котором, в качестве степеней сво-

боды используются перемещения и производные от перемещений. Такой конечный элемент будет обладать повышенной точностью, поскольку связывает условиями непрерывности не только поля перемещений, но и поля деформаций.

Принятие дифференциала поля перемещений в качестве степени свободы упрощает расчет напряжений в узлах, поскольку компоненты тензора напряжений в узле выражаются через первые производные поля перемещений. По этой же причине имеется возможность задавать граничные условия в напряжениях. Настоящая статья посвящена выводу матрицы жесткости треугольного конечного элемента с шестью степенями свободы в узле.

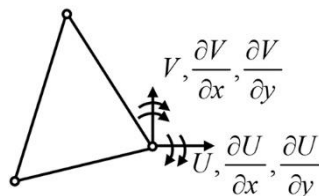


Рис. 1. Треугольный конечный элемент, с шестью степенями свободы в узле  
Fig. 1. A triangular finite element with six degrees of freedom at the node

## Поля перемещений

Обозначим узлы треугольного конечного элемента (рис 2) буквами  $i, j$  и  $k$ . Каждому узлу треугольника соответствуют координаты  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$  и  $(X_k, Y_k)$ .

Для треугольного конечного элемента более естественно использование  $L$ -координат [4]. В этом случае, поле перемещений внутри конечного элемента можно описать с помощью пары однородных кубических полиномов:

$$\left. \begin{aligned} u(L) &= \alpha_1 L_i^3 + \alpha_2 L_j^3 + \alpha_3 L_k^3 + \alpha_4 L_i^2 L_j + \alpha_5 L_j^2 L_k + \alpha_6 L_k^2 L_i + \alpha_7 L_j^2 L_i + \alpha_8 L_j^2 L_k^2 + \alpha_9 L_i^2 L_k + \alpha_{10} L_i L_j L_k \\ v(L) &= \beta_1 L_i^3 + \beta_2 L_j^3 + \beta_3 L_k^3 + \beta_4 L_i^2 L_j + \beta_5 L_j^2 L_k + \beta_6 L_k^2 L_i + \beta_7 L_j^2 L_i + \beta_8 L_j^2 L_k^2 + \beta_9 L_i^2 L_k + \beta_{10} L_i L_j L_k \end{aligned} \right\} (1)$$

или более коротко:

$$\{u(L)\} = [\alpha_{10}] \cdot \{L_{10}\}. \quad (2)$$

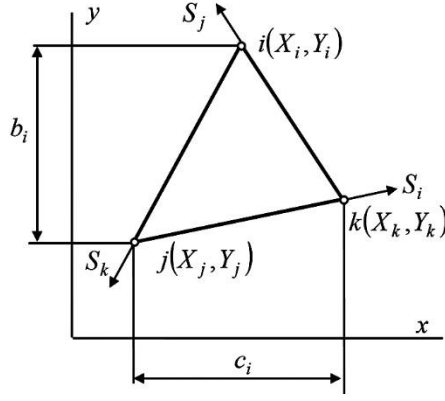


Рис. 2. Система координат  $S_i, S_j, S_k$   
 Fig. 2. Coordinate system  $S_i, S_j, S_k$

Для того, чтобы в качестве степеней свободы использовать производные от перемещений вдоль сторон  $S_r$  ( $r = i, j, k$ )

$$\frac{\partial \{u(L)\}}{\partial S_r} = \frac{\partial}{\partial S_r} [\alpha_{10}] \{L_{10}\} = [\alpha_{10}] \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_r}. \quad (3)$$

Видим, что дифференцирование векторной функции  $\{u(L)\}$  свелось к дифференцированию векторной функции  $\{L_{10}\}$ . Найдем соответствующие производные. Для чего, каждой стороне треугольника  $l_r$  ( $r = i, j, k$ ) поставим в соответствие

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c_i}{l_i} S_i + X_j \\ y &= -\frac{b_i}{l_i} S_i + Y_j \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для других сторон могут быть выписаны аналогичные соотношения. Тогда производная сложной функции по координате  $S_r$  ( $r = i, j, k$ ) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_r} = \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial S_r} + \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_j} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial S_r} + \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_k} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial S_r}. \quad (5)$$

Функции  $L_p$  ( $p = i, j, k$ ) входящие в (5), являются сложными функциями от координат  $x, y$ . Поэтому:

$$\frac{\partial L_p}{\partial S_r} = \frac{\partial L_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S_r} + \frac{\partial L_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial S_r}. \quad (6)$$

Имея в виду известные зависимости (4):

$$\frac{\partial L_p}{\partial S_r} = \frac{1}{2 \cdot \Delta \cdot l_r} (b_p c_r - b_r c_p).$$

Для треугольника известны соотношения

$$c_i b_k - c_k b_i = c_j b_i - c_i b_j = c_k b_i - c_j b_k = a_i + a_j + a_k = 2\Delta,$$

учитывая которые, для различных сочетаний  $p$  и  $r$  из набора  $i, j, k$ :

$$\frac{\partial L_p}{\partial S_r} = \begin{cases} l_r^{-1} & \text{при } r = i, p = k; \quad r = j, p = i; \quad r = k, p = j \\ -l_r^{-1} & \text{при } r = i, p = j; \quad r = j, p = k; \quad r = k, p = i. \\ 0 & \text{при } r = p \end{cases}$$

Подставляя эти зависимости в (9), получаем производные по конкретным переменным  $S_i, S_j$ , и  $S_k$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_i} &= \frac{1}{l_i} \left( -\frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_j} + \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_k} \right) \\ \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_j} &= \frac{1}{l_j} \left( -\frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_k} + \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_i} \right) \\ \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_k} &= \frac{1}{l_k} \left( -\frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_i} + \frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial L_j} \right) \end{aligned} \right\}.$$

Эти зависимости можно представить как произведение некоторой матрицы  $[T_r]$  ( $r = i, j, k$ ), строение которой очевидно, на вектор  $\{L_6\}$ :

$$\frac{\partial \{L_{10}\}}{\partial S_r} = \frac{1}{l_r} [T_r] \{L_6\}, \text{ где } r \in i, j, k. \quad (7)$$

Где:

$$\{L_6\}^T = \{L_i^2, L_j^2, L_k^2, L_i L_j, L_j L_k, L_k L_i\}$$

Подставив эти зависимости в (3) получаем:

$$\frac{\partial \{u(L)\}}{\partial S_r} = \frac{1}{l_r} [\alpha_{10}] [T_r] \{L_6\}, \text{ где } r \in i, j, k. \quad (8)$$

### Векторы узловых перемещений

Введем вектор узловых перемещений [5]. С этой целью, выполним некоторые преобразования (8). Умножим (8) на длину стороны треугольника  $l_r$ . Получим:

$$\frac{\partial \{u(L)\}}{\partial S_r} \cdot l_r = [\alpha_{10}] [T_r] \{L_6\}. \quad (9)$$

Введем определение производной от функции  $\{u(L)\}$  вдоль некоторой стороны треугольника  $l_r$ .

$$\{u(l)\}_{,r} = \frac{\partial \{u(L)\}}{\partial S_r} \cdot l_r.$$

В этом случае, зависимость (9) примет вид:

$$\{u(l)\}_{,r} = [\alpha_{10}] [T_r] \{L_6\}. \quad (10)$$

Новое понятие производной обеспечивает независимость компонент матрицы  $[\alpha_{10}]$  от размеров стороны треугольника и делает зависимость (10) универсальной для любого конечного элемента при дифференцировании вдоль любой из его сторон.

Теперь можно определить векторы узловых перемещений. Введем два локальных вектора узловых перемещений с компонентами, упорядоченными вдоль направлений  $x$  и  $y$ .

$$\begin{aligned} \{U\}_s^T &= \{U_i \quad U_{i,j} \quad U_{i,k} \quad U_j \quad U_{j,k} \quad U_{j,i} \quad U_k \quad U_{k,i} \quad U_{k,j}\} \\ \{V\}_s^T &= \{V_i \quad V_{i,j} \quad V_{i,k} \quad V_j \quad V_{j,k} \quad V_{j,i} \quad V_k \quad V_{k,i} \quad V_{k,j}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Индекс  $s$  здесь указывает на то, что производные взяты вдоль соответствующих сторон треугольника по формуле (10). Вместе эти два вектора образуют глобаль-

ный вектор перемещений для треугольного конечного элемента, с компонентами, упорядоченными по направлениям  $x$  и  $y$ .

$$\{\bar{U}\}_s^T = \{\{U\}_s^T \quad \{V\}_s^T\}.$$

Введем также три локальных вектора узловых перемещений для узла  $p$  треугольного конечного элемента

$$\{U_p\}_s^T = \{U_p \quad U_{p,r} \quad U_{p,t} \quad V_p \quad V_{p,r} \quad V_{p,t}\}. \quad (11)$$

где  $p \in i, j, k$ ;  $r \in i, j, k$ ;  $t \in i, j, k$ . Вместе эти три вектора образуют глобальный вектор узловых перемещений для ко-

нечного элемента, компоненты которого упорядочены по узлам

$$\{\bar{U}_p\}_s^T = \{\{U_i\}_s^T \quad \{U_j\}_s^T \quad \{U_k\}_s^T\}.$$

Между векторами  $\{\bar{U}\}_s$  и  $\{\bar{U}_p\}_s$  установим связь с помощью матрицы  $[E_1]$ :

$$\{\bar{U}\}_s = [E_1] \{\bar{U}_p\}_s. \quad (12)$$

Строение матрицы  $[E_1]$  очевидно.

Вектор узловых перемещений с производными вдоль сторон треугольного конечного элемента мы будем использовать для определения компонент матрицы  $[\alpha_{10}]$ . Использовать же этот вектор для вывода матрицы жесткости и расчете

напряжений нельзя. В этом случае необходим вектор перемещений, компонентами которого будут являться производные по аргументам  $x$  и  $y$ . Введем следующее определение производных от функций  $\{u(L)\}$  вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ .

$$\{u(L)\}_{,1} = \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial x}, \quad \{u(L)\}_{,2} = \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial y}. \quad (15)$$

В соответствии с (15) определим три локальных вектора узловых перемещений для узла  $p$  треугольного конечного элемента:

$$\{U_p\}_x^T = \{U_p \quad U_{p,1} \quad U_{p,2} \quad V_p \quad V_{p,1} \quad V_{p,2}\}. \quad (16)$$

где:  $p \in i, j, k$ . Индекс  $x$  в (16) указывает на то, что производные взяты вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ .

Из (9):

$$\begin{aligned} \{u(L)\}_{,r} &= \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial S_r} l_r = l_r \left( \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S_r} + \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial S_r} \right) \\ &= l_r \left( \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial x} c_r - \frac{\partial\{u(L)\}}{\partial y} b_r \right). \end{aligned}$$

Теперь можно установить связь между векторами  $\{U_p\}_s$  из (11) и  $\{U_p\}_x$  из (16) с помощью матрицы  $[M_p]_{sx}$ :

$$\{U_p\}_s = [M_p]_{sx} \{U_p\}_x \quad (17)$$

где:

$$[M_p]_{sx} = \begin{bmatrix} [M_i]_{sx} & [0_6] & [0_6] \\ [0_6] & [M_j]_{sx} & [0_6] \\ [0_6] & [0_6] & [M_k]_{sx} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $[0_6]$  нулевая матрица размером  $6 \times 6$ .

$$[M_i]_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_j & -b_j \\ 0 & c_k & -b_k \end{bmatrix} \quad [M_j]_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_k & -b_k \\ 0 & c_i & -b_i \end{bmatrix} \quad [M_k]_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_i & -b_i \\ 0 & c_j & -b_j \end{bmatrix}$$

Определим коэффициенты  $\alpha_l, \beta_l$  (где  $l \in 1, 2, \dots, 10$ ) интерполяционных полиномов (1) Первые 9 коэффициентов определим из условий непрерывности перемещений и производных вдоль сторон треугольника в его узлах.

Для определения коэффициентов  $\alpha_{10}$  и  $\beta_{10}$  необходим ещё один узел. Этот узел можно задать в центре тяжести треуголь-

ного элемента, что нежелательно. Существует много способов доопределения «лишних» неизвестных, которые довольно подробно излагаются в литературе. В результате, можно получить матрицу преобразования  $[Z]$ , связывающую компоненты вектора перемещения внутри конечного элемента с узловыми перемещениями следующей зависимостью:

$$\{u(L)\} = [\Omega(L)] \begin{bmatrix} [Z] & [0] \\ [0] & [Z] \end{bmatrix} \{\bar{U}\}_s.$$

$$\text{Где} \quad \{u(L)\} = \begin{Bmatrix} u(L) \\ v(L) \end{Bmatrix}, \quad [\Omega(L)] = \begin{bmatrix} \{L_{10}\}^T & \{0_{10}\}^T \\ \{0_{10}\}^T & \{L_{10}\}^T \end{bmatrix}, \quad \{\bar{U}\}_s = \begin{Bmatrix} \{U\}_s \\ \{V\}_s \end{Bmatrix}.$$

Введем матрицу функций формы:

$$[N(L)] = [\Omega(L)] \begin{bmatrix} [Z] & [0] \\ [0] & [Z] \end{bmatrix}.$$

Тогда окончательно:

$$\{u(L)\} = [N(L)]\{\bar{U}_p\}_s. \quad (18)$$

С целью облегчения расчета тензора напряжений, перейдем к использованию вектора узловых перемещений  $\{\bar{U}_p\}_x$ , компонентами которого являются производ-

ные от перемещений вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ , для этого, подставим зависимость (17) в (18):

$$\{u(L)\} = [N(L)][M]_{sx}\{\bar{U}_p\}_x. \quad (19)$$

### Деформации и напряжения

Введем вектор деформаций:

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \tau_{xy} \quad \varepsilon_y\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22}\}.$$

и запишем уравнения Коши в виде:

$$\{\varepsilon(L)\} = [S]\{u(L)\}, \quad (20)$$

Подставим (19) в (20):

$$\{\varepsilon(L)\} = [S][N(L)][M]_{sx}\{\bar{U}_p\}_x.$$

В результате действия матрицы  $[S]$  на матрицу  $[N(L)]$  будет порождена матрица градиентов  $[B(L)]$ :

$$\{\varepsilon(L)\} = [B(L)][M]_{sx}\{\bar{U}_p\}_x. \quad (21)$$

Уравнение (21) дает искомую зависимость между деформациями и узловыми перемещениями.

Введем вектор напряжений:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \sigma_y\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22}\}.$$

и запишем связь между напряжениями и деформациями в виде:

$$\{\sigma(L)\} = [D]\{\varepsilon(L)\}, \quad (22)$$

где  $[D]$  - матрица упругости размером  $3 \times 3$  компоненты, которой определяются законом Гука Искомую зависимость полу-

чим, если в (22) подставить уравнения (21):

$$\{\sigma(L)\} = [D][B(L)][M]_{sx}\{\bar{U}_p\}_x. \quad (23)$$

### Система разрешающих уравнений МКЭ

Введем обозначения:

$A$  - работа внешних сил

$\Pi$  - потенциальная энергия деформированного тела

$\Lambda$  - энергия системы внешних и внутренних сил

Для вывода разрешающих уравнений МКЭ воспользуемся формулой Лагранжа [6]:

$$\delta\Lambda = 0.$$

$$\Lambda = \Pi - A. \quad (24)$$

Потенциальная энергия определяется формулой Клайперона [6]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (25)$$

Найдем потенциальную энергию  $\Pi^v$  для конечного элемента с номером  $v$ , подставив в (25) уравнения (21) и (23):

$$\Pi^v = \frac{1}{2} \int_V \{\bar{U}_p\}_x^T [M^v]_{sx}^T [B^v(L)]^T [D^v] [B^v(L)] [M^v]_{sx} \{\bar{U}_p\}_x dV. \quad (26)$$

Работа внешних сил для узла  $p$  конечного элемента с номером  $v$ :

$$A_p^v = \{\tilde{U}_p^v\}^T \{P_p^v\},$$

где:  $\{\tilde{U}_p^v\}^T = \{U_p^v \quad U_p^v\}$ ;  $\{P_p^v\}^T = \{P_{px}^v \quad P_{py}^v\}$ .

С помощью матрицы  $[F_2]$ , введем в зависимость (26) вектор  $\{U_p\}_x$  из (16)

$$A_p^v = \{U_p\}_x^T [F_2] \{P_p^v\},$$

где:

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, для конечного элемента с номером  $v$ :

$$A^v = \sum_{p=1}^3 \{U_p^v\}_x^T [F_2] \{P_p^v\}.$$

Выполнив суммирование по всем конечным элементам, получим:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^E \int_V \{\bar{U}_p\}_x^T [M^v]_{sx}^T [B^v(L)]^T [D^v] [B^v(L)] [M^v]_{sx} \{\bar{U}_p\}_x dV - \sum_{v=1}^E \sum_{p=1}^3 \{U_p^v\}_x^T [F_2] \{P_p^v\}.$$

Минимизируя полученный функционал приходим к разрешающей системе уравнений МКЭ:

$$\sum_{v=1}^E \int_V [M^v]_{sx}^T [B^v(L)]^T [D^v] [B^v(L)] [M^v]_{sx} \{\bar{U}_p\}_x dV = \sum_{v=1}^E \sum_{p=1}^3 [F_2] \{P_p^v\}. \quad (27)$$

### Матрица жесткости конечного элемента

Интеграл в левой части (27) представляет собой матрицу жесткости конечного элемента  $[k]$ . Считая, что толщина

$$(L) = h_i L_i + h_j L_j + h_k L_k.$$

где:  $h_i, h_j, h_k$  - толщина конечного элемента в узлах  $i, j, k$  и учитывая, что компоненты матрицы  $[M^v]_{sx}$  являются посто-

конечного элемента изменяется линейно, запишем:

янными величинами, получаем матрицу жесткости конечного элемента:

$$[k^v] = [M^v]_{sx}^T \int_V [B^v(L)]^T [D^v] [B^v(L)] dV [M^v]_{sx}. \quad (28)$$

### Тестовый расчет

Используя полученные зависимости, была написана программа для тестирования матрицы жесткости конечного элемента и выполнен расчет перемещений для

консольной балки (Рис. 3). Расчет имеет чисто математический характер, поэтому величины и размерности физических величин не приводятся.

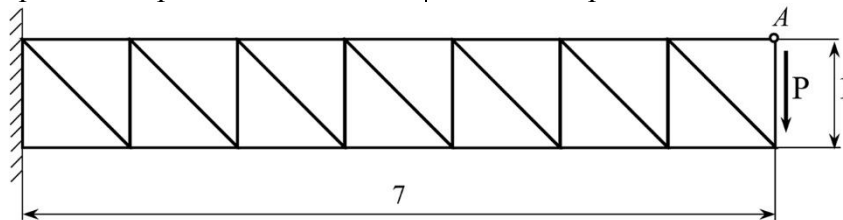


Рис. 3. Триангуляция консольной балки для выполнения тестового расчета  
Fig. 3. Triangulation of a cantilever beam for performing a test calculation

Расчет перемещений для точки А балки (Рис. 3), по точным формулам, составил величину 2.744, а при расчете по

методу конечных элементов получено перемещение 2.738. Таким образом, погрешность расчета составила величину 0.22%.

### Заключение

В представленной работе подробно представлен вывод матрицы жесткости высокоточного конечного элемента с 6 степенями свободы в узле, для решения плоских задач теории упругости. Тестовый расчет подтвердил высокую точность ко-

нечного элемента. По полной аналогии, для решения объемных задач, можно получить матрицу жесткости тетраэдрального конечного элемента с 12 степенями свободы в узле.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 208 с.

2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. - 428 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. – Butterworth Heinemann, 2000. – 707p.
5. Баландин, М.Ю., Шурина Э.П. Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 69 с.
6. Ern A., Guermond J.L. Theory and practice of finite elements. *Applied Mathematical Sciences*. 2004;159.

1. Korneev VG. Schemes of the finite element method of high order accuracy. Leningrad: Publishing House of the Leningrad University; 1977.
2. Gallagher R. Finite element method. Fundamentals. Moscow: Mir; 1984.
3. Segerlind L. Application of the finite element method. Moscow: Mir; 1979.
4. Zienkiewicz OC, Taylor RL. The finite element method: The basis. Butterworth Heinemann; 2000.
5. Balandin, MYu, Shurina EP. Vector finite element method. Novosibirsk: Publishing house of NSTU; 2001.

7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics. – Butterworth Heinemann, 2000. – 459 p.
8. Shames I.H., Cozzareli F.A. Elastic and Inelastic Stress Analysis, revised edition. – Washington: Taylor & Francis, DC, 1997. – 187 p.
9. Di P.D.A., Ern A. Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods. *Mathématiques et Applications*. 2012; 69.
10. Стринг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.

6. Ern A, Guermond JL. Theory and practice of finite elements. *Applied Mathematical Sciences*. 2004; 159.
7. Zienkiewicz OC, Taylor RL. The finite element method: Solid mechanics. Butterworth Heinemann; 2000.
8. Shames IH, Cozzareli FA. Elastic and inelastic stress analysis, revised edition. Washington: Taylor & Francis, DC; 1997.
9. Di PDA, Ern A. Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods. *Mathématiques et Applications*. 2012; 69.
10. String G, Fix J. Theory of the finite element method. Moscow: Mir; 1977.

#### Информация об авторах:

**Яковлев Александр Викторович**, кандидат технических наук, доцент, преподаватель Брянского государственного инженерно-технологического университета, тел. +7(919)197-62-11.

**Казаков Олег Дмитриевич**, кандидат экономических наук, доцент, проректор по цифровизации

**Yakovlev Aleksander Viktorovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Lecturer of Bryansk State University of Engineering and Technology, phone: +7(919)197-62-11.

**Kazakov Oleg Dmitrievich**, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Digital-

ization at Bryansk State University of Engineering and Technology, phone: +7(920)604-65-36.

**Болдырев Алексей Петрович**, доктор технических наук, профессор Брянского государственного технического университета, тел. +7(910)331-20-00.

ization at Bryansk State University of Engineering and Technology, phone: +7(920)604-65-36.

**Boldyrev Aleksey Petrovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor of Bryansk State Technical University.

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.**  
**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**  
**The authors declare no conflicts of interests.**

**Статья опубликована в режиме Open Access.**  
**Article published in Open Access mode.**

Статья поступила в редакцию 22.12.2021; одобрена после рецензирования 21.03.2022; принята к публикации 21.04.2022. Рецензент – Алгабачиев А.Ю., доктор технических наук, зав. отделом Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, член редколлегии журнала «Транспортное машиностроение».

The article was submitted to the editorial office on 22.12.2021; approved after review on 21.03.2022; accepted for publication on 21.04.2022. The reviewer is Algabachiev A.Yu., Doctor of Technical Sciences, Head of the Department at Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, member of the Editorial Board of the journal *Transport Engineering*.