

УДК 621

DOI:

О.Н. Дмитроченко

РАСШИРЕННЫЙ ДЕСЯТИЧНЫЙ НОМЕНКЛАТУРНЫЙ КОД *DNCM* ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрена модификация ранее разработанного десятичного номенклатурного кода *dncm* для описания и классификации произвольного конечного элемента. Предложена новая система классификации, описывающая неохваченные ранее

большие группы элементов сложной геометрии и кинематики.

Ключевые слова: конечный элемент, классификация, номенклатура, десятичный код.

O.N. Dmitrochenko

EXTENDED DECIMAL NOMENCLATURE *DNCM* CODE FOR DESCRIPTION OF ARBITRARY FINITE ELEMENT

The purpose of the work – extension of a systematic classification of finite elements offered earlier by the author with the purpose of inclusion in it new types of elements with a complex kinematic structure.

There is offered a modification of a decimal nomenclature *dncmkot* code of finite elements. The code is based on the presentation of geometry and structure of unit coordinates by a set of integral parameters: d – dimensionality, n – unit number, c – structure and number of coordinates in a unit, m – polynomial number. It is emphasized that there is a wide class of elements which does not fall under this classification. In these elements there is first introduced an intermediate element and then a linear transformation between them.

It is offered to designate for some wide groups of elements one or some parameters – n , c , m and others having a clear sense which modify a procedure of the formation of functions of an element form. There are shown examples of the description of elements with a complex kinematic structure on the basis of the offered modification of a decimal code.

The offered modified decimal nomenclature code of finite elements allows describing the existing and creating new finite elements of a wide class according to the specified *dncmkot* code.

Key words: finite element, classification nomenclature, decimal code .

Введение

Данная статья посвящена новому способу построения универсальной классификации конечных элементов и является продолжением и обобщением работы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**] Идея введения десятичного номенклатурного кода в виде *dncm* с произвольными положительными разрядами d , n , c , m и т.д. была впервые предложена в работе 6]. В сформированном и законченном виде этот материал был сформулирован как формальный алгоритм в работе **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Однако конечные элементы настолько разнообразны, что эта процедура требует модификации для учёта всех особенностей, возникающих в приложениях.

В работе 8] ранее были рассмотрены более сложные элементы. Их общая осо-

бенность такова: они обладают неким набором узловых координат Z , который формально соответствует некоторому коду *dncm*. Однако кинематика такого элемента требует, чтобы сперва был создан вспомогательный элемент ($d\eta\zeta\mu$) с использованием другого числа узлов η и кинематических параметров ζ , μ , обладающий другим набором узловых координат \check{Z} . После этого некоторое линейное преобразование T над координатами приводит к элементу, который можно систематически обозначить *dncm* ($d\eta\zeta\mu$) $\{\check{Z} = T(Z)\}$ и назвать расширенным десятичным кодом, как было предложено в работе 8]. Эта нотация значительно расширяет круг охватываемых элементов, но получает также и недостаток в виде потери лаконичности записи в отличие от исходной *dncm*.

В данной статье впервые делается попытка вернуть расширенному коду лаконичность исходного кода *dncm*, а именно: для обозначения специальных групп элементов, имеющих широкое применение в приложениях, параметрам *n*, *c*, *m* и т.д.

1. Базовые элементы вида *dncm*

Большинство примеров, используемых в данной статье, связаны с двухмерными элементами. Поэтому идея десятичного кода *dncm* будет приведена только для них, без ущерба для общности в других случаях, описанных в предшествующей статье **Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Для обозначения конечных элементов вводится базовая трёхразрядная номенклатура *dnc*, содержащая следующие целые параметры:

d – размерность элемента, здесь *d* = 2;

n – число узлов элемента;

c – параметр, описывающий число и структуру координат в каждом узле.

Код *dnc* описывает элемент с *n* узлами, в которых введено *c* координат в узле. Данное обозначение может быть расширено до $d_{\eta \zeta}^{n c}$, если добавлены η узлов на сторонах элемента, каждый из которых имеет ζ узловых координат. Также используются расширения $d_{\pi \sigma}^{n c}$ и даже $d_{\pi \sigma}^{n c}$ для

разрешается принимать также и отрицательные значения, которые имеют чётко определённый смысл и влияют определённым образом на формальную процедуру построения элементов.

двух- и трёхмерных элементов, в которых введены дополнительные π узлов на гранях элемента и ν узлов в объёме трёхмерного элемента; σ и ζ – параметры, определяющие узловые координаты в соответствующих группах узлов. Обозначение $d_{\dots}^{n c}$ позволяет непосредственно определить число степеней свободы элемента *D* согласно следующему правилу:

$$D = |n|C(c) + |\eta|C(\zeta) + |\pi|C(\sigma) + |\nu|C(\zeta). \quad (1)$$

Числа узлов в формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.** взяты по модулю, потому что в общем случае они могут быть отрицательными (для обозначения специальных случаев). Функция *C(c)* задана ниже соотношениями (4) и показывает, сколько узловых координат соответствует коду *c*.

Интерполяционный полином произвольного двухмерного элемента с кодом $Z_{\pi \sigma}^{nc}$ зависит от двух локальных координат *x* и *y* и может быть записан таким образом:

$$Z_{\pi \sigma}^{nc}(x, y) = \sum_{k=0}^{D-1} a_{k+1} x^{\alpha_{Dk}^{21}} y^{\alpha_{Dk}^{22}} = \underbrace{\{x^{\alpha_{D0}^{21}} y^{\alpha_{D0}^{22}} \ x^{\alpha_{D1}^{21}} y^{\alpha_{D1}^{22}} \ \dots \ x^{\alpha_{D,D-1}^{21}} y^{\alpha_{D,D-1}^{22}}\}}_{\mathbf{x}(x,y)} \cdot \underbrace{\{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_D\}}_{\mathbf{a}}^T = \mathbf{x}(x, y) \cdot \mathbf{a}, \quad (1)$$

где α_{Dk}^{21} , α_{Dk}^{22} – показатели степеней полиномиальных членов из матрицы, определённой в работе **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]; индекс *k* пробегает

диапазон 0, ..., *D* – 1. В той же работе показано, что элементы этой матрицы могут быть вычислены согласно несложному алгоритму:

$$\begin{aligned} g &= \lfloor (\sqrt{1+8(k+1)} - 1)/2 - 1 \rfloor; & d &= \lfloor (\sqrt{1+8D} - 1)/2 - 1 \rfloor; \\ k_0 &= g(g+1)/2; & k_{12} &= \{D=12\} \{d=g\}; \\ B &= \lfloor (k_0 + g - k - k_{12})/2 \rfloor; & M &= ((k_0 + g - k - k_{12}) \bmod 2) \cdot (1 - \{d=g\} \{d=k+1\}); \\ \alpha_{Dk}^{21} &= (1-M)B + M(g-B); \\ \alpha_{Dk}^{22} &= (1-M)(g-B) + MB \equiv g - \alpha_{Dk}^{21}. \end{aligned}$$

1.1. Граничные условия в узлах элемента

Полиномиальные коэффициенты *a_k* в формуле (1) определяются из граничных

условий. Они формулируются в каждом узле элемента с индексом *i*; в каждом та-

ком узле может быть введено одно граничное условие (или более) с индексом j . Каждое условие подразумевает, что значение производной определённого порядка от полинома Z в данном узле должно быть равно узловой координате. Таким образом, в самом общем случае, рассматриваемом в

данной работе, следующая система линейных уравнений может быть записана с использованием предварительно подготовленных массивов E_{ij} и B_{lk} (матрица перемешивания узловых координат, которая чаще всего равна единичной):

$$\frac{\partial^{\alpha_{DE_{ij}}^{21} + \alpha_{DE_{ij}}^{22}} Z^{2nc}(x, y)}{\partial x^{\alpha_{DE_{ij}}^{21}} \partial y^{\alpha_{DE_{ij}}^{22}}} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \sum_{k=1}^D B_{lk} z_k \equiv \sum_{r=1}^N \sum_{s=0}^{\dim[E_r]-1} B_{ijrs} Z_{r,s} \quad (2)$$

В уравнении (2) массив целых чисел E_{ij} содержит порядки производных, требуемых для выполнения граничных условий. Первый индекс i пробегает все узлы элемента: $i = 1, \dots, N$; $N = \dim[E]$; диапазон изменения индекса $j = 0, \dots, \dim[E_i] - 1$ может изменяться в зависимости от индекса узла i , т.е. значение $\dim[E_i]$ равно числу граничных условий в узле i .

элементы даются в круглых скобках. В большинстве случаев структура массива одинакова для всех узлов и достаточно указать только фигурные скобки для одного узла: $E_{ij} = \{(E_{i0}), (E_{i1}), \dots\}$.

Ниже в работе массив E_{ij} представляется таким образом: $E_{ij} = \{(E_{10}), (E_{11}), \dots\}, \{(E_{20}), \dots\}, \dots$. Т.е. весь массив заключается в квадратные скобки, его часть, относящаяся к конкретному узлу, помещается в фигурные скобки, и, наконец, скалярные

В уравнении (2) узловые координаты обозначаются двумя эквивалентными способами: с использованием двух индексов, $Z_{r,s}$, где индекс r соответствует номеру узла, а s – индексу координаты в узле (начиная с 0); с использованием одного индекса, Z_k , где $k = 1, \dots, D$ – глобальный номер координаты в элементе. В разных частях работы одно из двух представлений оказывается более удобным, чем другое.

1.2. Параметр c для обозначения структуры узловых координат

Общая формула для вычисления значений E_{ij} для разных типов представления параметра c может быть записана так:

$$E_{ij} = \begin{cases} j & j=0, \dots, C(c)-1, \text{ если } c \leq 9 - \text{цифра} & (c = 3): E_{ij} = \{(0), (1), (2)\}; \\ I_j & j=0, \dots, C(c)-1, \text{ если } c - \text{двоичное} & (c = 1101): E_{ij} = \{(0), (2), (3)\}. \end{cases} \quad (3)$$

Функция $C(c)$, встречающаяся в формулах (3) и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, возвращает число узловых координат, соответствующих узловому коду c ; эта функция определена так:

$$C(c) = \begin{cases} c, & \text{если } c \leq 9 - \text{цифра} : C(3) = 3; \\ \text{число единиц в } c, & \text{если } c - \text{двоичное} : C(1101) = 3. \end{cases} \quad (4)$$

Параметр c в виде одной десятичной цифры, $c \leq 9$

В самом распространённом случае параметр c равен числу производных от переменной Z , использующихся как узловые степени свободы: $Z, \frac{d}{dx} Z, \frac{d^2}{dx^2} Z, \dots, \frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}} Z$. Т.е. предполагается непрерывный ряд производных, начиная с 0-й производной (сама переменная Z) и заканчивая $(c - 1)$ -й производной.

Двоично-десятичный параметр c

В узлах конечных элементов иногда некоторые из производных могут отсутствовать в списке узловых переменных. В таких случаях может быть использовано двоично-десятичное представление параметра c . Например, на рис. 1 изображён треугольный элемент Морли 9]. Он имеет 3 узла в вершинах, в каждой из которых введена 1 координата – перемещение узла, и 3 узла на серединах сторон, в которых вве-

дена координата, являющаяся нормальной производной. Эта координата может быть закодирована двоично-десятичным кодом 10, где 0 означает отсутствие координаты-перемещения, а 1 – производную по нормали. Матрица E_{ij} в этом случае имеет вид $E_{ij} = [\{(0)\}, \{(0)\}, \{(0)\}, \{(1)\}, \{(1)\}, \{(1)\}]$. В

другом примере, приведенном в тексте ниже, использован код 110000, соответствующий вторым производным $\partial^2 Z / \partial x^2$ и $\partial^2 Z / \partial y^2$. Подробнее про двоичное кодирование координат можно почитать в [7].

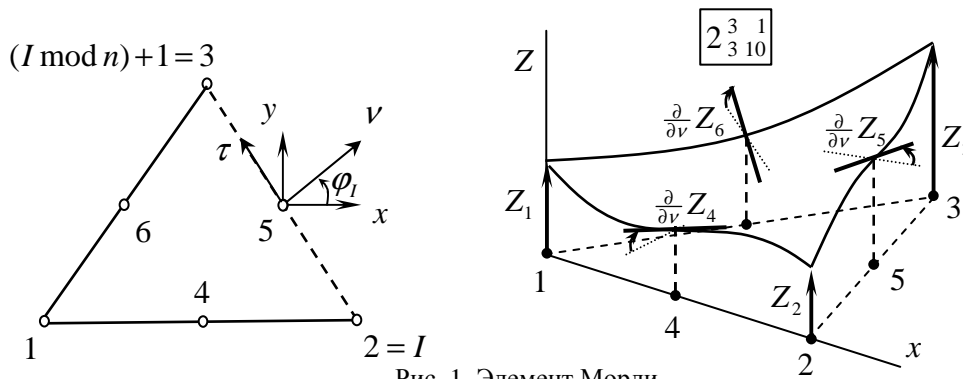


Рис. 1. Элемент Морли

1.3. Автоматическое формирование функций формы элемента

Подстановка полинома **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в уравнение (2) приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{D-1} \underbrace{(\alpha_{Dk}^{21})_{-\alpha_{DEij}^{21}} (\alpha_{Dk}^{22})_{-\alpha_{DEij}^{22}}}_{W_{l,k+1}} x_i y_i a_{k+1} = \sum_{k=1}^D B_{lk} z_k, \quad (5)$$

для $i=1, \dots, N$
для $j=0, \dots, \dim[E_i]-1$
 $l=l+1$

которая имеет матричную форму $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}$.

Величины $(k-1)_{-j}$ представляют собой падающий факториал Похгаммера:

$$(\alpha)_{-r} = \underbrace{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-r+1)}_{r \text{ множителей}} = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-r)!}, & \text{если } \alpha \geq r; \\ 0, & \text{если } \alpha < r. \end{cases}$$

Компоненты матрицы \mathbf{W} определены в самом уравнении (5). После решения его относительно вектора \mathbf{a} полином $Z^{2nc}(x, y)$ принимает вид

$$Z^{2nc}(x, y) = \underbrace{\mathbf{x}(x, y) \cdot \mathbf{W}^{-1}}_{\mathbf{s}^{2nc}(x, y)} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{s}^{2nc}(x, y) \cdot \mathbf{z}. \quad (6)$$

Матрица \mathbf{W} постоянна, вектор-строка \mathbf{x} зависит от локальных координат x и y , вектор-столбец \mathbf{z} содержит узловые коор-

динаты, вектор-строка $\mathbf{s}^{2nc}(x, y)$ содержит функции формы.

2. Расширенный десятичный код элемента

В данном разделе впервые вводится расширенный десятичный код с целью охватить им гораздо больший круг элементов, имеющих сложную кинематику. Для обозначения специальных групп элементов, имеющих широкое применение в при-

ложениях, параметрам n, c, t и т.д. предлагается назначать отрицательные значения, которые имеют чётко определённый смысл и влияют определённым образом на формальную процедуру построения элементов, описанную выше.

2.1. Дополнительные функции формы

Известно, что билинейный элемент Q4, или 2412 в предложенной нотации,

имеет избыточную сдвиговую жёсткость при изгибе [4]. Одна из возможностей ис-

править этот недостаток – использование дополнительных (внеузловых) функций формы. Два дополнительных узла вводятся для исправленного элемента Q6 как пока-

зано на рис. 2, слева (иногда они вводятся внутри элемента).

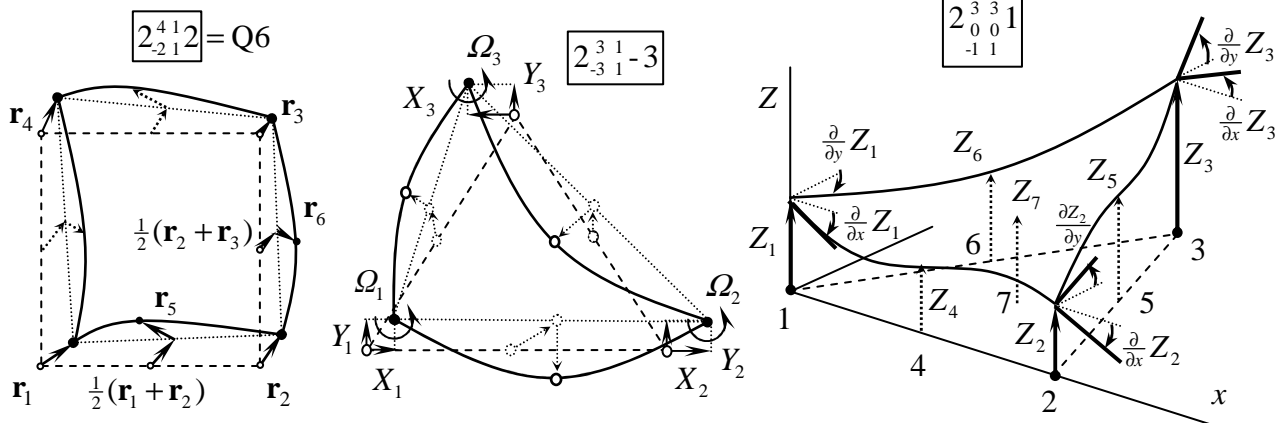


Рис. 2. Элемент Q6 с дополнительными функциями формы; треугольник Оллмана; треугольник Базли

В работе [8] этот элемент был обозначен следующим расширенным кодом:

$$2_2^4 12(2_2^4 12) \{ \tilde{z}_i = z_i; i=1, \dots, 4; \tilde{z}_i = z_i + \frac{1}{2}(z_{i-4} + z_{i-4+1}); i=5, 6 \}. \quad (7)$$

В данной работе этот элемент обозначается простым кодом $2_{-2}^4 12$ (рис. 2). Знак «минус» в числе узлов -2 отражает тот факт, что дополнительные узлы вводятся временно, т.е. значение -2 имеет смысл ± 2 . Кроме того, он ссылается на специфическое преобразование координат в формуле (7) и описанное ниже. И вообще, любой элемент, использующий допол-

нительные функции формы, будет обозначаться $d_{-n}^n 1m$.

Узловые координаты z_5 и z_6 временных узлов являются не просто их перемещениями, а трактуются как смещения этих узлов относительно середины отрезков (1, 2) и (2, 3) при смещённых узлах 1, 2 и 3. Уравнения (2) при этом принимают следующий явный вид:

$$Z^{d_{-n}^n 1}(x_i, y_i, \dots) = z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$Z^{d_{-n}^n 1}(x_i, y_i, \dots) = z_i + \frac{1}{2}(z_{i-n+e} + z_{(i-n+e \bmod n)+1}), \quad i = n+1, \dots, n+\eta.$$

С использованием матрицы B_{ij} в уравнении (2) это эквивалентно уравнению

$$Z^{d_{-n}^n 1}(x_i, y_i, \dots) = \sum_{j=1}^N B_{ij}^{d_{-n}^n 1} z_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

со следующим значением матрицы B_{ij} :

$$B_{ij}^{d_{-n}^n 1} = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{i-n, j} + \frac{1}{2} \delta_{(i-n) \bmod n+1, j-\delta_{d, 3} \delta_{i, n+\eta} n/2},$$

где δ_{ij} – это символ Кронекера.

Функции формы после решения уравнения (8) примут вид

$$s_{i,0}^{d_{-n}^n 1} = s_{i,0}^{dn1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$s_{n+i,0}^{d_{-n}^n 1} = 1 - \xi_i^2, \quad i = 1, \dots, \eta, \quad (\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta).$$

Элементы, использующие дополнительные функции формы: упомянутый $2_{-2}^4 12$, объёмный одиннадцатиузловой $3_{-3}^8 13$ на основе шестигранника-кубика и

семиузловой $3_{-1}^6 13$ на основе треугольной призмы. Явный вид матриц $\mathbf{B}^{d_{-n}^n 1}$ для них следующий:

$$\mathbf{B}^{2,2^4 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{3,3^8 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{3,3^5 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Геометрическая конденсация узлов

В данном параграфе в качестве примера приводится элемент 5-узловой призмы, для построения которой применяется конденсация узлов, и объясняется, как

$$\{x_i, y_i, z_i\} = \{\pm 1, \pm 1, -1\}, \quad i = 1, \dots, 4;$$

Интуитивно простой код 351 не может использоваться здесь, потому что он диктует полином

$$Z^{351}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{5-1} a_{k+1} x^{\alpha_{5k}^{31}} y^{\alpha_{5k}^{32}} z^{\alpha_{5k}^{33}}, \text{ который не}$$

$$= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x y z$$

содержит квадратичных членов. Вместо

$$Z^{3,3^5 1}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{8-1} a_{k+1} x^{\alpha_{8k}^{31}} y^{\alpha_{8k}^{32}} z^{\alpha_{8k}^{33}} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x y + a_6 x z + a_7 y z + a_8 x y z.$$

Коэффициенты a_1, \dots, a_8 получаются, как обычно, из системы линейных уравнений $Z^{3,3^5}(x_i, y_i, z_i) = Z_i, \quad i = 1, \dots, 5$, вида (2),

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{Bmatrix},$$

Для нахождения решения такой системы для неизвестных a_1, \dots, a_8 можно применить псевдообратную матрицу Мора–Пенроуза для матрицы $\mathbf{W}_{[5 \times 8]}$:

$$\mathbf{a}_8 = \mathbf{W}_{[8 \times 5]}^+ \cdot \mathbf{z}_5 = \mathbf{W}_{[8 \times 5]}^T \cdot \underbrace{[\mathbf{W}_{[5 \times 8]} \cdot \mathbf{W}_{[8 \times 5]}^T]^{-1}}_{=\text{diag}[8,8,8,8,2]} \cdot \mathbf{z}_5. \tag{10}$$

Наконец, функции формы 5-узловой пирамиды вычисляются по формуле (6):

$$s_{i,0}^{3,3^5} = \frac{1}{8}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 - \zeta), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{в данном случае } \xi = x, \eta = y, \zeta = z);$$

$$s_{5,0}^{3,3^5} = \frac{1}{2}(1 + \zeta).$$

Таким образом, специальная комбинация $n < 0$ и $\eta > 0$ используется в коде $3,3^5 1$ для представления элементов, которые получаются из вспомогательного элемента с $|n| + |\eta|$ узлами после конденсации его η узлов в соответствии с формулами (9) и (10). Число $|n|$ показывает число узлов после конденсации.

данная техника описывается с помощью расширенного кода *dncm*. Узлы единичной призмы обычно заданы так:

$$\{x_5, y_5, z_5\} = \{0, 0, +1\}.$$

этого элемент пирамиды обозначается $3,3^5 1$ или просто $3,3^5 1$ (мотивация приведена ниже), и полином содержит $D = 5 + 3 = 8$ слагаемых, как для базового элемента единичного параллелепипеда:

которая в данном случае неквадратная, размером 5×8 :

$$\text{или} \quad \mathbf{W}_{[5 \times 8]} \cdot \mathbf{a}_8 = \mathbf{z}_5. \tag{9}$$

Другие элементы этого типа – четырёхугольная пирамида $3,3^5 1$ и трёхгранная пирамида $3,3^6 1$ с дополнительными узлами на $7 1$ $5 1$ серединах сторон. В обоих случаях интерполяционные полиномы базируются на 20-членном полиноме параллелепипеда, так как $5 + 8 + 7 = 20$ и $6 + 9 + 5 = 20$.

данном параграфе для краткости). Отрицательное значение -1 может пониматься как ± 1 , так как этот узел вводится временно для увеличения порядка полинома до 10

членов. Его перемещение Z_7 не входит в число координат, так как его заменяют на средневзвешенное значение перемещений шести узлов, показанных на рисунке.

$$Z^{\text{Baz}}(x_7, y_7) = -\frac{1}{9}(Z_1 + Z_2 + Z_3) + \frac{4}{9}(Z_4 + Z_5 + Z_6), \quad (14)$$

где перемещения Z_4, Z_5, Z_6 в дополнительных узлах на сторонах также вычисляются через средневзвешенные узловые переме-

щения и наклоны в узлах 1, 2 и 3 ($i = 1, \dots, 3$):

$$Z_{3+i} = \frac{1}{2}(Z_i + Z_{i \bmod 3+1}) - \frac{1}{8}((Z_{i \bmod 3+1,1} - Z_{i,1})(x_{i \bmod 3+1} - x_i) + (Z_{i \bmod 3+1,2} - Z_{i,2})(y_{i \bmod 3+1} - y_i)).$$

За исключением граничного условия (14), которое соответствует строке $_{-1} 1$ в коде элемента, применяются обычные ус-

ловия для кода $^3 3$ в соответствии с уравнением (2):

$$Z^{\text{Baz}}(x_i, y_i) = Z_i, \quad \frac{\partial}{\partial x} Z^{\text{Baz}}(x_i, y_i) = Z_{i,1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} Z^{\text{Baz}}(x_i, y_i) = Z_{i,2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Таким образом, в этом случае матрица перемешивания узловых координат \mathbf{B} в уравнении (2) имеет размер 10×9 и являет-

ся почти единичной (кроме последней, 10-й строки):

$$B_{10,3i-2}^{\text{Baz}} = \frac{1}{3}, \quad B_{10,3i-1}^{\text{Baz}} = \frac{1}{18}(x_j - 2x_i + x_k), \quad B_{10,3i}^{\text{Baz}} = \frac{1}{18}(y_j - 2y_i + y_k), \quad (i, j, k) = \Theta(1, 2, 3).$$

Функции формы в явном выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{i,0}^{\text{Baz}}(x, y) &= L_i^2(L_i + 3L_j + 3L_k) + 2L_1L_2L_3, & \{i, j, k\} &= \Theta(1, 2, 3), \\ s_{i,1}^{\text{Baz}}(x, y) &= L_i^2((x_j - x_i)L_j - (x_i - x_k)L_k) - \frac{1}{2}(2x_i - x_k - x_j)L_1L_2L_3, \\ s_{i,2}^{\text{Baz}}(x, y) &= L_i^2((y_j - y_i)L_j - (y_i - y_k)L_k) - \frac{1}{2}(2y_i - y_k - y_j)L_1L_2L_3. \end{aligned}$$

2.5. Треугольные пластины с дискретными условиями Кирхгофа

В строительной механике известен треугольный элемент пластины с дискретными условиями Кирхгофа (DKT в англоязычной литературе) 4]. В каждом узле i он имеет три узловые координаты, как и в предыдущем случае, $Z_i, \frac{\partial}{\partial x} Z_i = Z'_{xi}$ и $\frac{\partial}{\partial y} Z_i = Z'_{yi}$, что формально соответствует коду 2331. Однако из-за наличия дефекта,

описанного выше, элемент DKT основан на вспомогательном элементе (2612), который имеет два полных полинома второго порядка с 6 членами. Вспомогательными координатами в каждом узле являются $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{Z}_i = \tilde{Z}'_{xi}$ и $\frac{\partial}{\partial y} \tilde{Z}_i = \tilde{Z}'_{yi}$. В работе 8] этот элемент имел обозначение

$$2331^{(2612)} \{ \tilde{Z}'_{xi} = Z'_{xi}; \tilde{Z}'_{yi} = Z'_{yi}; \tilde{Z}_{i+3}^n = \frac{1}{2}(Z_i^n + Z_{i \bmod 3+1}^n); \tilde{Z}_{i+3}^t = \frac{3}{2L_i}(Z_{i \bmod 3+1} - Z_i) - \frac{1}{4}(Z_i^t + Z_{i \bmod 3+1}^t); i=1, 2, 3 \} \quad (16)$$

Преобразование между наборами координат \tilde{Z} и Z в формуле (16) означает, что нормальные n и тангенциальные t производные от перемещений \tilde{Z} , вычисленные во вспомогательном элементе 2612, равны соответствующим производным от перемещений Z в искомом элементе в вершинах и серединах сторон треугольника, т.е.

в дискретном наборе точек (отсюда и название). Поскольку упомянутые производные в серединах сторон отсутствуют в наборе Z , они интерполируются через узловые значения, как указано в формуле. Матричный вид данного преобразования таков:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{Z}'_{x1} \\ \tilde{Z}'_{y1} \\ \tilde{Z}'_{x2} \\ \tilde{Z}'_{y2} \\ \tilde{Z}'_{x3} \\ \tilde{Z}'_{y3} \\ \tilde{Z}'_{x4} \\ \tilde{Z}'_{y4} \\ \tilde{Z}'_{x5} \\ \tilde{Z}'_{y5} \\ \tilde{Z}'_{x6} \\ \tilde{Z}'_{y6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{2} & \frac{s_1}{2} & 0 & 0 & \frac{c_1}{2} & \frac{s_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2L_1} & \frac{s_1}{4} & \frac{-c_1}{4} & \frac{3}{2L_1} & \frac{s_1}{4} & \frac{-c_1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2}{2} & \frac{s_2}{2} & 0 & \frac{c_2}{2} & \frac{s_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2L_2} & \frac{s_2}{4} & \frac{-c_2}{4} & \frac{3}{2L_2} & \frac{s_2}{4} & \frac{-c_2}{4} \\ 0 & \frac{c_3}{2} & \frac{s_3}{2} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2} & \frac{s_3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2L_3} & \frac{s_3}{4} & \frac{-c_3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2L_3} & \frac{s_3}{4} & \frac{-c_3}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z'_{x1} \\ Z'_{y1} \\ Z_2 \\ Z'_{x2} \\ Z'_{y2} \\ Z_3 \\ Z'_{x3} \\ Z'_{y3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{z}}^{2612} = \mathbf{T}_{12 \times 9}^* \cdot \mathbf{z}^{2331}.$$

Интерполяционные полиномы и матрица функций формы полученного элемента:

$${}_{2331(2612)} \mathbf{r}(x, y) = \mathbf{S}^{2612}(x, y) \cdot \tilde{\mathbf{z}}^{2612} = \underbrace{\mathbf{S}^{2612}(x, y) \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{12 \times 9}^*}_{\mathbf{S}^{2331(2612)}(x, y)} \cdot \mathbf{z}^{2331} = \mathbf{S}^{2331(2612)}(x, y) \cdot \mathbf{z}^{2331}.$$

Систематическое обозначение этого элемента следующее: $2_{-3}^3 110 - 3$. Значение – 3 вновь означает ± 3 , т.е. временное введение узлов на серединах сторон, а параметр

$\zeta = 110$ – это двоичный код производных в этих узлах. $2_{-3}^3 110 - 3$ можно сократить до 233-1.

2.6. Интегральные узловые координаты при $c < 0$

Элемент Вильсона. Существует класс элементов, в которых узловые координаты могут зависеть от интегралов по площади

(или граням) элемента. Простой пример – это элемент Вильсона (рис. 3, слева).

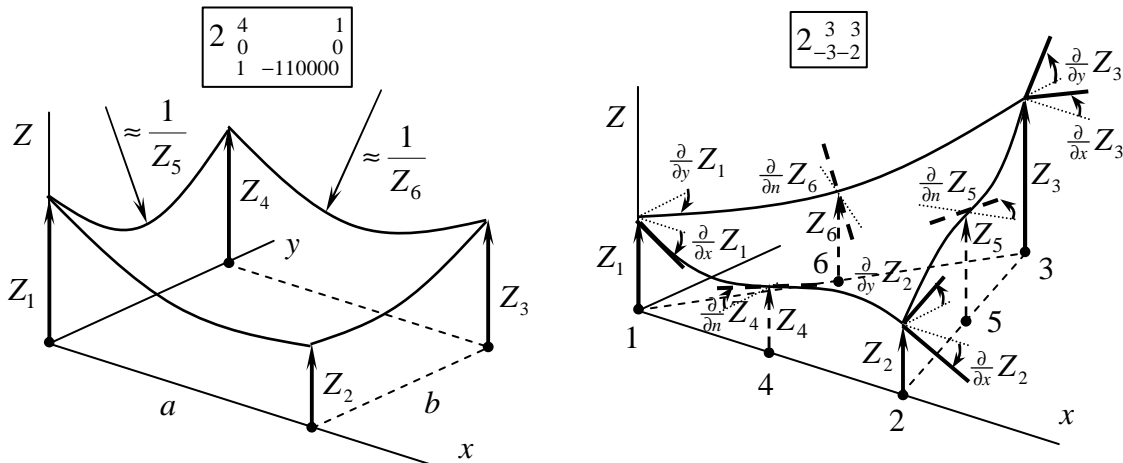


Рис. 3. Элемент Вильсона; элемент Шпехта

Поле перемещений элемента $Z(x, y)$, согласно формулам **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и (4), содержит 6 полиномиальных членов и 6 узловых координат. Четыре из них – это узловые пере-

мещения Z_1, \dots, Z_4 , а оставшиеся две – усреднённые по площади элемента значения вторых производных от перемещения по локальным направлениям x и y :

$$\begin{aligned}
 Z(x_1, y_1) &= Z_1, \quad Z(x_2, y_2) = Z_2, \quad Z(x_3, y_3) = Z_3, \quad Z(x_4, y_4) = Z_4, \\
 \frac{1}{ab} \int_0^a \left(\int_0^b \frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial y^2} dy \right) dx &= Z_5, \quad \frac{1}{ab} \int_0^a \left(\int_0^b \frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial x^2} dy \right) dx = Z_6.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Указанные в (17) вторые производные соответствуют двоичному коду 110000, но поскольку эти величины стоят под знаком интеграла, им соответствует отрицательное значение – 110000. Мнемоника данного обозначения ясна: отрицательная производная означает интегрирование. Наконец, поскольку интегрирование

ведётся по площади, а не по сторонам элемента, этот код помещён в третью строку кода (в соответствии с п. 1). В итоге код элемента выглядит так:
$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & & 0 \\ 1 & -110000 & \end{matrix} \equiv \text{Wil.}$$

Функции формы имеют вид

$$s_{i,0}^{\text{Wil}} = \frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta), \quad i = 1, \dots, 4; \quad s_{5,0}^{\text{Wil}} = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), \quad s_{6,0}^{\text{Wil}} = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1).$$

Треугольный элемент Шпехта 10] (рис. 3, справа) в работе 8] обозначен так:

$$233 \binom{2^3 3^3}{3^2} \{ \bar{Z}_n = Z_n; \bar{Z}'_{xn} = Z'_{xn}; \bar{Z}'_{yn} = Z'_{yn}; \int_{L_n} \bar{Z} d\tau = \frac{L_n}{2}(Z_n + Z_{n+1}) + \frac{L_n}{12}(Z_n^4 - Z_{n+1}^4); \int_{L_n} \bar{Z}^n d\tau = \frac{L_n}{2}(Z_{n+1}^n - Z_n^n); n=1, \dots, 3 \} \quad (18)$$

Элемент имеет $3 \cdot 3 = 9$ узловых координат, как типичный элемент пластины. Однако его интерполяционный полином $Z(x, y)$ соответствует вспомогательному элементу $\binom{2^3 3^3}{3^2}$ и поэтому содержит $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ членов с неопределёнными коэффициентами, согласно формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, т.е. является полным полиномом четвёртой степени по x и y . Девять граничных условий для нахождения коэффициентов соответствуют девяти узловым степеням свободы, как в уравнении (15). Дополнительные 6 условий накладываются в соответствии с так называемым «тестом заплатки» 10]: интегралы от перемещения \check{Z} и его нормальной производной \check{Z}^n вдоль каждой стороны L_i должны определяться координатами в узлах этой стороны.

Краткая, но исчерпывающая нотация для этого элемента: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Минус в показателе производных от координат -2 показывает два интегрирования в формуле (18) как обратные операции для дифференцирования. Знак «минус» в числе узлов -3 означает, что соответствующие интегральные степени свободы не вводятся в качестве новых координат, как в элементе Вильсона, а, напротив, исключаются путём интерполирования, как указано выше.

Элемент Вёбеке – это прямоугольный конформный элемент пластины, предложенный в работе 5], один из самых удачных в своём роде; обозначается $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$.

3. Неполиномиальные функции формы

Выше в тексте функции формы для элемента с D степенями свободы содержали только полиномиальные члены. Например, для одномерного случая: $w_0 = 1, w_1 = x, w_2 = x^2, \dots, w_{D-1} = x^{D-1}$. Все они являются решениями дифференциального уравнения

$w^{(D)} = 0$. Коэффициенты этого уравнения можно свести в вектор $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$, используемый по умолчанию. Вообще, встречаются обобщения этого уравнения с произвольным набором коэффициентов:

$$\frac{d^D w}{dx^D} + c_{D-1} \frac{d^{D-1} w}{dx^{D-1}} + \dots + c_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + c_1 \frac{dw}{dx} + c_0 w = 0.$$

Тогда элемент может быть обозначен так: $dncm \{1, c_{D-1}, \dots, c_2, c_1, c_0\}$. Примеры:

122 $w_k = \{1, x, x^2, x^3\}$ – обычный балочный элемент;

122 $\{1, 0, 0, 0, -b^4\}$ $w_k = \{\cos bx, \sin bx, e^{bx}, e^{-bx}\}; w_k = \{\cos bx, \sin bx, \cosh bx, \sinh bx\}$ –

гиперболические функции формы;

$w_k = \{\cosh bx + \cos bx, \sinh bx + \sin bx, \cosh bx - \cos bx, \sinh bx - \sin bx\}$ – функции Крылова;

$$122\{1, 0, -b^2, 0, 0\} \quad w_k = \{1, x, e^{bx}, e^{-bx}\}; \quad w_k = \{1, x, \cosh bx, \sinh bx\};$$

$$122\{1, 0, a, 0, b\} \quad w_k = \{\cosh kx \cos lx, \cosh kx \sin lx, \sinh kx \cos lx, \sinh kx \sin lx\} \quad - \text{ это}$$

модифицированные функции Крылова, встречающиеся, например, в работе 1].

Заключение

В данной статье продолжена разработка десятичного номенклатурного кода *dncm*, созданного для систематического однозначного и конструктивного обозначения произвольного конечного элемента, учитывающего его геометрию, структуру

узлов, узловых координат и других параметров. Значительно расширен круг конечных элементов, который может быть описан с помощью предложенного подхода. Приведены примеры конкретных элементов, используемых на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитроченко, О.Н. Десятичный номенклатурный код *dncmkot* для идентификации существующих и автоматической генерации новых конечных элементов / О.Н. Дмитроченко // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 1. - С. 207-217.
1. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. - М.: Физматлит, 1960. - 491 с.
2. Allman, D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis / D.J. Allman // Computers and Structures. - 1984. - № 19 (1). - P. 1-8.
3. Bazeley, G.P. Triangular Elements in Bending - Conforming and Nonconforming Solutions / G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. - Air Force Inst. Of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
4. Cook, R.D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis / R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, R.T. Witt. - Fourth edition. - John Wiley & Sons, Inc. - 2002.
5. Veubeke, B.F. Variational principles and the path test / B.F. Veubeke // Int. J. Num. Meth. Eng. - 1974. - № 8(4). - P. 783-801.
1. Dmitrochenko, O.N. Decimal nomenclature code *dncmkot* for identification of existing finite elements and automatic generation of new finite elements / O.N. Dmitrochenko // *Bulletin of Bryansk State Technical University* - 2017. - № 1. - pp. 207-217.
11. Vlasov, V.Z. *Elastic Based Beams, Plates and Casings* / V.Z. Vlasov, N.N. Leontiev - M.: Physmathlit, 1960. - pp. 491 с.
12. Allman, D.J. [A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis](#) / D.J. Allman // Computers and Structures. - 1984. - № 19 (1). - P. 1-8.
13. Bazeley, G.P. Triangular Elements in Bending - Conforming and Nonconforming Solutions / G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. - Air Force Inst. Of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
6. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // *Multibody System Dynamics*. - 2009. - № 22 (4). - P. 323-339.
7. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // *Proc. of the Inst. of Mech. Eng. Part K: J. of Multi-Body Dyn.* - 2011. - № 225(1). - P. 34-51.
8. Dmitrochenko, O. Extended digital nomenclature code for description of complex finite elements and generation of new elements / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. - 2011. - № 39 (2). - P. 229-252.
9. Morley, L.S.D. The constant-moment plate-bending element / L.S.D. Morley // *J. of Strain Analysis for Engineering Purposes*. - 1971. - № 6 (1). - P. 20-24.
10. Specht, B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test / B. Specht // *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*. - 1988. - № 26 (3). - P. 705-715.
14. Cook, R.D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis / R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, R.T. Witt. - Fourth edition. - John Wiley & Sons, Inc. - 2002.
15. Veubeke, B.F. Variational principles and the path test / B.F. Veubeke // *Int. J. Num. Meth. Eng.* - 1974. - № 8(4). - P. 783-801.
16. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // *Multibody System Dynamics*. - 2009. - № 22 (4). - P. 323-339.
17. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // *Proc. of the Inst. of Mech. Eng. Part K: J. of Multi-Body Dyn.* - 2011. - № 225(1). - P. 34-51.

-
18. Dmitrochenko, O. Extended digital nomenclature code for description of complex finite elements and generation of new elements / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Mechanics Based Design of Structures and Machines. - 2011. - № 39 (2). - P. 229-252.
 19. Morley, L.S.D. The constant-moment plate-bending element / L.S.D. Morley // J. of Strain Analysis for Engineering Purposes. - 1971. - № 6 (1). - P. 20-24.
 20. Specht, B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test / B. Specht // Int. J. of Numerical Methods in Engineering. - 1988. - № 26 (3). - P. 705-715.

Статья поступила в редколлегию 27.01.17.

*Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного технического университета
Сакало В.И.*

Сведения об авторах:

Дмитроченко Олег Николаевич, докторант Брянского государственного технического университета, e-mail: dmitroleg@rambler.ru.

Dmitrochenko Oleg Nikolayevich, Doctoral student of Bryansk State Technical University, e-mail: dmitroleg@rambler.ru.