Экспериментальная проверка конструктивных алгоритмов построения кубических парабол при помощи кривых Безье в САПР «Компас-3D»

Experimental verifying of constructive algorithms to create cubic parabolas via Bezier curves in «Kompas-3D» CAD

Бойков А.А.
старший преподаватель кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
senior lecturer of department of engineering graphics of MIREA – Russian Technological University
e-mail: albophx@mail.ru

Сиднев П.С.
студент РТУ МИРЭА
e-mail: sid-pronis@mail.ru

Sidnev P.S.
student of MIREA – Russian Technological University
e-mail: sid-pronis@mail.ru

Аннотация
В статье рассматривается использование кривой Безье в САПР «Компас-3D» для построения дуг кубической параболы. Проверяются конструктивные алгоритмы построения центрально-симметричных участков кубической параболы двух видов по известным параметрам, а также один алгоритм построения участка кубической параболы общего вида с известными начальной и конечной точками и касательными в них. Для этого на построенной в геометрическом редакторе кривой Безье берется достаточное число точек, составляется уравнение кубической параболы и находятся его коэффициенты. Далее для случайных точек выполняется проверка подстановкой значений координат в уравнение. Рассмотренные конструктивные алгоритмы можно использовать для построения дуг кубических парабол в различных САПР и графических редакторах.
Ключевые слова: теория решения геометрических задач на построение, конструктивная геометрия, CAD, САПР, Компас-3D, кривая Безье, кубическая парабола.

Abstract
The article discusses the use of the Bezier curve in the CAD “Compass-3D” for construct the arcs of a cubic parabola. Constructive algorithms for constructing centrally symmetric parts of a cubic parabola of two kinds according to given parameters, as well as one algorithm for constructing a section of a cubic parabola of a general kind by given starting and ending points and tangents in them. For this, a sufficient number of points is taken on the curve Bezier built in the geometric editor, compiled the equation of the cubic parabola and its coefficients are found. Further, for random points, a check is performed by substituting the values of the coordinates in the equation.

Considered constructive algorithms can be used to construct arcs of cubic parabola in various CAD and graphic editors.
Keywords: theory of solving geometric construction problems, constructive geometry, CAD, Kompas-3D, Bezier curve, cubic parabola.

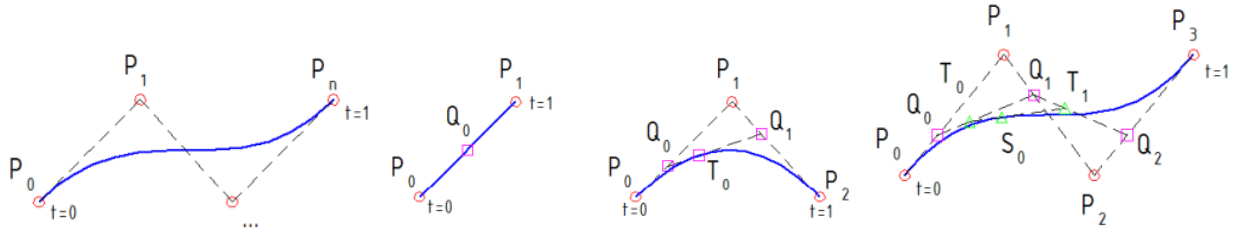
1. Ранее отмечалось [1], что теория решения геометрических задач на построение (конструктивная геометрия) в настоящее время оказалась заметно оторвана от инженерной практики, она не преподается инженерам, в отличие, например, от аналитической геометрии, вычислительной геометрии, численных методов, компьютерной графики и др. При этом конструктивная геометрия играет важную роль как в математическом и, в частности, геометрическом – развивает изобретательность, инициативу, конструктивные способности и др. [2–5], – так и в инженерном образовании (предоставляет инженеру точные и приближенные методы решения практических задач).

Поэтому исследование проблем конструктивной геометрии в условиях современности, развитие конструктивной геометрии с учетом возможностей геометрических редакторов и САПР – современных инструментов инженера – является актуальной задачей.

2. Одним из направлений таких исследований является изучение конструктивных свойств кусочно-гладких кривых – сплайнов [6–8], имеющихся во всех современных геометрических редакторах. Такими кривыми являются, например, кривые Безье. Можно отметить, что в последнее время сохраняется пристальный интерес к кривым Безье [9–11].

Кривые Безье были одновременно открыты Полем де Кастельжо («Citroën») и Пьером Безье («Renault») в 60-х годах прошлого века и получили широкое распространение в САПР и системах компьютерной графики, например, инструменты построения кривых Безье есть в САПР «Компас-3D», SolidWorks, геометрических редакторах 3D Studio Max, Blender, графических редакторах Adobe Flash, Adobe Illustrator и др.

Сегмент кривой Безье задается набором точек $P_0 \ldots P_n$, из которых кривая проходит только через первую и последнюю точки. Остальные точки являются управляющими (рис. 1).



а) б) в) г)

Рис. 1. Сегменты кривой Безье: а – общего вида, б – первого порядка, в – второго порядка, г – третьего порядка

Сегмент кривой Безье первого порядка задается двумя точками P_0P_1, второго порядка – тремя $P_0P_1P_2$, третьего – четырьмя $P_0P_1P_2P_3$ и т.д. Известно, что сегменты кривых Безье являются алгебраическими кривыми [12]. Сегмент кривой Безье первого порядка – отрезок прямой, второго порядка – дуга квадратичной параболы, третьего порядка – дуга алгебраической кривой третьего порядка.

Целью настоящего исследования является экспериментальная проверка того, что сегменты кривой Безье третьего порядка при определенном расположении управляющих вершин представляют собой дуги кубических парабол. Настоящая статья дополняет материалы ранее сделанного доклада [13], где предложен ряд конструктивных алгоритмов построения сегментов кривой Безье третьего порядка, сходных по свойствам с дугами кубических парабол. В настоящей работе выполняется их экспериментальная вычислительная проверка.

3. Рассмотрим подробнее кубические параболы (рис. 2).

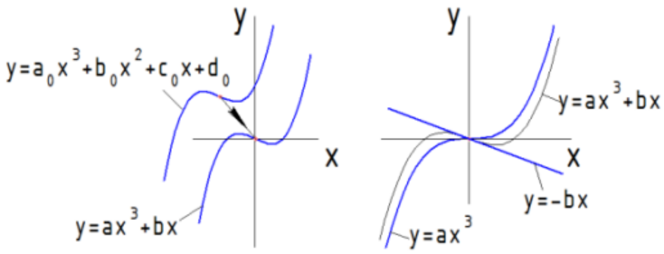


Рис. 2. Кубические параболы разных видов и их уравнения

Кубическая парабола задается уравнением вида:

$$y = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 \qquad (1)$$

В этом уравнении четыре свободных коэффициента, т.е. кривая в общем случае имеет четыре степени свободы или параметра [14]. Подсчет параметров геометрических фигур рассматривает теория параметризации – параметрическая геометрия (прикладные аспекты) – и вычислительная геометрия (теоретические аспекты). Число параметров одной и той же фигуры в одном и том же пространстве есть величина постоянная независимо от способа подсчета параметров. Параметры делят на параметры формы (зависят только от вида фигуры) и параметры положения (зависят от пространства). Максимальное число параметров положения на плоскости – 3: сдвиг вдоль осей x, y и поворот. Кубическая парабола вида (1), имеющая четыре параметра, сдвигом (минус два параметра) приводится к виду (рис. 2):

$$y = ax^3 + bx \qquad (2).$$

В уравнении (2) всего два свободных коэффициента или параметра.

Чтобы привести параболу вида (2) к виду:

$$y = ax^3 \qquad (3)$$

– уже требуется аффинное преобразование, меняющее не только положение, но и форму кривой. Парабола вида (3) имеет один параметр (один коэффициент) и отличается от кубической параболы $y=x^3$ степенью сжатия вдоль оси y (тоже аффинное преобразование).

Поэтому можно сказать, что кубическая парабола имеет два параметра формы (степень сжатия и угол наклона касательной в центре), остальные – параметры положения. Наконец, отметим, что парабола общего вида (1) может быть дополнительно повернута относительно центра. Такой поворот не закладывается в уравнение (1) и может быть учтен лишь в общем уравнении кривых третьего порядка. Общее число параметров у кубической параболы, таким образом, равно 5, из них два – параметры формы.

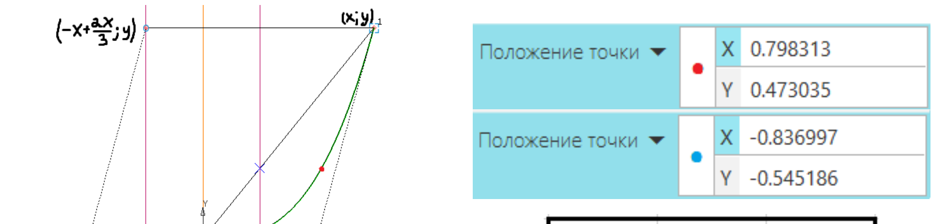
С точки зрения конструктивной геометрии повернутые и ориентированные вертикально параболы идентичны, если известно направление условной оси y (несобственная точка кривой). Также идентичны кривые с центром в начале координат и в произвольной известной точке.

Поэтому, если далее удастся построить параболы вида (2) и (3), то при известных центре кривой и оси y соответствующие алгоритмы будут применимы к более общим кривым.

4. *Алгоритм КПЦ1Т*. Построение центрально-симметричной дуги кубической параболы вида $y=ax^3$. Если дана точка 1 или 2, и построение выполнено как показано на рис. 3, тогда сегмент кривой Безье представляет собой центрально-симметричный участок кубической параболы вида (3). Точки 1 и 2 центрально-симметричный относительно центра кривой.

Для вычислительной проверки алгоритма взяты значения координат точки 1, подставлены в уравнение (3), найдено значение коэффициента a (0,929766). Далее для некоторого числа случайных точек (пример показан на рис. 3 красным и голубым цветом) выполнена вычислительная проверка подстановкой значений координат в полученное уравнение.

Проверка показала, что построенный при помощи алгоритма КПЦ1Т сегмент кривой Безье является центрально-симметричным участком кубической параболы вида (3).

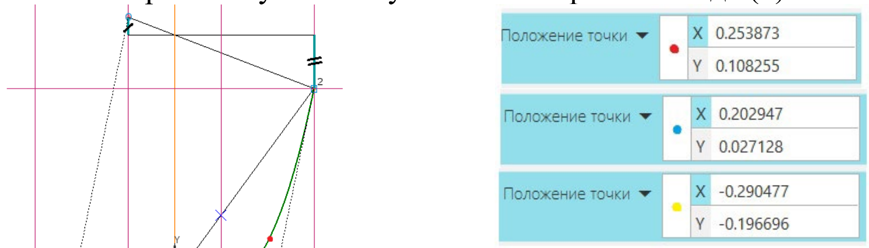


a	x	y
0,929766	0,798313	0,473035
$y = ax^3 =$	0,473035	

a	x	y
0,929766	-0,836997	-0,545186
$y = ax^3 =$	-0,545186	

Рис. 3. Построение участка кубической параболы вида (3) и проверка

5. *Алгоритм КПЦК1Т*. Построение центрально-симметричной дуги кубической параболы вида $y=ax^3 + bx$. Если дана точка 1 или 2 и известно направление касательной в центре и построение выполнено как показано на рис. 4, тогда сегмент кривой Безье представляет собой центрально-симметричный участок кубической параболы вида (2).



a	b	x1	y1
12,5835	-0,384614	0,253873	0,108255
$y=ax^3+bx=$	0,108255		

a	b	x2	y2
12,5835	-0,384614	0,202947	0,027128
$y=ax^3+bx=$	0,027128		

a	b	x2	y2
12,5835	-0,384614	-0,290477	-0,196696
$y=ax^3+bx=$	-0,196696		

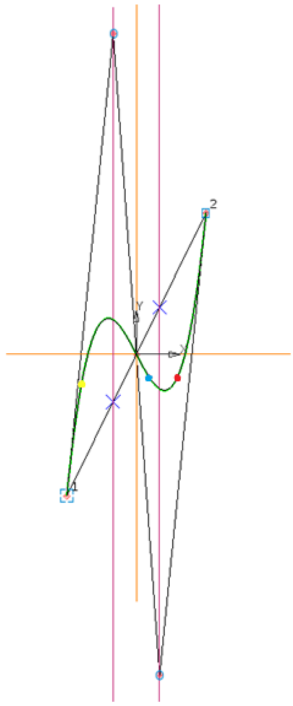
Рис. 4. Построение участка кубической параболы вида (2) и проверка

Для вычислительной проверки алгоритма взяты значения координат двух точек (показаны красным и голубым), подставлены в уравнение (2), найдены значения коэффициентов *a* (12,5835) и *b* (–0,384614). Далее для некоторого числа случайных точек (пример показан на рис. 4 желтым цветом) выполнена вычислительная проверка подстановкой значений координат в полученное уравнение.

Проверка показала, что построенный при помощи алгоритма КПЦК1Т сегмент кривой Безье является центрально-симметричным участком кубической параболы вида (2).

6. *Алгоритм КПЦ1ТК*. Построение центрально-симметричной дуги кубической параболы вида $y=ax^3 + bx$. Если дана точка 1 или 2 и известно направление касательной в ней и построение выполнено как показано на рис. 5, тогда сегмент кривой Безье представляет собой центрально-симметричный участок кубической параболы вида (2).

Для вычислительной проверки алгоритма взяты значения координат двух точек (показаны красным и голубым), подставлены в уравнение (2), найдены значения коэффициентов *a* (1,57973) и *b* (–1,92608). Далее для некоторого числа случайных точек (пример показан на рис. 5 желтым цветом) выполнена вычислительная проверка подстановкой значений координат в полученное уравнение.



a	b	x1	y1
1,57973	-1,92608	0,931819	-0,516616
$y=ax^3+bx=$		-0,516616	

a	b	x2	y2
1,57973	-1,92608	0,290048	-0,520108
$y=ax^3+bx=$		-0,520108	

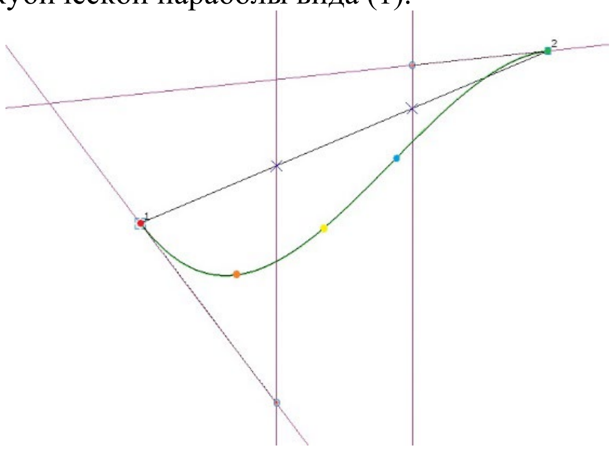
a	b	x2	y2
1,57973	-1,92608	-1,251015	-0,683392
$y=ax^3+bx=$		-0,683392	

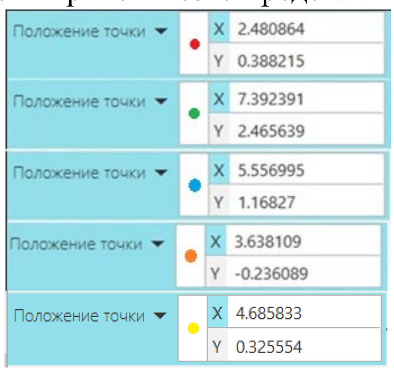
Рис. 5. Построение участка кубической параболы вида (2) и проверка

Проверка показала, что построенный при помощи алгоритма КПЦ1ТК сегмент кривой Безье является центрально-симметричным участком кубической параболы вида (2).

7. Дальнейшие эксперименты, в частности, разделение сегмента кривой Безье, являющегося участком кубической параболы вида (2), на части и изучение этих частей позволило найти алгоритм построения участка кубической параболы вида (1), если известны начальная и конечная точки и касательные в них.

Алгоритм КП2ТК. Если даны точки 1 и 2 и направления касательных в них и построение выполнено, как показано на рис. 6, тогда сегмент кривой Безье представляет собой участок кубической параболы вида (1).





a	b	c	d	x	y
-0,0855	1,41162	-6,74747	9,745238	4,685833	0,325554
$y = ax_1^3 + b*x_1^2 + c*x_1 + d =$				0,325554	

Рис. 6. Построение участка кубической параболы вида (1) и проверка

Для вычислительной проверки алгоритма взяты значения координат четырех точек (показаны красным, зеленым, голубым и оранжевым цветом), подставлены в уравнение (1), найдены значения коэффициентов a_0 (–0,0855), b_0 (1,41162), c_0 (–6,74747), d_0 (9,745238). Далее для некоторого числа случайных точек (пример показан на рис. 6 желтым цветом) выполнена вычислительная проверка подстановкой значений координат в полученное уравнение.

Проверка показала, что построенный при помощи алгоритма КП2ТК сегмент кривой Безье является участком кубической параболы вида (1). Этот алгоритм, очевидно, обобщает предыдущие для случая двух произвольных касательных в начальной и конечной точках (в предыдущих алгоритмах касательные на концах были параллельны).

8. Рассмотрим вопрос построения кубических парабол с точки зрения конструктивной геометрии. Разделяя параметры кривой в общем виде, как было показано в [15, 16] на точечные (*p*), линейные (*t*) и числовые (*v*) можем составить таблицу комбинаций определителей.

Таблица 1

Некоторые параметрические определители кубической параболы

№ п/п	Определитель	Описание
1.	p_0p_0p	Две особые точки, одна случайная точка
2.	p_0p_0t	Две особые точки, случайная линия (касательная)
3.	p_0p_0v	Две особые точки, число
4.	p_0t_0p	Особая точка, особая линия, случайная точка
5.	p_0t_0t	Особая точка, особая линия, случайная линия
6.	p_0t_0v	Особая точка, особая линия, число
7.	p_0ppp	Особая точка, три случайные точки
8.	p_0ppt	Особая точка, две случайные точки, случайная линия
9.	p_0ppv	Особая точка, две случайные точки, число
10.	p_0ptt	Особая точка, случайная точка, две случайные линии
11.	p_0ptv	Особая точка, случайная точка, случайная линия, число
12.	p_0pvv	Особая точка, случайная точка, два числа
13.	p_0ttt	Особая точка, три случайные линии
14.	p_0ttv	Особая точка, две случайные линии, число
15.	p_0tvv	Особая точка, случайная линия, два числа
16.	p_0vvv	Особая точка, три числа
17.	t_0t_0p	Две особые линии, случайная точка
18.	t_0t_0t	Две особые линии, случайная линия
19.	t_0t_0v	Две особые линии, число
20.	ppppp	Пять случайных точек
	и т.д.	

Особыми точками кривых являются центры, фокусы, вершины и т.п. Особыми линиями – являются директрисы, оси, хотя можно предположить, что по мере развития конструктивной геометрии найдутся и другие особые линии, в том числе кривые. Случайные точки могут быть собственные, несобственные, мнимые. В качестве случайных линий обычно рассматривают касательные – прямые или кривые, но это необязательно – в качестве такой линии может выступать, например, нормальная прямая, ортогональная окружность и пр.

Интерпретация определителей каждого случая – отдельная задача. Некоторые определители очевидны: комбинация 7 – центр (p_0), три точки (ppp). Некоторые комбинации могут давать несколько определителей: комбинация 9 – центр (p_0), две точки (pp), угол поворота или степень сжатия (v). В частности, задание направления оси *y* удобно рассматривать как точечный параметр (p) с несобственной точкой. Для некоторых комбинаций трудно указать подходящий определитель, но когда-то, вероятно, это будет сделано.

Рассмотренные в настоящей работе алгоритмы являются частными случаями построений для следующих определителей:

- *КПЦ1Т, КПЦК1Т, КПЦ1ТК* – p_0ppt, где p_0 – центр, pp – направление оси и случайная точка, t – касательная в центре или данной точке. Вариант, когда прямая t является случайной касательной, еще требует рассмотрения.
- *КП2ТК* – ppptt, где ppp – направление оси, начальная и конечная точки, tt – касательные в начальной и конечной точках. Вариант, когда касательные tt – случайные прямые, еще требует рассмотрения.

Как видно из табл. 1, значительно большее число возможных определителей еще не рассмотрены, и дальнейшие исследования позволят найти соответствующие алгоритмы.

9. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

- Сегмент кривой Безье при определенном расположении управляющих точек является участком кубической параболы того или иного вида. Это позволяет использовать кубические параболы при решении задач графическим способом наравне с прямыми, окружностями и др.
- Кривые Безье имеются во многих геометрических и графических редакторах. Полученные алгоритмы можно в них применять для решения практических задач.
- Геометрический редактор, как инструмент геометрических построений, позволяет проводить вычислительные эксперименты для проверки гипотез в области конструктивной геометрии. Точность представления значений координат точек, углов и пр., в геометрическом редакторе достаточна, чтобы установленные таким способом факты нельзя было считать случайностью. Проверенные гипотезы в дальнейшем можно доказывать аналитически, но для практического использования вычислительной проверки достаточно.
- Дальнейшее исследование кривых Безье в вопросах представления кусков кубических парабол позволит найти новые алгоритмы для других комбинаций исходных данных и определителей.

Литература

1. *Бойков А.А., Кадыкова Н.С.* О системах построений, связанных с векторными геометрическими редакторами // Журнал естественнонаучных исследований. – 2021. – Т. 6, №2. – С. 19–30.
2. *Четверухин Н.Ф.* Методы геометрических построений. Изд. 3. – М.: URSS, 2018. – 152 с. – ISBN 978-5-9710-4793-3.
3. *Петерсен Ю.* Методы и теории для решения геометрических задач на построение, приложенные более чем к 400 задачам. – М.: URSS, 2016. – 128 с. – ISBN 978-5-9710-2550-4
4. *Александров И.И.* Сборник геометрических задач на построение (с решениями). – М.: URSS, 2018. – 174 с. – ISBN 978-5-484-01452-1.
5. *Аргунов Б.И., Балк М.Б.* Геометрические построения на плоскости. Изд. 2-е. – М.: Учпедгиз, 1957. – 268 с.
6. *Захаров А. А., Захарова Ю. В.* Содержание курса «Геометрическое моделирование» для направления подготовки «Математика и компьютерные науки» // Геометрия и графика. – 2022. – Т. 9, №4. – С. 35–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-35-45.
7. *Короткий В. А., Витовтов И. Г.* Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9, №1. – С. 3–19. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19
8. *Короткий В. А.* Кубические кривые в инженерной геометрии // Геометрия и графика. – 2020. – Т.8, №3. – С. 3–24. – DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24.
9. *Сычева А. А.* Функционально-воксельное моделирование кривых Безье // Геометрия и графика. – 2022. – Т. 9, №4. – С. 63–72. – DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-63-72
10. *Конопацкий Е. В., Бездитный А. А.* Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования // Геометрия и графика. – 2022. – Т.9, №4. – С. 11–21. – DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21
11. *Короткий В. А.* Конструирование G2-гладкой составной кривой на основе кубических сегментов безье // Геометрия и графика. – 2021. – Т.9, №2. – С. 12–28. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-12-28
12. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 272 с. – ISBN 978-5-7695-7168-8
13. Бойков А.А. Конструктивные алгоритмы построения дуг кубической параболы при помощи кривой Безье // Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы : сборник трудов Международной научно-практической конференции, 24

апреля 2022 года, Брест, Республика Беларусь, Новосибирск, Российская Федерация. – Брест: БрГТУ, 2022.
14. *Рыжов Н.Н.* Параметрическая геометрия. – М.: МАДИ, 1988. – 56 с.
15. *Бойков А. А*. Элементы исчислительной геометрии как основа в разработке геометрического редактора // Одиннадцатая международная научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия-2016»: Материалы конференции. Т.5. – Иваново, 2016. – С. 161–162.
16. *Бойков А. А., Малахов Д.А.* Точное представление параболы в САПР «Компас-3D» при помощи кривой Безье // Надежность и долговечность машин и механизмов. Сборник материалов IX Всерос. научно-практической конференции. – Иваново, 2018. – С. 407–411.